Σχήμα Horner

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$= [[\dots[(a_N x + a_{N-1})x + a_{N-2}]x + \dots + a_2]x + a_1]x + a_0$$
$$= [[\dots(b_{N-1}x + a_{N-2})x + \dots + a_2]x + a_1]x + a_0$$
$$= [[\dots b_{N-2}x + \dots + a_2]x + a_1]x + a_0$$
$$= \dots$$
$$= (b_2 x + a_1)x + a_0$$
$$= b_1 x + a_0$$
$$= b_0$$

$b_N = a_N$

$b_{N-1} = a_{N-1} + b_N x$

$b_{N-2} = a_{N-2} + b_{N-1} x$

$\vdots$

$b_2 = a_2 + b_3 x$

$b_1 = a_1 + b_2 x$

$b_0 = a_0 + b_1 x$

δηλ.

$$b_n = a_n + b_{n+1}x, \quad n=0,1,\dots,N-1, \qquad b_N = a_N$$

a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0	ρ
	$b_N\rho$	$b_{N-1}\rho$		$b_3\rho$	$b_2\rho$	$b_1\rho$	
b_N	$a_{N-1}+b_N\rho = b_{N-1}$	a_{N-2}		b_2	b_1	b_0	

$P(x) = (x-\rho)\,\pi(x) + \upsilon \xRightarrow{x=\rho} P(\rho) = \upsilon = b_0$. Επομένως, για να βρούμε την τιμή ενός πολυωνύμου στη θέση ρ δεν έχουμε παρά να κάνουμε το σχήμα Horner ως προς ρ (δηλ. ~~διαι~~ συνθετική διαίρεση με $x-\rho$) και το υπόλοιπο $\upsilon = P(\rho) = b_0$

π.χ. $P(x) = x^3 - 3x + 5$, $P(-2) = ?$

1	0	−3	5	−2
	$1\cdot(-2)=-2$	$(-2)\cdot(-2)=4$	$1\cdot(-2)=-2$	
1	$0+(-2)=-2$	$(-3)+4=1$	$5+(-2)=3$	

Άρα $P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1) + 3 \Rightarrow P(-2) = 3$

Πράγματι $x^3 \cancel{-2x^2} + x \cancel{+2x^2} - 4x + 2 + 3 = x^3 - 3x + 5 = P(x)$

π.χ. $P(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 3$, $\dfrac{P(x)}{x-3}$

3	1	−4	3	3
	9	30	78	
3	10	26	81	

Άρα $P(x) = (x-3)(3x^2+10x+26)+81 \Rightarrow P(3) = 81$

$P'(\rho) = \pi(\rho)$

Διότι $P(x) = (x-\rho)\,\pi(x) + \upsilon \Rightarrow P'(x) = \pi(x) + (x-\rho)\,\pi'(x)$

$\Rightarrow P'(\rho) = \pi(\rho)$

Άρα για να βρούμε την τιμή της παραγώγου του $P(x)$ στο ρ δεν έχουμε παρά να κάνουμε το σχήμα Horner ξανά για το πηλίκο $\pi(x)$ (με ρίζα ρ) και το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης $\upsilon = \pi(\rho) = P'(\rho)$

π.χ. $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$, $P'(-2)$

$\rho = -2$

$P(x)$:

2	0	−3	3	−4	−2
	−4	8	−10	14	
2	−4	5	−7	10	

$P(x) = (x+2)\underbrace{(2x^3-4x^2+5x-7)}_{\pi(x)}+10$, $P(-2) = 10$

$\pi(x)$:

2	−4	5	−7	−2
	−4	16	−42	
2	−8	21	−49	

$\pi(x) = (x+2)(2x^2-8x+21) - 49$, $\pi(-2) = -49$

$\Rightarrow P'(-2) = -49$

Μπορούμε αφού βρήκαμε τα $P(-2)=10$, $P'(-2)=-49$ να εφαρμόσουμε τη μέθοδο N-R για να βρούμε τη ρίζα $P(x)=0$ με $x_0=-2$

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{P(-2)}{P'(-2)} = -2 - \frac{10}{-49} = -1.796$$

Εν συνεχεία χρειάζομαι τα $P(x_1)=P(-1.796)$ και $P'(x_1)=P'(-1.796)$

Άρα πάλι Horner

$P(x)$:	2	0	-3	3	-4	-1.796
		-3.592	6.451	-6.197	5.742	
	2	-3.592	3.451	-3.197	1.742	

$$\Rightarrow P(-1.796) = 1.742$$

$\pi(x)$:	2	-3.592	3.451	-3.197	-1.796
		-3.592	12.902	-29.368	
	2	-7.184	16.353	-32.565	

$$\Rightarrow P'(-1.796) = -32.565$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = -1.796 - \frac{1.742}{-32.565} \simeq -1.7425$$

⋮

$x \simeq -1.73896$

Π.Χ. $P(x) = 2x^2+6x+5 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, $x_0 = -\frac{3}{2}+i$

N–R

$P'(x) = 4x+6$

$P(x_0) = -1.5$, $P'(x_0) = 4i$

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -1.5+0.625i$$

$P(x_1) = -0.28125$, $P'(x_1) = 2.5i$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = -1.5+0.5125i$$

$P(x_2) = -0.0253125$, $P'(x_2) = 2.05i$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = -1.5+0.5i$$

Άρα μία ρίζα του τριωνύμου $2x^2+6x+5=0$ είναι $r_1 = -1.5+0.5i$ και η άλλη η συζυγής της $r_2 = -1.5-0.5i$

Επίλυση Μη-Γραμμικών συστημάτων

$$\vec{f}(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f_1(x_1,\dots,x_N)=0 \\ \vdots \\ f_N(x_1,\dots,x_N)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow f_i(x_j)=0 \quad , i,j=1,2,\dots,M$$

Μέθοδος σταθερού σημείου

$$\vec{f}(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{g}(\vec{x})$$

$$\vec{x}^{(n+1)}=\vec{g}(\vec{x}^{(n)}), \quad n=0,1,2,\dots$$

Συνθήκη σύγκλισης $\rho(J(\vec{x}))<1$ $\qquad J=(J_{ij})=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right)$

φασματική ακτίνα

ή $\|J(\vec{x})\|<1$

Όσο μικρότερο το ρ τόσο ταχύτερα συγκλίνει. Για $J=0$ η σύγκλιση τετραγωνική.

π.χ.

$$\begin{aligned} &3x_1-\cos(x_2x_3)-0.5=0 \\ &x_1^2-81(x_2+0.1)^2+\sin x_3+1.06=0 \\ &e^{-x_1x_2}+20x_3+\frac{10\pi-3}{3}=0 \end{aligned} \qquad \vec{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}0.1\\0.1\\-0.1\end{pmatrix} \qquad N=4$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{3}\cos(x_2x_3)+\frac{1}{6} \\ x_2&=\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}-0.1 \\ x_3&=-\frac{1}{20}e^{-x_1x_2}-\frac{10\pi-3}{60} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1^{(n)}&=\frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(n-1)}x_3^{(n-1)}\right)+\frac{1}{6} \\ x_2^{(n)}&=\frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(n-1)}\right)^2+\sin x_3^{(n-1)}+1.06}-0.1 \\ x_3^{(n)}&=-\frac{1}{20}e^{-x_1^{(n-1)}x_2^{(n-1)}}-\frac{10\pi-3}{60} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(4)}=\begin{pmatrix}0.50000000\\0.00000003\\-0.52359847\end{pmatrix}$$

Μέθοδος Newton-Raphson

Αν $\vec{x}^{(n)}$ η τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ στην $(n+1)$-επανάληψη της μεθόδου, τότε

$\vec{x}^{(n+1)}=\vec{x}^{(n)}+\delta\vec{x}^{(n)}$, $n=0,1,2,\dots$ $\Leftrightarrow x_i^{(n+1)}=x_i^{(n)}+\delta x_i^{(n)}$, $i=1,2,\dots,M$, τότε

$$\vec{f}(\vec{x}^{(n+1)})\simeq 0 \Leftrightarrow f_i(x_j^{(n+1)})\simeq 0 \Leftrightarrow f_i(x_j^{(n)}+\delta x_j^{(n)})=0 \Leftrightarrow f_i(x_j^{(n)})+\sum_{k=1} f_{i,k}(x_j^{(n)})\,\delta x_k^{(n)}\simeq 0$$

$$\Leftrightarrow f_i(x_j^{(n)})+\sum_k J_{ik}(x_j^{(n)})\,\delta x_k^{(n)}=0 \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}^{(n)})+\mathbb{J}(\vec{x}^{(n)})\,\delta\vec{x}^{(n)}=0 \Leftrightarrow \delta\vec{x}^{(n)}=-\mathbb{J}^{-1}(\vec{x}^{(n)})\,\vec{f}(\vec{x}^{(n)})$$

Άρα

$$\vec{x}^{(n+1)}=\vec{x}^{(n)}-\mathbb{J}^{-1}(\vec{x}^{(n)})\,\vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &\vec{x}^{(n+1)}=\vec{x}^{(n)}+\delta\vec{x}^{(n)} \\ &\mathbb{J}(\vec{x}^{(n)})\,\delta\vec{x}^{(n)}=-\vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \end{aligned}\right\} \quad n=0,1,2,\dots$$

Η μέθοδος αυτή να λέγεται και Newton αντικαθιστά ένα σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

π.χ. $\begin{cases} x^3 - 3xy^3 + 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_1 = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f_2 = 3x^2y - y^3$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$\det(J) = 3(x^2+y^2) \neq 0$

$$J^{-1} = \frac{1}{9(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} - \left\{ \frac{1}{9(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 + 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \right\}^{(0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

π.χ. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 - 2 \\ f_2 &= x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{aligned}$

$$J = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \qquad J(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$

$J(\vec{x}^{(0)})\,\delta\vec{x}^{(0)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1^{(0)} \\ \delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1.83 \\ -0.58 \end{pmatrix}$

$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.72 \end{pmatrix}, \quad \vec{J}(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1.67 & 11.3 \end{pmatrix}$

$J(\vec{x}^{(1)})\,\delta\vec{x}^{(1)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1.67 & 11.3 \end{pmatrix} \delta\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.72 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.32 \end{pmatrix}$

$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} + \delta\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.19 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.83 \end{pmatrix}, \quad \vec{J}(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -0.38 & 8.76 \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

π.χ. $f_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 3 = 0$ $\qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$

$$J = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$J(\vec{x}^{(0)})\, \delta\vec{x}^{(0)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1^{(0)} \\ \delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \delta x_1^{(0)} \\ \delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ -\frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.625 \\ 3.625 \end{pmatrix}$$

$$J(\vec{x}^{(1)})\, \delta\vec{x}^{(1)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5/4 & 29/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1^{(1)} \\ \delta x_2^{(1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{145}{32} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta x_1^{(1)} \\ \delta x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145/272 \\ -145/272 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} + \delta\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.092 \\ 3.092 \end{pmatrix}$$

π.χ. $f_1(x_1,x_2,x_3) = 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 - 13 = 0$

$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 10x_2 - x_3 - 11 = 0$ $\qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_2^3 - 25x_3 + 22 = 0$ $\qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1.0364005 \\ 1.0857065 \\ 0.9311914 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2x_2 & -4 \\ 2x_1 & 10 & -1 \\ 0 & 3x_2^2 & -25 \end{pmatrix}$$

$$J(\vec{x}^{(0)})\, \delta\vec{x}^{(0)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1^{(0)} \\ \delta x_2^{(0)} \\ \delta x_3^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.0366492 \\ 0.0856985 \\ -0.0697161 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \delta\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.0366492 \\ 1.0856985 \\ 0.9302839 \end{pmatrix} \simeq r$$

Μέθοδος δικτρωχιού

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - \omega \left(J(\vec{x}^{(n)}) + \lambda I \right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \qquad , n=0,1,2,\ldots$$

Για $\omega=1$, $\lambda=0$ προκύπτει η μέθοδος Newton

Μέθοδος της σύνθεσης

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \left[\vec{f}(\vec{x}^{(n)}) + \vec{f}\left(\vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \right) \right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Δηλαδή αν $\vec{y}^{(n)} = \vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{x}^{(n)})$ στο ~~πρώτο~~ n βήμα, τότε στο $n+1$

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{y}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{y}^{(n)})$$

$$= \vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}\left(\vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \right)$$

$$= \vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \left[\vec{f}(\vec{x}^{(n)}) - \vec{f}\left(\vec{x}^{(n)} - J^{-1}(\vec{x}^{(n)}) \vec{f}(\vec{x}^{(n)}) \right) \right]$$