2ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ασκήσεις Γραμμικών Συστημάτων (12 ασκήσεις)

Άσκηση 1 Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση και μετά με οδήγηση το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 592y &= 437 \\ 592x + 4308y &= 2251 \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Να λυθούν με τη μέθοδο Gauss-Jordan και με ακρίβεια στις πράξεις 2 δεκαδικών ψηφίων, τα συστήματα

α) $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} 4x - y + z &= 8 \\ 2x + 5y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$

Άσκηση 3 Να γίνει παραγοντοποίηση LU των παρακάτω πινάκων με $\ell_{ii} = 1$ για κάθε i.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4 Να βρεθεί με τη μέθοδο Choleski ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Διατυπώσατε το συμπέρασμά σας.

Άσκηση 5 Να υπολογιστεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.36 & 0.12 \\ 0.12 & 0.16 & 0.24 \\ 0.15 & 0.21 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6 Να βρεθεί με τη μέθοδο Jacobi μια προσεγγιστική λύση των συστημάτων:

$$\alpha)\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\beta)\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$\gamma)\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

με αρχικές τιμές $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις.

Άσκηση 7 Να βρεθεί με τη μέθοδο Gauss-Seidel μια προσεγγιστική λύση των συστημάτων

$$\alpha)\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \beta)\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

με αρχικές τιμές $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις και να υπολογίσετε τον αριθμό ε από το κριτήριο διακοπής για την τρίτη επανάληψη. [$\| x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} \|_\infty = \max | x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} | \leq \varepsilon$ κριτήριο διακοπής]

Άσκηση 8 Να λυθεί με τη μέθοδο SOR το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 2 \\ - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ και $\omega = 1.2$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις.

Άσκηση 9 Προσδιορίστε τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10 Προσδιορίστε τον δείκτη κατάστασης του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix},$$

αν στο $\mathbb{R}^2$ θεωρήσουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ ή τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αντίστοιχα.

Άσκηση 11 Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγόμενη από αυτή νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, και $\kappa(A)$ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς $\|\cdot\|$.

α) Αν $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας, αποδείξτε ότι

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

β) Αν $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $a := \|A^{-1}B\| < 1$, αποδείξτε ότι

$$\|(A + B)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{a}{1 - a} \|A^{-1}\|.$$

Άσκηση 12 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε κατά πόσον η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ στη λύση x του συστήματος $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$.