Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #12

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση: Σε σταθμό βενζίνης φτάνουν κατά μέσο όρο 20 πελάτες ανά ώρα.

α) Ποιά η πιθανότητα σε 15 λεπτά να φτάσει ένας μόνο πελάτης;

β) Ποιά η πιθανότητα μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων να περάσουν τουλάχιστον 3 λεπτά;

γ) Αν η ποσότητα σε λίτρα που βάζει ένας πελάτης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 20 και ο σταθμός κερδίζει 0,02 €/λίτρο, ποιό το αναμενόμενο κέρδος του πρατηρίου σε διάστημα 12 ωρών?

Λύση:

α) $P(N(t)=x) = e^{-20t}\dfrac{(20t)^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$

$P(\{1 \text{ πελάτης στο } (s, s+\frac{1}{4})\}) =$

$= P(N(\frac{1}{4})=1) = e^{-20\frac{1}{4}}\dfrac{(20\frac{1}{4})^1}{1!} = 5e^{-5}.$

β) Έστω T_i ο χρόνος που μεσολαβεί απο την άφιξη του $i-1$ μέχρι τον i πελάτη

Τότε $f_{T_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = 20e^{-20x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$

Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P\left(T_i > \frac{3}{60}\right) = P\left(T_i > \frac{1}{20}\right) = \int_{\frac{1}{20}}^{+\infty} f_{T_i}(x)\,dx = \int_{\frac{1}{20}}^{+\infty} 20\, e^{-20x}\,dx =$$

$$= \left[-e^{-20x}\right]_{1/20}^{+\infty} = e^{-1}.$$

γ) Έστω X η τ.μ. που μετρά την ποσότητα βενζίνης σε λίτρα που βάζει κάθε πελάτης.
Τότε $X \sim$ κανονική κατανομή με $E[X] = 20 = \mu$.

Για κάθε πελάτη το κέρδος θα είναι $0{,}02 \cdot 20 = 0{,}4$ € ανά πελάτη κατά μέσο όρο

Αρκεί να βρω το αναμενόμενο πλήθος πελατών που φτάνουν σε διάστημα 12 ωρών.

$$E[N(s+12) - N(s)] = E[N(12)] = 12 \cdot \lambda = 12 \cdot 20 = 240.$$

Άρα, το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$240 \cdot 0{,}4 = 96$ €. ■

<u>Άσκηση:</u> Σε ένα μεγάλο κατάστημα κατά τις ώρες αιχμής έχουμε Poisson αφίξεις πελατών με ρυθμό 150 την ώρα. Από τους πελάτες τα $\frac{2}{3}$ είναι γυναίκες, από τις οποίες το 30% πηγαίνει στο τμήμα αθλητικών ειδών.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα να μην έχουμε καμία άφιξη πελάτη σε διάστημα 1 λεπτού.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα σε ένα λεπτό να έρθουν περισσότερες από 2 γυναίκες.

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα οι 5 πρώτοι πελάτες να είναι γυναίκες

δ) Υπολογίστε την πιθανότητα στους πρώτους 10 πελάτες οι 7 ακριβώς να είναι γυναίκες.

ε) Ποιός είναι ο ρυθμός άφιξης των γυναικών στα αθλητικά είδη;

<u>Λύση:</u>

Poisson: $P(N(t)=x) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

α) Ρυθμός άφιξης πελατών : $\lambda_1 = 150$ πελ./ώρα $=$

$= \dfrac{150}{60}$ πελ./min $= 2{,}5$ πελ./min.

$P\{(0 \text{ πελάτης σε } 1\,min)\} = e^{-\lambda_1\cdot 1}\dfrac{(\lambda_1\cdot 1)^0}{0!} = e^{-\lambda_1} = e^{-\frac{5}{2}}$.

β) Ρυθμός άφιξης γυναικών : $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}\lambda_1 = \dfrac{2}{3}2{,}5$ γυναίκες/min $=$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{2}$ γυναίκες/min $= \dfrac{5}{3}$ γυναίκες/min.

$P\{0 \text{ γυναίκες σε } 1\,min\} = e^{-\lambda_2 \cdot 1} \dfrac{(\lambda_2 \cdot 1)^0}{0!} = e^{-\lambda_2} = e^{-\frac{5}{3}}$

$P\{1 \text{ γυναίκα σε } 1\,min\} = e^{-\lambda_2 \cdot 1} \dfrac{(\lambda_2 \cdot 1)^1}{1!} = e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2 = \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}$

$P\{2 \text{ γυναίκες σε } 1\,min\} = e^{-\lambda_2 \cdot 1} \dfrac{(\lambda_2 \cdot 1)^2}{2!} = e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^2}{2} = \dfrac{25}{18} e^{-\frac{5}{3}}$

Οπότε, $P\{\text{περισσότ. από 2 γυναίκες σε } 1\,min\} =$

$= 1 - \left[P\{0 \text{ γυναίκες σε } 1\,min\} + P\{1 \text{ γυναίκα σε } 1\,min\} + P\{2 \text{ γυναίκες σε } 1\,min\}\right] =$

$= 1 - \left(e^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}} + \frac{25}{18} e^{-\frac{5}{3}} \right) =$

$= 1 - e^{-\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{18} \right) =$

$= 1 - e^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{6}{6} + \frac{30}{18} + \frac{25}{18} \right) =$

$= 1 - \frac{61}{18} e^{-\frac{5}{3}}$

γ) $P\{5 \text{ γυναίκες σε 5 πελάτες}\} = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$

δ) $P\{7 \text{ γυναίκες σε 10 πελάτες}\} = P\{\text{σε 10 πελάτες να έχω 7 γυναίκες \& 3 άντρες}\} =$

$= \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0,2601.$

ε) $\lambda_3 = 0,3 \cdot \lambda_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{2}$ γυναίκες/min στα αθλητικά είδη.

Άσκηση: Παρατηρώντας τους πελάτες ενός καταστήματος που περνάν από το ταμείο, διαπιστώνουμε τα εξής:

- Μετά από έναν άνδρα είναι εξ' ίσου πιθανό να περάσει άντρας ή γυναίκα.
- Μετά από μία γυναίκα ακολουθεί άντρας στο 20% των περιπτώσεων και γυναίκα στο 80% των περιπτώσεων.

α) Υπολογίστε το ποσοστό των ανδρών και γυναικών που περνούν από το ταμείο.

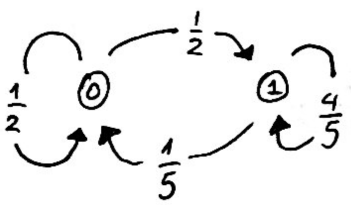
β) Αν η πρώτη πελάτισσα της ημέρας είναι γυναίκα, υπολογίστε την πιθανότητα και η $4^{η}$ να είναι γυναίκα.

Λύση:

Θεωρώ τις καταστάσεις:

0 : από το ταμείο περνάει άνδρας

1 : — '' — γυναίκα.



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

α) Ψάχνω οριακές πιθανότητες:

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} & \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{5}\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} & \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{4}{5}\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 & \Rightarrow \pi_0 = 1 - \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_0 = \frac{2}{7} \\ \pi_1 = \frac{5}{7} \end{array}$$

Άρα, το ποσοστό των γυναικών είναι 71,43% και των ανδρών 28,57%.

β) Ζητεώ την πιθανότητα $P(X_3 = 1 / X_0 = 1) = P_{11}^{(3)}$.

α' τρόπος: Υπολογίζω τον $\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbb{P}$

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \times \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{13}{20} \\ \frac{13}{50} & \frac{37}{50} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{13}{20} \\ \frac{13}{50} & \frac{37}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{200} & \frac{109}{200} \\ \frac{139}{500} & \frac{361}{500} \end{pmatrix}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_{11}^{(3)} = \frac{361}{500}$.

β' τρόπος: Από το γράφημα της αλυσίδας έχω τα μονοπάτια:

- $1 \to 1 \to 1 \to 1$ με $p = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$
- $1 \to 1 \to 0 \to 1$ με $p = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{50}$
- $1 \to 0 \to 0 \to 1$ με $p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
- $1 \to 0 \to 1 \to 1$ με $p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{50}$

Άρα, $P(X_3 = 1 / X_0 = 1) = \frac{64}{125} + \frac{4}{50} + \frac{1}{20} + \frac{4}{50} = \frac{361}{500}$

■.

Άσκηση: Ένα παλιό κτήριο έχει 4 ορόφους και ισόγειο. Ο ανελκυστήρας του κτηρίου, από κάθε όροφο που βρίσκεται, μπορεί να ανέβει στον αμέσως υψηλότερο με πιθανότητα 40% ή να κατέβει στον αμέσως χαμηλότερο με πιθανότητα 60%. (Ο Ανελκυστήρας δεν προσπερνά ορόφους αν δεν σταματήσει). Από το ισόγειο μόνο ανεβαίνει και από τον 4ο όροφο μόνο κατεβαίνει. Στο ισόγειο ή στον 4ο μπορεί να μένει.

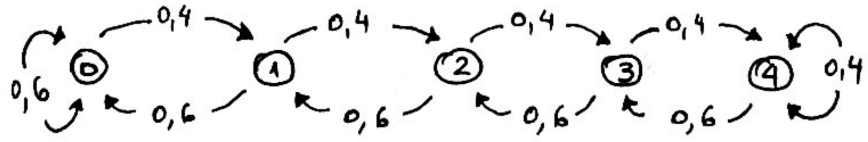
α) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα. Ποιές είναι οι καταστάσεις της; Ποιές είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας; Ποιές καταστάσεις είναι έμμονες & ποιές μεταβατικές;

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P_{12}^{(3)}$.

γ) Υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες.

Λύση:

α) Καταστάσεις: οι θέσεις του ανελκυστήρα (4 όροφοι & ισόγειο).



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\
0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\
0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\
0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\
0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Έχω μία κλάση ισοδυναμίας: $\{0,1,2,3,4\}$

Ανάγωγη Αλυσίδα.

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες.

β) **α' τρόπος:** Υπολογίζω τον πίνακα $\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^3 = \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ και βρίσκω το στοιχείο P_{12}

β' τρόπος: Από το γράφημα:

Μονοπάτι 1: $1 \to 2 \to 3 \to 2$ με $p = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$

Μονοπάτι 2: $1 \to 2 \to 1 \to 2$ με $p = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$

Μονοπάτι 3: $1 \to 0 \to 1 \to 2$ με $p = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$

Άρα, $P_{12}^{(3)} = 3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$.

γ) Η αλυσίδα είναι αναγώγιμη, απεριοδική & πεπερασμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχει οριακή κατανομή.

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{4} \pi_i P_{i0} = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \pi_3 P_{30} + \pi_4 P_{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 0{,}6\pi_0 + 0{,}6\pi_1$$

όμοια έχω τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} &\pi_1 = 0{,}4\pi_0 + 0{,}6\pi_2 \\ &\pi_2 = 0{,}4\pi_1 + 0{,}6\pi_3 \\ &\pi_3 = 0{,}4\pi_2 + 0{,}6\pi_4 \\ &\pi_4 = 0{,}6\pi_3 + 0{,}4\pi_4 \\ &\sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\pi_0 = \frac{81}{211} \\ &\pi_1 = \frac{54}{211} \\ &\pi_2 = \frac{36}{211} \\ &\pi_3 = \frac{24}{211} \\ &\pi_4 = \frac{16}{211} \end{aligned}$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα έχει επτά καταστάσεις από 0 έως 6. Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $1^{ης}$ τάξης:

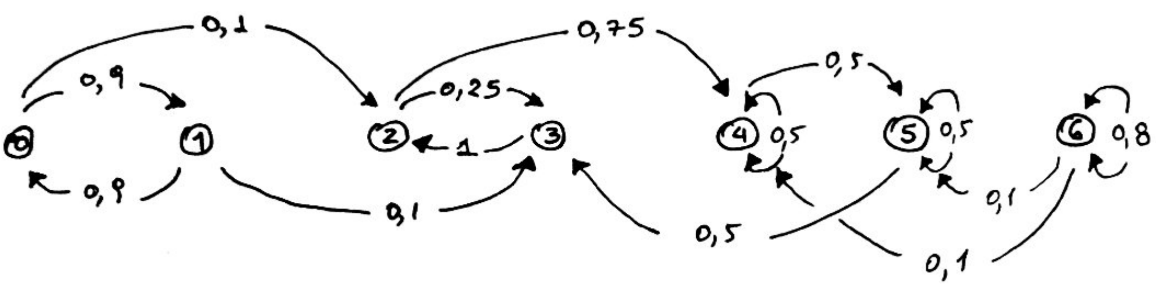
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \mathbb{P} = \begin{bmatrix}
0 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

α) Βρείτε κλάσεις ισοδυναμίας, κάντε το γράφημα.

β) Υπάρχει οριακή κατανομή πιθανότητας για όλες ή κάποιες καταστάσεις;

<u>Λύση:</u>

α)



Δημιουργούνται 3 κλάσεις ισοδυναμίας:

$\{0,1\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{6\}$.

$\{0,1\}$ ↓ μεταβατικές

$\{2,3,4,5\}$ ↓ Έμμονες

$\{6\}$ ↓ Μεταβατική.

β) Οι καταστάσεις 2, 3, 4, 5 είναι έμμονες και απεριοδικές (δηλ. περίοδος = 1, λόγω του βρόχου 4→4) και πεπερασμένη αλυσίδα ⇒ Υπάρχει οριακή κατανομή.

$$\left.\begin{aligned} \pi_2 &= \pi_3 \\ \pi_3 &= 0{,}25\pi_2 + 0{,}5\pi_5 \\ \pi_4 &= 0{,}75\pi_2 + 0{,}5\pi_4 \\ \pi_5 &= 0{,}5\pi_4 + 0{,}5\pi_5 \\ \pi_2+\pi_3&+\pi_4+\pi_5 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \pi_3 = \pi_2 = 0{,}2 \quad , \quad \pi_4 = \pi_5 = 0{,}3$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Σε ένα υπολογιστικό κέντρο οι βλάβες στο υλικό συμβαίνουν τυχαία στον χρόνο. Έχει υπολογιστεί ότι η εμφάνιση των βλαβών μπορεί να θεωρηθεί ως διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda = 2{,}4$ βλάβες/ημέρα.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε μία βλάβη στις επόμενες 12 ώρες.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα να μην έχουμε βλάβη τις επόμενες 48 ώρες.

<u>Λύση:</u>

$$P(N(t)=x) = e^{-2{,}4t}\,\frac{(2{,}4t)^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

α) $P(1 \text{ βλάβη στο } (t_0, t_0+\tfrac{1}{2})) = P(N(t_0+\tfrac{1}{2}) - N(t_0) = 1) =$

$$= P(N(\tfrac{1}{2}) = 1) = e^{-2{,}4\frac{1}{2}}\,\frac{(2{,}4\,\frac{1}{2})^1}{1!} = 1{,}2\cdot e^{-1{,}2}.$$

β) $P(0 \text{ βλάβες στο } (t_0, t_0+2)) = P(N(2)=0) = e^{-2{,}4\cdot 2}\,\dfrac{(2{,}4\cdot 2)^0}{0!} = e^{-4{,}8}.$

■.