Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #3

Σύνδεση με τα προηγούμενα ...

Δισδιάστατες τ.μ.

Διακριτές

- $p(x,y) \geq 0 \;, \forall (x,y)$
- $\sum_{x}\sum_{y} p(x,y) = 1$

Συνεχείς

- $f(x,y) \geq 0 \;, \forall (x,y)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

π.χ. Έστω ότι η από κοινού σ.π.π. μιας συνεχούς δισδιάστατης τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y \;, & 0 \leq x \leq 1 \;\;\&\;\; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \;, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η σταθερά c.

Λύση:

Θα πρέπει: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1 cx^2y\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left[c\,x^2\,\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(cx^2\frac{1}{2} - 0\right)dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{c}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = 6.$$

π.χ. Έστω ότι η από κοινού σ.π.π. της δ.τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy\,, & 0<x<1 \ \& \ 0<y<1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η $P(X \le 0{,}1,\ 0{,}9 \le Y < 1)$.

Λύση:

Ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 cxy\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[cy\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{cy}{2}\,dy = 1 \Rightarrow \left[\frac{c}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4.$$

$$P(X \le 0{,}1,\ 0{,}9 \le Y \le 1) = \int_{0,9}^{1}\int_0^{0,1} 4xy\,dx\,dy = \int_{0,9}^{1}\left[4y\frac{x^2}{2}\right]_0^{0,1} dy =$$

$$= \int_{0,9}^{1} 2\cdot 10^{-2}y\,dy = \cancel{2}\cdot 10^{-2}\left[\frac{y^2}{\cancel{2}}\right]_{0,9}^{1} = 10^{-2}(1-0{,}9^2) = \dots$$

Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας

Έστω (X,Y) μια δισδιάστατη διακριτή τ.μ. και $p(x,y)$ η από κοινού σ.π.π. όπου:

$$p_Y(y) = P(Y=y) \neq 0$$

Η δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθέντος ότι $Y=y$, ορίζεται να είναι:

$$p_{X|Y}(x,y) := P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

όπου $p_Y(y)$ η σ.π.π. της τ.μ. Y.

Παρατήρηση: Αν X,Y ανεξάρτητες, τότε:

$$p_{X|Y}(x,y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(X=x)\cdot P(Y=y)}{P(Y=y)} = p_X(x).$$

Αν (X,Y) είναι μια συνεχής δισδιάστατη τ.μ. και $f(x,y)$ η από κοινού σ.π.π, τότε:

$$f_{X|Y}(x,y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Παρατήρηση: Αν X,Y ανεξάρτητες, τότε:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x).$$

Άσκηση: Έστω τ.μ. X & Y με από κοινού σ.π.π :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2 e^{-xy}}{3} &, \text{αν } 0<x<+\infty \text{ \& } 1<y<2 \\ 0 &, \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνοτ. πιθανότητας $f_{X|Y}(x,y)$ και η πιθανότητα $P(X>1 \,/\, Y=y)$.

Λύση:

Γνωρίζω ότι $$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad (*)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2y^2 e^{-xy}}{3}\,dx = \frac{2y^2}{3}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx =$$

$$= \frac{2y^2}{3}\left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_0^{+\infty} = \frac{2y^2}{3}\left[\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{y}e^{-xy}\right)}_{=0} - \left(-\frac{1}{y}e^{0}\right)\right] =$$

$$= \frac{2y^2}{3}\left[0+\frac{1}{y}\right] = \frac{2y}{3}$$

Άρα, $$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{3} &, 1<y<2 \\ 0 &, \text{αλλού.} \end{cases}$$

Επομένως, $$f_{X|Y}(x,y) \overset{(*)}{=} \frac{\frac{2y^2 e^{-xy}}{3}}{\frac{2y}{3}} = y e^{-xy}$$

Απλ. $f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} y e^{-xy} & , 0<x<+\infty, \quad 1<y<2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα, $P(X>1 / Y=y) = \int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x,y)\, dx = \int_1^{+\infty} y e^{-xy}\, dx =$

$= y \int_1^{+\infty} e^{-xy}\, dx = y \left[-\frac{1}{y} e^{-xy} \right]_1^{+\infty} = y \cdot \left[\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{y} e^{-xy} \right) - \left(-\frac{1}{y} e^{-y} \right) \right] =$

$= y \cdot \left(\frac{1}{y} e^{-y} \right) = e^{-y}$ ∎.

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

$$E[X / Y=y] = \begin{cases} \sum_{x \in S_X} x \cdot p_{X|Y}(x,y) & , \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτή δ.τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x,y)\, dx & , \text{αν } (X,Y) \text{ συνεχής δ.τ.μ.} \end{cases}$$

Άσκηση: Η από κοινού σ.π.π. δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{y}}\, e^{-y}}{y} & , \quad 0 < x, y < +\infty \\ 0 & , \quad \text{αλλού.} \end{cases}$$

$P(X<2 \,/\, Y=y) = ?$

$E[X \,/\, Y=1] = ?$

Λύση:

$$f_{X/Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\dfrac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}\, dx} = \frac{\frac{1}{y} e^{-y} e^{-\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y} e^{-y} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}}\, dx} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{\left[e^{-\frac{x}{y}}(-y)\right]_0^{+\infty}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-y e^{-\frac{x}{y}}\right) - \left(-y e^{0}\right)} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$$

Οπότε:

- $$P(X<2 \,/\, Y=y) = \int_0^2 f_{X/Y}(x,y)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^2 =$$

$$= 1 - e^{-\frac{2}{y}}.$$

- $$E[X \,/\, Y=1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X/Y=1}(x,1)\, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot (-e^{-x})'\, dx =$$

$$= \left[-x \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 \;\blacksquare$$

Άσκηση: Η από κοινού σ.π.π. 2 τ.μ. X, Y είναι η εξής:

$p(X=0, Y=0) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

$p(X=1, Y=0) = 0{,}05 = \frac{1}{20}$

$p(X=0, Y=1) = 0{,}025 = \frac{5}{8}$

$p(X=1, Y=1) = 0{,}125 = \frac{1}{8}$.

Να υπολογιστούν: i) $E[X / Y=1]$ και ii) $Var(X / Y=1)$.

Λύση:

Υπολογίσω τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_{X|Y}(x,y) = \frac{p(x,y)}{P_Y(y)} \Rightarrow P_{X|Y=1}(x,1) = \frac{p(x,1)}{P_Y(1)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{p(0,1)}{P_Y(1)} = \frac{0{,}025}{0{,}15}, & x=0 \\ \frac{p(1,1)}{P_Y(1)} = \frac{0{,}125}{0{,}15}, & x=1 \end{cases}$$

Αφού: $$P_Y(y) = \sum_{x=0}^{1} p(x,y) = p(0,y) + p(1,y) = \begin{cases} p(0,0)+p(1,0) = 0{,}85, & \text{αν } y=0 \\ p(0,1)+p(1,1) = 0{,}15, & \text{αν } y=1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οπότε: $$E[X / Y=1] = \sum_{x=0}^{1} x \cdot P_{X|Y=1}(x,1) = \sum_{x=0}^{1} x \cdot \frac{p(x,1)}{P_Y(1)} = 0 + 1\frac{p(1,1)}{P_Y(1)} = \frac{0{,}125}{0{,}15} = 0{,}833$$

$$E[X^2/Y=1] = \sum_{x=0}^{1} x^2 \cdot P_{X|Y=1}(x,1) = \sum_{x=0}^{1} x^2 \frac{p(x,1)}{P_Y(1)} = 0 + 1\frac{p(1,1)}{P_Y(1)} = \frac{0{,}125}{0{,}15} = 0{,}833$$

$$Var(X/Y=1) = E[X^2/Y=1] - \left(E[X/Y=1]\right)^2 = \frac{5}{36}$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Δίνεται η από κοινού σ.π.π. της δ.τ.μ. (X,Y) ως εξής:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-x-y \ , & 0<x<1 \ , \ 0<y<1 \\ 0 \ , & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε $E[X/Y=y]$.

<u>Λύση:</u>

Η δεσμευμένη σ.π.π. ορίζεται ως εξής:

$$f_{X/Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Οπότε:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (2-x-y)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - yx\right]_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - y - 0 = \frac{3}{2} - y.$$

Συνεπώς, $f_{X/Y}(x,y) = \dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-y}$, $0<x<1$, $0<y<1$

$$E[X/Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X/Y=y}(x,y)\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2-x-y}{\frac{3}{2}-y}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}-y} \int_0^1 (2x - x^2 - xy)\, dx = \frac{2}{3-2y} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - y\frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3-2y} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{y}{2} \right) = \frac{2}{3-2y} \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{2} \right) \blacksquare.$$

<u>Άσκηση:</u> Έστω X, Y τ.μ. με κοινή σ.π.π:

$$f(x,y) = \begin{cases} c - x^2 - y^2, & x, y \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) $c = ;$

ii) $f_X(x), f_Y(y) = ;$ Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

iii) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

$P\left(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2} \right)$ & $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3} / Y < \frac{1}{2} \right)$.

<u>Λύση:</u>

i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 (c - x^2 - y^2)\, dx\, dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[cx - \frac{x^3}{3} - y^2 \cdot x \right]_0^1 dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(c - \frac{1}{3} - y^2 \right) dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[cy - \frac{y}{3} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow c - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow c = 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{5}{3}$$

Άρα, $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{3} - x^2 - y^2, & \text{αν } x, y \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

ii) $f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{3} - x^2 - y^2\right) dy = \left[\frac{5}{3}y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$

$$= \frac{5}{3} - x^2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - x^2 \quad , \; x \in (0,1)$$

Δηλ. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{3} - x^2 - y^2\right) dx = \left[\frac{5}{3}x - \frac{x^3}{3} - y^2 x\right]_0^1 =$

$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} - y^2 = \frac{4}{3} - y^2 \quad , \; y \in (0,1)$$

Δηλ. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3} - y^2, & y \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$

Επειδή, $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{4}{3} - x^2\right)\left(\frac{4}{3} - y^2\right) \neq f(x,y)$

έπεται ότι X, Y όχι ανεξάρτητες.

iii) $P\left(X > \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{3} - x^2 - y^2\right) dy\,dx = \dots = \frac{49}{648}$

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3} \;/\; Y < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}, \; Y < \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y < \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\int_{1/3}^{2/3} \int_0^{1/2} \left(\frac{5}{3} - x^2 - y^2\right) dy\,dx}{\int_0^{1/2} \left(\frac{4}{3} - y^2\right) dy} = \dots = \frac{143}{405} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση: Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διανυσμ. τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y \,, & x,y \in (0,1) \\ 0 \,, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) Να βρεθούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των X & Y.

ii) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

$$P\left(X > \tfrac{2}{3} \mid Y < \tfrac{1}{2}\right), \quad P\left(X > \tfrac{1}{2} \mid Y = y\right), \quad P\left(Y < \tfrac{1}{2} \mid X = \tfrac{3}{4}\right).$$

Λύση:

i) $$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y = \frac{2y+1}{2}$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{\frac{2y+1}{2}} = \frac{2x+2y}{2y+1}$$

$0<x<1$, $0<y<1$.

$$f_{Y|X}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{\frac{2x+1}{2}} = \frac{2x+2y}{2x+1}$$

ii) $$P\left(X > \tfrac{2}{3} \mid Y < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X > \frac{2}{3}, Y < \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y < \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_{2/3}^{1}\int_0^{1/2} f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^{1/2} f_Y(y)\,dy} =$$

$$= \frac{\int_{2/3}^{1}\int_0^{1/2} (x+y)\,dy\,dx}{\int_0^{1/2} \frac{2y+1}{2}\,dy} = \frac{\int_{2/3}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1/2} dx}{\left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1/2}} =$$

$$=\frac{\int_{2/3}^{1}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right]dx}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}x\right]_{2/3}^{1}}{\frac{3}{8}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{4}{36}-\frac{2}{24}}{\frac{3}{8}}=\frac{13}{72}$$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\ /Y=y\right)=\int_{1/2}^{1}f_{X/Y}(x,y)\,dx=\int_{1/2}^{1}\frac{2x+2y}{2y+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2y+1}\int_{1/2}^{1}(2x+2y)\,dx=\frac{1}{2y+1}\left[x^2+2yx\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2y+1}\left[1+2y-\frac{1}{4}-\cancel{2}y\frac{1}{\cancel{2}}\right]=\frac{1}{2y+1}\left[\frac{3}{4}+y\right]=\frac{4y+3}{4(2y+1)}$$

$$P\left(Y<\frac{1}{2}\ /X=\frac{3}{4}\right)=\int_{0}^{1/2}f_{Y/X=\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4},y\right)dy=\int_{0}^{1/2}\frac{2\frac{3}{4}+2y}{2\frac{3}{4}+1}\,dy=$$

$$=\int_{0}^{1/2}\frac{\frac{3}{2}+2y}{\frac{5}{2}}\,dy=\frac{2}{5}\int_{0}^{1/2}\left(\frac{3}{2}+2y\right)dy=\frac{2}{5}\left[\frac{3}{2}y+y^2\right]_{0}^{1/2}=$$

$$=\frac{2}{5}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]=\frac{2}{5}$$

Άσκηση: Έστω ότι η από κοινού σ.π.π. δίνεται από τον τύπο:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{12}{35(x+y)} & , x=0,1,2 \quad , y=1,2 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της Y.

ii) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(Y>1 / X<2)$ και $P(Y<2 / X=x)$.

Λύση:

i) $$p_X(x) = \sum_{y=1}^{2} p(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{12}{35(x+y)} = \frac{12}{35(x+1)} + \frac{12}{35(x+2)} =$$

$$= \frac{12(x+2+x+1)}{35(x+1)(x+2)} = \frac{12(2x+3)}{35(x+1)(x+2)} = \frac{24x+36}{35(x+1)(x+2)}.$$

Άρα, $$p_{Y|X}(x,y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{12}{35(x+y)}}{\frac{24x+36}{35(x+1)(x+2)}} =$$

$$= \frac{12\cdot 35\cdot(x+1)(x+2)}{35\cdot(x+y)\cdot 12(2x+3)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+y)(2x+3)} \quad , x=0,1,2 \quad , y=1,2.$$

ii) $$P(Y>1 / X<2) = \frac{P(Y>1, X<2)}{P(X<2)} = \frac{\sum_{y=2}^{2}\sum_{x=0}^{1} p(x,y)}{\sum_{x=0}^{1} p_X(x)} =$$

$$= \frac{p(0,2)+p(1,2)}{p_X(0)+p_X(1)} = \frac{\frac{12}{70}+\frac{12}{105}}{\frac{36}{70}+\frac{60}{210}} = \frac{5}{14}$$

$$P(Y<2 \,/\, X=x) = \sum_{y=1}^{1} P_{Y|X}(x,y) = \sum_{y=1}^{1} \frac{(x+1)(x+2)}{(2x+3)(x+y)} = \frac{x+2}{2x+3} \;\blacksquare.$$