

Άσκηση: Έστω η από κοινού β.η.π. των X, Y είναι:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

Να βρεθούν: $f_{X|Y}(x|y)$ και η πιθανότητα $P\{X > 1/Y = y\}$

Λύση:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$\text{Υπολογίζω } f_Y(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} dx = \frac{e^{-y}}{y} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx =$$
$$= \frac{e^{-y}}{y} [-y e^{-\frac{x}{y}}]_0^{+\infty} = -e^{-y} [e^{-\frac{x}{y}}]_0^{+\infty} = -e^{-y} (\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{y}} - e^0) =$$

$$= -e^{-y} (0 - 1) = e^{-y}, \quad 0 < y < \infty.$$

$$\text{Ογότε } f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}}{e^{-y}} = \frac{e^{-y} e^{-\frac{x}{y}}}{e^{-y} y} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}, \quad 0 < x < \infty.$$

$$P\{X > 1/Y = y\} = \int_x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx =$$

$$= \frac{1}{y} [-y e^{-\frac{x}{y}}]_1^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{y}} + e^{-\frac{1}{y}} = e^{-\frac{1}{y}}.$$

Λύση: Η από κοινού β.π.π. των τ.μ. X & Y είναι:

$$f(x,y) = A(6x^2 + 3xy), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

i) Υπολογίστε την σταθερά A .

Λύση:

Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) = 1 \Rightarrow \int_0^1 \int_0^2 A(6x^2 + 3xy) dy dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 A \left[6x^2 y + 3x \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 A(12x^2 + 6x) dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \left[12 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow A[4 + 3] = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{7}.$$

ii) Υπολογίστε την $f_X(x)$.

Λύση:

$$f_X(x) = \int_0^2 f(x,y) dy = \int_0^2 \frac{1}{7} (6x^2 + 3xy) dy = \frac{1}{7} \left[6x^2 y + 3x \frac{y^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{7} [12x^2 + 6x], \quad 0 < x < 1.$$

iii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\{X < Y\}$.

Λύση:

$$\bullet f(x,y) = \frac{1}{7} (6x^2 + 3xy)$$

$$\bullet f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{7} (6x^2 + 3xy) dx = \int_0^1 \frac{1}{7} \left[6 \frac{x^3}{3} + 3y \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{7} \left(2 + \frac{3}{2}y \right), \quad 0 < y < 2$$

$$\bullet F_{X|Y}(y,y) = P\{X < y / Y=y\} = \int_0^y f_{X|Y}(x|y) dx = \int_0^y \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx =$$

$$= \int_0^y \frac{\frac{1}{7} (6x^2 + 3xy)}{\frac{1}{7} (2 + \frac{3}{2}y)} dx = \int_0^y \frac{3x(2x+y)}{2 + \frac{3}{2}y} dx = \int_0^y \frac{6x(2x+y)}{4+3y} dx =$$

$$= \frac{6}{4+3y} \int_0^y (2x^2 + xy) dx = \frac{6}{4+3y} \left[2 \frac{x^3}{3} + y \frac{x^2}{2} \right]_0^y = \frac{6}{4+3y} \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{y^3}{2} \right] =$$

$$= \frac{6}{4+3y} \cdot \frac{7y^3}{6} = \frac{7y^3}{4+3y}, \quad \text{όταν } 0 < y < 1.$$

και :

$$F_{X|Y}(y,y) = \int_0^1 \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx = \int_0^1 \frac{6x(2x+y)}{4+3y} dx = \frac{6}{4+3y} \left[2\frac{x^3}{3} + y\frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{4+3y} \left[\frac{2}{3} + \frac{y}{2} \right] = \frac{6}{4+3y} \cdot \frac{4+3y}{6} = 1, \quad \text{όταν } 1 \leq y \leq 2$$

Ανταδρά:

$$F_{X|Y}(y,y) = \begin{cases} \frac{7y^3}{4+3y} & , 0 < y < 1 \\ 1 & , 1 \leq y < 2 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε: } P\{X < Y\} = \int_0^2 P\{X < Y / Y=y\} \cdot f_Y(y) dy =$$

$$= \int_0^2 P\{X < y / Y=y\} \cdot \frac{1}{7} \left(2 + \frac{3}{2}y\right) dy =$$

$$= \int_0^2 F_{X|Y}(y/y) \cdot \frac{1}{7} \left(2 + \frac{3}{2}y\right) dy =$$

$$= \int_0^1 F_{X|Y}(y/y) \cdot \frac{1}{7} \left(2 + \frac{3}{2}y\right) dy + \int_1^2 F_{X|Y}(y/y) \cdot \frac{1}{7} \left(2 + \frac{3}{2}y\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{7y^3}{4+3y} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4+3y}{2} dy + \int_1^2 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4+3y}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{14} \left[4y + 3\frac{y^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{14} \left[8+6 - 4 - \frac{3}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{14} \cdot \frac{17}{2} = \frac{1}{8} + \frac{17}{28} = \frac{7}{56} + \frac{34}{56} = \frac{41}{56}$$

iv) Υπολογίστε τη δευτερεύουσα μέση τιμή $E[Y/X=0,2]$.

Λύση:

$$E[Y/X=x] = \frac{\int_0^2 y \cdot f(x,y) dy}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{7} \int_0^2 y(6x^2+3xy) dy}{\frac{1}{7} (12x^2+6x)} =$$

$$= \frac{\left[6x^2 \frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^3}{3} \right]_0^2}{12x^2+6x} = \frac{12x^2+8x}{12x^2+6x} = \frac{4x(3x+2)}{6x(2x+1)} =$$

$$= \frac{2(3x+2)}{3(2x+1)}$$

$$\text{Άρα, } E[Y/X=0,2] = \frac{2(3 \cdot 0,2+2)}{3(2 \cdot 0,2+1)} = \frac{2 \cdot 2,6}{3 \cdot 1,4} = \frac{5,2}{4,2}$$

Άσκηση: Έστω X, Y δύο διακριτές τ.μ. με από κοινού β.π.π.

ως εξής:

$y \backslash x$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{18}$
3	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

ii) Υπολογίστε τις περιθωρικές βαρύνσεις των X, Y .

Λύση:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p(x,y) = p(x,1) + p(x,2) + p(x,3) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{2}{9}, & \text{όταν } x=1 \\ \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, & \text{όταν } x=2 \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}, & \text{όταν } x=3 \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p(x,y) = p(1,y) + p(2,y) + p(3,y) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}, & \text{όταν } y=1 \\ \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{18} = \frac{3}{18}, & \text{όταν } y=2 \\ 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}, & \text{όταν } y=3 \end{cases}$$

$$\text{Παρατηρώ ότι: } \left. \begin{aligned} p_X(1) \cdot p_Y(1) &= \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{81} \\ p(1,1) &= \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} p(1,1) \neq p_X(1) \cdot p_Y(1)$$

Άρα, γενικά $p_X(x) \cdot p_Y(y) \neq p(x,y)$. Επομένως X, Y εξαρτημένες τ.μ.

ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X/Y=1]$.

Λύση:

$$E[X/Y=1] = \sum_{x=1}^3 x \cdot P_{X/Y=1}(x,1) = 1 \cdot P(X=1/Y=1) + 2 \cdot P(X=2/Y=1) + 3 \cdot P(X=3/Y=1) =$$

$$= 1 \cdot \frac{P(1,1)}{P_Y(1)} + 2 \cdot \frac{P(2,1)}{P_Y(1)} + 3 \cdot \frac{P(3,1)}{P_Y(1)} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} + 2 \cdot \frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{9}} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2 \cdot 3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \blacksquare$$

Λόγηση: X, Y διακριτές τ.μ. με τιμές ± 1 και -1 .

Ισχύει $E[X] = E[Y] = 0$.

Ν.Σ.Ο. $p(1,1) = p(-1,-1)$ και $p(1,-1) = p(-1,1)$.

Επιπλέον να θεωρήσει τη διασπορά $\text{Var}(X)$.

Λύση:

$p(x,y) = P(X=x, Y=y)$. Έστω η από κοινού β.π.π. ως εξής:

$Y \backslash X$	1	-1
1	λ_1	λ_2
-1	λ_3	λ_4

Τότε: $p_X(x) = \sum_{y=-1,1} p(x,y) = p(x,-1) + p(x,1) =$

$$= \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_4, & x = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_3, & x = 1. \end{cases}$$

Επίσης, $p_Y(y) = \sum_{x=-1,1} p(x,y) = p(-1,y) + p(1,y) = \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4, & y = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2, & y = 1 \end{cases}$

Οπότε: $E[X] = 0 \Rightarrow \sum_{x=-1,1} x \cdot p_X(x) = 0 \Rightarrow -(\lambda_2 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4 \quad (1)$$

Επίσης: $E[Y] = 0 \Rightarrow \sum_{y=-1,1} y \cdot p_Y(y) = 0 \Rightarrow -(\lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \quad (2)$$

Όμως $\sum_{x,y} p(x,y) = 1 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad (3)$

Από (1), (2), (3) έχω ότι: $\lambda_1 + \lambda_3 = \frac{1}{2} \quad (I)$

$$\lambda_2 + \lambda_4 = \frac{1}{2} \quad (II)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad (III)$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{2} \quad (IV)$$

Από (I) - (III) $\Rightarrow \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow p(-1,1) = p(1,-1)$

Από (I) - (IV) $\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_4 \Rightarrow p(1,1) = p(-1,-1)$

Επίσης έχουμε: $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

Εξάρα:
$$E[X^2] = \sum_{x=-1,1} x^2 \cdot P_X(x) = (-1)^2 \cdot (\lambda_2 + \lambda_4) + 1^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_3) =$$

$$= \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_1 + \lambda_3 = 1.$$

Άρα, $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - 0 = 1.$ ■

Άσκηση: Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

i) Υπολογίστε τις περιθώριες συναρτήσεις των X, Y .

Λύση:

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 (x + y) dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 (x + y) dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

$$\text{Οπότε } f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \neq x + y = f(x, y)$$

Άρα, X, Y εξαρτημένες τ.μ.

ii) Υπολογίστε την πιθανότητα: $P\{X < Y\}$

Λύση:

$$f_{X|Y}(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x + y}{y + \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } F_{X|Y}(y/Y=y) &= \int_0^y \frac{x + y}{y + \frac{1}{2}} dx = \frac{1}{y + \frac{1}{2}} \int_0^y (x + y) dx = \\ &= \frac{1}{y + \frac{1}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^y = \frac{1}{y + \frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2} + y^2 \right] = \frac{2}{2y + 1} \cdot \frac{3y^2}{2} = \frac{3y^2}{2y + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } P\{X < Y\} = \int_0^1 F_{X|Y}(y/Y=y) \cdot f_Y(y) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3y^2}{2y + 1} \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{3y^2}{2(2y + 1)} + \frac{3y^3}{2y + 1} \right) dy = \int_0^1 \frac{3y^2 + 6y^3}{2(2y + 1)} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3y^2(1 + 2y)}{2(2y + 1)} dy = \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{3}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Άσκηση: Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τ.μ. συνεχίς με την ίδια συνεχή κατανομή $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x > 0$.
Υπολογίστε την πιθανότητα $P\{X < Y\}$.

Λύση:

Όταν X, Y ανεξάρτητες, γνωρίζω ότι:

$$P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y) \cdot f_Y(y) dy.$$

Οπότε, εδώ έχω:

$$P\{X < Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y) \cdot f_Y(y) dy \quad \underline{\underline{F_X = F_Y}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y) \cdot f_Y(y) dy = (*)$$

$$\text{*Θέτω } F(y) = u \Rightarrow F'(y) dy = du \Rightarrow f_Y(y) dy = du$$

και όταν $y \rightarrow -\infty$, τότε $u \rightarrow 0$

$y \rightarrow +\infty$, τότε $y \rightarrow 1$

Οπότε, η (*) γίνεται:

$$P\{X < Y\} = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$