

Διαδικασία Poisson

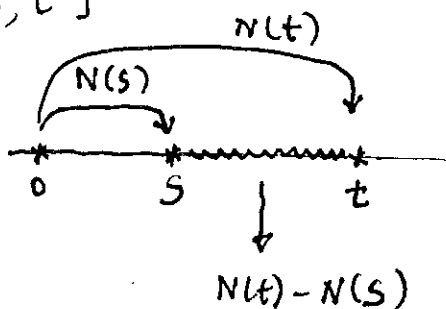
Στοχαστική Διαδικασία: $\{X(t), t \in T\}$ είναι μια συλλογή από τ.μ. Δηλ., για κάθε: $t \in T$, η $X(t)$ είναι μια τ.μ. ($t = \text{χρόνος}$, $X(t) = \text{κατάσταση της διαδικασίας στον χρόνο } t$).

Το σύνολο T $\begin{cases} \rightarrow \text{Διακριτό} \rightarrow \text{Διαδικασία Διακριτού χρόνου} \\ \text{ή} \\ \rightarrow \text{Συνεχές} \rightarrow \text{Διαδικασία Συνεχούς χρόνου.} \end{cases}$

Διαδικασία Καταμέτρησης: $\{N(t), t \geq 0\}$, αν $N(t)$ αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό "γεγονότων" που έχουν συμβεί έως τη χρονική στιγμή t .

Ιδιότητες:

- $N(t) \geq 0$
- $N(t) \in \mathbb{Z}$
- Αν $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$
- Για $s < t$, το $N(t) - N(s)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί στο διάστημα $(s, t]$



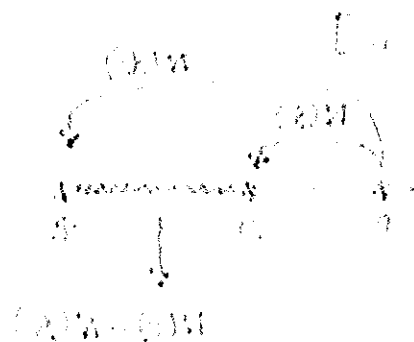
Διαδικασία Poisson: ^{απειρίστη}Μία ^{συνεχής}διαδικασία καταμέτρησης

$\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται Διαδικασία Poisson με
 αριθμό $\lambda > 0$, εάν:

990000 120000 100000 80000 60000 40000 20000 0

1. $N(0) = 0$.
2. Παρουσίαξη ανεξ. προσαυγήτως (δηλ. οι αριθμοί των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα σε μη επικαλυπτόμενα χρον. διαστήματα είναι ανεξάρτητοι).
3. Ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt , δηλ:

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Γενικά:

Στοχαστικές Διαδικασίες

Άφιξης

περίστατικά που έχουν
χαρακτήρα "άφιξης".

π.χ. → • άφιξη τηλεμάτων
ένα δίκτυο

• αμορφές πελάτη σε
κατάστημα

Bernoulli

(διακριτός χρόνος)

Poisson

(συνέχης χρόνος)

Μαρκov

παράστα που εξελίσσονται
επὶ χρόνο και η
μελλοντική εξέλιξη
παρουσιάζει εξάρτηση
απὸ το παρελθόν.

π.χ. → Η πιθανότητα του
επόμενου βήματος εξαρτάται
απὸ την παρούσα
κατάσταση

(το καίριο πείραμα
βοιτρεχού ανατρεβά σε
3 βράδια)

Άσκηση: Πελάτες καταβάλλουν σ' ένα μαχαζι σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες ανά ώρα.

i) Αν ο ιδιοκτήτης του μαχαζιού δεληθεί να το κλείσει για λίγη ώρα, πόσο χρόνο μπορεί να λείψει ώστε να μην μένουν όρδευση πελατών που θα περιμένουν και θα βρουν το μαχαζι κλειστό να είναι μικρότερος από 5;

ii) Αν λείψει για 15 λεπτά, ποιά η πιθανότητα να θα χάσει ανεπίτρευστα 3 πελάτες;

iii) Αν κλείσει για 45 λεπτά, ποιά η πιθανότητα να χάσει το πολύ 2 πελάτες;

Λύση:

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες/ώρα.

Τότε:
$$P(N(t) = x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-10t} \frac{(10t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

i) Αναζητώ το χρόνο t π.ω.: το χρονικό διάστημα $(s, s+t)$ ο μέσος όρος των πελατών που θα φθάσουν

στο μαγαζί να είναι < 5 .

Δηλ. φάχνω t για το οποίο:

$$E[N(s+t) - N(s)] < 5 \Rightarrow E[N(t)] < 5 \Rightarrow \lambda \cdot t < 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow t < \frac{5}{\lambda} \Rightarrow t < \frac{5}{10} \Rightarrow t < \frac{1}{2}.$$

Άρα, το μαγαζί μπορεί να γίνει καθατό σε διάστημα μικρότερο της μισής ώρας.

ii) $P(\{3 \text{ πελάτες σε } 15 \text{ λεπτά}\})$ είναι η πιθανότητα να έρθουν

$$= P(\{3 \text{ πελάτες στο χρον. διάστημα } (s, s + \frac{1}{4})\}) =$$

$$= P(N(s + \frac{1}{4}) - N(s) = 3) = P(N(\frac{1}{4}) = 3) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{10}{4}} \left(\frac{10}{4}\right)^3}{3!} = e^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{6} = \frac{125}{48} \cdot e^{-\frac{5}{2}}$$

iii) $P(\{\text{ω πολύ } 2 \text{ πελάτες σε } 45 \text{ λεπτά}\})$ είναι η

$$= P(\{\text{ω πολύ } 2 \text{ πελάτες στο } (s, s + \frac{3}{4})\}) =$$

$$= P(N(s + \frac{3}{4}) - N(s) \leq 2) = P(N(\frac{3}{4}) \leq 2) =$$

$$= P(N(\frac{3}{4}) = 0) + P(N(\frac{3}{4}) = 1) + P(N(\frac{3}{4}) = 2) =$$

$$= \sum_{x=0}^2 P(N(\frac{3}{4}) = x) = 1 - e^{-\frac{30}{4}} \left(\frac{30}{4} \right)^0 + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4} \right)^1}{1!} + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4} \right)^2}{2!} = \dots$$

$$= e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4} \right)^0}{0!} + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4} \right)^1}{1!} + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4} \right)^2}{2!} = \dots$$

Άσκηση: Υποθέστε ότι καλή σας φωνάει ένα τηλεφωνικό κέντρο σύμφωνα με μια στοκαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό 3 καλήs ανά λεπτό.

i) Έστω T ο χρόνος μεταξύ 2^{ης} και 3^{ης} καλήs.

Ποιά είναι η κατανομή του T ;

ii) Ποιά η πιθανότητα ακριβώς 4 καλήs να φθάσουν τα επόμενα 2 λεπτά;

iii) Ποιά η πιθανότητα η επόμενη καλή να φτάσει μετά στα επόμενα 20 δευτερόλεπτα και η δεύτερη καλή (μετά από αυτή) ύστερα από τουλάχιστον 60 sec;

iv) Δοθέντος ότι έχουμε ακριβώς 5 καλήs τα τελευταία 2 λεπτά, ποια η πιθανότητα οι όλες είχαν φτάσει τα τελευταία λεπτό;

Λύση:

Έστω X τ.μ. που μετρά τις καλήs στο τηλ. κέντρο.

$X \sim \text{Poisson}(3)$, $\lambda = 3$ καλήs / min.

$$\text{Άρα, } P(N(t)=x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-3t} \frac{(3t)^x}{x!}, x=0,1,2,\dots$$

i) Οι ενδιαφέροντες χρόνοι μεταξύ αφίξεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ .

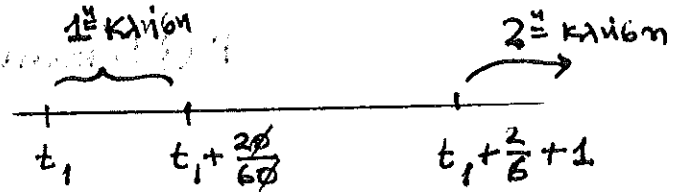
$$\text{Δηλ. } T \sim \text{Exp}(3)$$

$$f(t) = \begin{cases} 3e^{-3t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{και } E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ii) } P(N(2)=4) = e^{-3 \cdot 2} \frac{(3 \cdot 2)^4}{4!} = e^{-6} \frac{3^4 \cdot 2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 27 \cdot e^{-6}$$

iii)

$$P(\{1 \text{ κλήση στο } [t_1, t_1 + \frac{1}{3}]\})$$



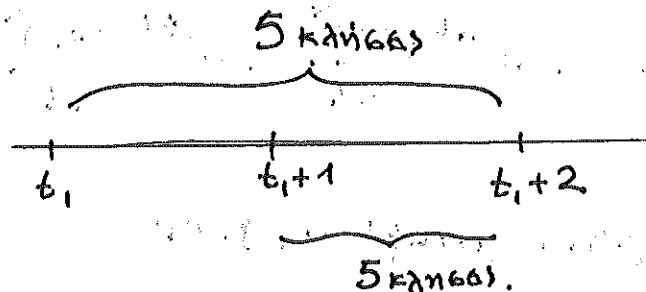
$$P(\{1 \text{ κλήση στο } [t_1, t_1 + \frac{1}{3}]\}, \{1 \text{ κλήση στο } [t_1 + \frac{1}{3} + 1]\}) =$$

$$= P\{1 \text{ κλήση στο } (0, \frac{1}{3})\}, \{1 \text{ κλήση στο } (0, 1)\}\} =$$

$$= P(N(\frac{1}{3})=1) \cdot P(N(1)=1) =$$

$$= e^{-3 \cdot \frac{1}{3}} \frac{(3 \cdot \frac{1}{3})^1}{1!} \cdot e^{-3} \frac{3^1}{1!} = e^{-1} \cdot e^{-3} \cdot 3 = 3e^{-4}$$

iv)



$$P(\{5 \text{ κανόνας στο } [t_{i+1}, t_{i+2}]\} / \{5 \text{ κανόνας στο } [t_i, t_{i+2}]\}) =$$

$$= \frac{P(\{5 \text{ κανόνας στο } [t_{i+1}, t_{i+2}]\}, \{5 \text{ κανόνας στο } [t_i, t_{i+2}]\})}{P(\{5 \text{ κανόνας στο } (t_i, t_{i+2})\})} =$$

$$= \frac{P(\{5 \text{ κανόνας στο } (t_{i+1}, t_{i+2})\}, \{0 \text{ κανόνας στο } (t_i, t_{i+1})\})}{P(\{5 \text{ κανόνας στο } (t_i, t_{i+2})\})} =$$

$$= \frac{P(N(1)=5) \cdot P(N(1)=0)}{P(N(2)=5)} = \frac{e^{-3} \frac{3^5}{5!} e^{-3} \frac{3^0}{0!}}{e^{-6} \frac{6^5}{5!}} =$$

$$= \frac{e^{-3} \cdot e^{-3} \frac{3^5}{5!}}{e^{-6} \frac{6^5}{5!}} = \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Λόγηση: Σ' ένα αβύρμαχο δίκτυο παρατηρούνται παράνομα σήματα που παρενοχλούν τη συνομιλία δύο ομιλητών. Η εμφάνιση των σήμάτων αποτελεί μία διαδικασία Poisson με ρυθμό 0,1 σήματα το λεπτό.

- i) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην υπάρχουν παράνομα σήματα στα πρώτα 2 λεπτά συνομιλίας.
- ii) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ένα παράνομο σήμα σε 2 λεπτά συνομιλίας.
- iii) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 2 παράνομα σήματα στα πρώτα 3 λεπτά συνομιλίας.
- iv) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 3 παράνομα σήματα στα πρώτα 2 λεπτά και 5 παράνομα σήματα στα πρώτα 3 λεπτά συνομιλίας.
- v) Αν στα πρώτα 2 λεπτά δεν παρουσιάζεται κανένα παράνομο σήμα, να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί ακριβώς ένα παράνομο σήμα στο αμέσως επόμενο λεπτό της συνομιλίας.
- vi) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν από 1 έως 3 παράνομα σήματα σε 1 λεπτό συνομιλίας.

Λύση:

Έστω μια διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, που μετράει το πλήθος των παράνομων σήμάτων που φτάνουν στο δίκτυο, σε ορισμένο χρονικό διάστημα με ρυθμό $\lambda = 0,1$ σήματα/λεπτό.

Τότε $P(N(t)=x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\frac{t}{10}} \frac{\left(\frac{t}{10}\right)^x}{x!}, x=0, 1, 2, \dots$

i) $P(\{0 \text{ κήματα στο } [0, 2]\}) = P(N(2)=0) =$

$$= e^{-\frac{2}{10}} \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{1}{5}} \approx 0,8187$$

ii) $P(\{1 \text{ κήμα στο } [t_0, t_0+2]\}) = P(N(t_0+2)-N(t_0)=1) =$

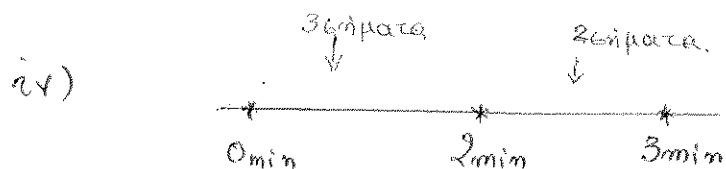
$$= P(N(2)=1) = e^{-\frac{2}{10}} \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^1}{1!} = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}}$$

iii) $P(\{0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ κήματα στο χ. διαστ. } [0, 3]\}) =$

$$= P(N(3) \leq 2) = \sum_{x=0}^2 P(N(3)=x) =$$

$$= P(N(3)=0) + P(N(3)=1) + P(N(3)=2) =$$

$$= e^{-\frac{3}{10}} \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^0}{0!} + e^{-\frac{3}{10}} \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^1}{1!} + e^{-\frac{3}{10}} \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^2}{2!}$$



$$P(\{3 \text{ κήματα στο } [0, 2]\}, \{5 \text{ κήματα στο } [0, 3]\}) =$$

$$= P(\{3 \text{ κήματα στο } [0, 2]\}, \{2 \text{ κήματα στο } [2, 3]\}) =$$

$$= P(N(2)=3) \cdot P(N(3)-N(2)=2) =$$

$$= P(N(2)=3) \cdot P(N(1)=2) =$$

$$= e^{-\frac{2}{10}} \frac{(\frac{2}{10})^3}{3!} \cdot e^{-\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10})^2}{2!}$$

$$v) P(\{1 \text{ βήματα στο } [2,3]\} / \{0 \text{ βήματα στο } [0,2]\}) =$$

$$= \frac{P(\{1 \text{ βήματα στο } [2,3]\}, \{0 \text{ βήματα στο } [0,2]\})}{P(\{0 \text{ βήματα στο } [0,2]\})} =$$

$$= \frac{P(\{1 \text{ βήματα στο } [2,3]\}) \cdot P(\{0 \text{ βήματα στο } [0,2]\})}{P(\{0 \text{ βήματα στο } [0,2]\})} =$$

$$= P(\{1 \text{ βήματα στο } [2,3]\}) =$$

$$= P(N(3)-N(2)=1) =$$

$$= P(N(1)=1) =$$

$$= e^{-\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10})^1}{1!} = \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}}$$

$$v_2) \quad P(\{\text{ano } 1 \text{ eus } 3 \text{ guitarra oco } [t_1, t_1+1]\}) =$$

$$= P(\{1 \leq N(t_1+1) - N(t_1) \leq 3\}) =$$

$$= P(\{1 \leq N(1) \leq 3\}) =$$

$$= \sum_{x=1}^3 P(N(1)=x) = P(N(1)=1) + P(N(1)=2) + P(N(1)=3) =$$

$$= e^{-\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10})^1}{1!} + e^{-\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10})^2}{2!} + e^{-\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10})^3}{3!}$$