

Άσκηση: Σε ένα υπολογιστικό κέντρο οι βλάβες στο υαίκο συμβαίνουν τυχαία στον χρόνο. Η εμφάνιση βλαβών είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 2,4$ βλάβες/ημέρα

α) Ποιά η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία βλάβη μέσα στις επόμενες 12 ώρες;

Απάντηση:

$$P(N(t) = x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-2,4t} \frac{(2,4t)^x}{x!}$$

$$P(N(\frac{1}{2}) = 1) = e^{-2,4 \cdot \frac{1}{2}} \frac{(2,4 \cdot \frac{1}{2})^1}{1!} = e^{-1,2} \cdot 1,2.$$

β) Δοθέντος ότι είχαμε 2 βλάβες μέσα στην ημέρα, ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είχαν τις πρώτες 12 ώρες;

Απάντηση:

$$P(\{2 \text{ βλάβες στο } [0, 12h] / \{2 \text{ βλάβες στο } [0, 24h]\}) =$$

$$= \frac{P(\{2 \text{ βλάβες στο } [0, 12h]\}, \{2 \text{ βλάβες στο } [0, 24h]\})}{P(\{2 \text{ βλάβες στο } [0, 24h]\})} =$$

$$= \frac{P(\{2 \text{ βλάβες στο } [0, 12h]\}) \cdot P(\{0 \text{ βλάβες στο } [12, 24]\})}{P(\{2 \text{ βλάβες στο } [0, 24h]\})} =$$

$$= \frac{e^{-2,4 \cdot \frac{1}{2}} \frac{(2,4 \cdot \frac{1}{2})^2}{2!} \cdot e^{-2,4 \cdot \frac{1}{2}} \frac{(2,4 \cdot \frac{1}{2})^0}{0!}}{e^{-2,4 \cdot 1} \frac{(2,4 \cdot 1)^2}{2!}} =$$

$$= \frac{(e^{-2,4 \cdot \frac{1}{2}})^2 \cdot \frac{2,4^2}{8}}{e^{-2,4} \frac{2,4^2}{2}} = \frac{e^{-2,4} \frac{2,4^2}{8}}{e^{-2,4} \frac{2,4^2}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

γ) Μία ώρα τρέχει βλάβη οφείλεται στην τροφοδοσία ρεύματος από τη ΔΕΗ. Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε το πολύ δύο βλάβες λόγω ρεύματος στα επόμενα τρία 24ωρα.

Απάντηση:

$$\begin{array}{l} \text{Σε } 1 \text{ ημέρα έχουμε } 2,4 \text{ βλάβες.} \\ \times \text{ ημέρες} \qquad \qquad \qquad 3 \text{ βλάβες} \\ \hline x = \frac{3}{2,4} \text{ ημέρες.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Σε } \frac{3}{2,4} \text{ ημέρες έχουμε } 3 \text{ βλάβες εκ των οποίων } 1 \text{ λόγω ΔΕΗ} \\ \qquad \qquad \qquad 1 \text{ ημέρα} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \gamma; \end{array}$$

$$\gamma = \frac{2,4}{3} = 0,8 \text{ βλάβες λόγω ΔΕΗ ανά ημέρα.}$$

Άρα $\lambda' = 0,8$ βλάβες λόγω ΔΕΗ / ημέρα. $P(N'(t)=x) = e^{-0,8t} \frac{(0,8t)^x}{x!}$.

Ζητούμε : $P(0 \leq N' \leq 2 \text{ βλάβες λόγω ΔΕΗ στο } [0,3]) =$

$$= P(N'(3) \leq 2) = \sum_{x=0}^2 P(N'(3)=x) =$$

$$= P(N'(3)=0) + P(N'(3)=1) + P(N'(3)=2) =$$

$$= e^{-0,8 \cdot 3} \frac{(0,8 \cdot 3)^0}{0!} + e^{-0,8 \cdot 3} \frac{(0,8 \cdot 3)^1}{1!} + e^{-0,8 \cdot 3} \frac{(0,8 \cdot 3)^2}{2!} =$$

$$= e^{-0,8 \cdot 3} \left(1 + 3 \cdot 0,8 + \frac{(3 \cdot 0,8)^2}{2} \right) =$$

$$= e^{-2,4} \left(1 + 2,4 + \frac{2,4^2}{2} \right).$$

Άσκηση: Τρία διαφορετικά δρομολόγια λεωφορείων, Α, Β, Γ, περνάνε από την ίδια στάση. Οι αρίθμους ακολουθούν διαδ. Poisson με $\lambda_A = 2$, $\lambda_B = 3$, $\lambda_\Gamma = 1$ λεωφορεία / ώρα.
(οι τρεις διαδικασίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους).

α) Ποιά η πιθανότητα ακριβώς 6 λεωφορεία του δρομολογίου Α, 2 του Β 5' 1 του Γ να περάσουν από τη στάση την επόμενη 1 ώρα.

Απάντηση:

$$P(N_A(t) = x) = e^{-2t} \frac{(2t)^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots$$

$$P(N_B(t) = x) = e^{-3t} \frac{(3t)^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots$$

$$P(N_\Gamma(t) = x) = e^{-t} \frac{t^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots$$

όπου $N_i(t) :=$ το πλήθος των λεωφορείων του δρομολογίου i που περνάει από τη στάση, $i = A, B, \Gamma$. (t σε ώρες).

Οπότε, για $P(N_A(1)=1, N_B(1)=2, N_\Gamma(1)=1)$ ανεξάρτητες διαδικασίες

$$= P(N_A(1)=1) \cdot P(N_B(1)=2) \cdot P(N_\Gamma(1)=1) =$$

$$= e^{-2} \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-3} \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-1} \frac{1^1}{1!} =$$

$$= e^{-6} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = 9 \cdot e^{-6}.$$

β) Ποιά η πιθανότητα συνολικά 10 λεωφορεία να περάσουν τις επόμενες δύο ώρες;

Απάντηση:

Έστω $N(t) :=$ ο αριθμός των λεωφορείων συνολικά που περνάνε από τη στάση.

Τότε $\lambda = 2+3+1 = 6$ λεωφορεία ανά ώρα.

$$\text{και } P(N(t)=x) = e^{-6t} \frac{(6t)^x}{x!}$$

$$\text{Άρα, } P(N(2)=10) = e^{-6 \cdot 2} \frac{(6 \cdot 2)^{10}}{10!} = e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \quad .$$

Άσκηση: Ένας εργαστής αφαιρεί αντικείμενα από έναν ταινιόδρομο. Παρατηρεί ότι η πιθανότητα με την οποία ακριβώς n αντικείμενα περνούν από τη ροπή του β' ένα λεπτό δίνεται από τη σχέση:

$$P(N=n) = \frac{2^n e^{-2}}{n!}$$

Οπότε, υποθέτουμε ότι οι αφίξεις ακολουθούν μια βωχαστική διαδικασία Poisson.

Άρα, αν $N(t) :=$ ο αριθμός των αντικειμένων που περνούν από τη ροπή του σε χρόνο t ,

$$\text{τότε } P(N(t)=x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

$$\text{αφού } P(N(1)=x) = e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^x}{x!} \xrightarrow{\text{υπόθεση}} e^{-2} \frac{2^x}{x!},$$

Συμπεραίνω ότι $\lambda = 2$ αντικείμενα / λεπτό.

- α) Αν θέλησα να λείψω για λίγο, πόσο χρόνο μπορώ, ώστε ο μέγος αριθμός των αντικειμένων που θα περάσω χωρίς συλλογή να είναι μικρότερος από 5;

Απάντηση:

Αναζητώ τον χρόνο t , έτσι ώστε: βωχαστικό διάστημα $(s, s+t)$ ο μέγος όρος των αντικειμένων που δε θα συλλεχθούν να είναι < 5 .

$$\rightarrow \text{Πλ.: } E[N(s+t) - N(s)] < 5 \Rightarrow E[N(t)] < 5 \Rightarrow \lambda \cdot t < 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t < 5 \Rightarrow t < \frac{5}{2} \text{ min}$$

Άρα, μπορώ να λείψω το πολύ 2,5 min.

β) Αν λείψει για 2 λεπτά, ποιά η πιθανότητα να χάσει ακριβώς 3 αντικείμενα;

Απάντηση:

$$P(N(2)=3) = e^{-2 \cdot 2} \frac{(2 \cdot 2)^3}{3!} = e^{-4} \frac{4^3}{3!} = e^{-4} \frac{64}{6} = e^{-4} \frac{32}{3}.$$

γ) Αν λείψει για 2 λεπτά, ποιά η πιθανότητα να χάσει ακριβώς 2 αντικείμενα στο πρώτο λεπτό και 1 αντικείμενο στο δεύτερο λεπτό;

Απάντηση:

$$\text{Ζητώ } P(\{2 \text{ αντικείμενα στο } [0,1]\}, \{1 \text{ αντικείμενο στο } [1,2]\}) =$$

$$= P(N(1)=2) \cdot P(N(1)=1) =$$

$$= e^{-2 \cdot 1} \frac{(2 \cdot 1)^2}{2!} \cdot e^{-2 \cdot 1} \frac{(2 \cdot 1)^1}{1!} =$$

$$= (e^{-2})^2 \cdot \frac{2^3}{2} = 4e^{-4}.$$

Άσκηση: Δύο πομποί Α και Β στέλνουν μηνύματα ε'ναν κοινό δέκτη σύμφωνα με δύο ανεξ. σταχ. διαδ. Poisson με λ_A και λ_B συμβαδ. αντίστοιχα. Ο αριθμός των λέξεων σε κάθε μήνυμα είναι μία τ.μ. W με β.π.π.:

$$P_W(w) = \begin{cases} \frac{2}{6}, & w=1 \\ \frac{3}{6}, & w=2 \\ \frac{1}{6}, & w=3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

α) Ποιά η πιθανότητα συνοχικά 9 μηνύματα να λαμβάνονται στον δέκτη σε χρονικό διάστημα t ;

Απάντηση:

Στον δέκτη φτάνουν μηνύματα με συμβαδ. $\lambda_A + \lambda_B$.

Επομένως, αν $N(t) :=$ ο αριθμός των μηνυμάτων που φτάνουν στον δέκτη και από τους δύο πομπούς Α & Β

$$\text{τότε } P(N(t)=x) = e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t} \frac{[(\lambda_A+\lambda_B)t]^x}{x!}$$

$$\text{Οπότε } P(N(t)=9) = e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t} \frac{[(\lambda_A+\lambda_B)t]^9}{9!}.$$

β) Έστω X ο χρόνος από τη στιγμή $t=0$ μέχρι ο δέκτης να λάβει 8 μηνύματα μήκους 3 από τον Α. Ποιά η μέση τιμή του X ;

Απάντηση:

Οι αρίθμ. μηνυμάτων από τον πομπό Α που είναι μήκους 3, είναι σταχ. Poisson με $\lambda = \lambda_A \cdot p(3) = \frac{1}{6} \lambda_A$

Οι ενδιαμέσ. χρόνοι μεταξύ αρίθμ. ακολουθούν Εκθετική κατανομή.

$$\text{Οπότε, } E[X] = 8 \cdot \frac{1}{\lambda} = 8 \cdot \frac{6}{\lambda_A} = \frac{48}{\lambda_A}$$

(ο μέσος χρόνος για κάθε αρίθμ. είναι $\frac{1}{\lambda}$. Θέσουμε ο δέκτης να λάβει 8 μηνύματα, άρα ο συνολικός μέσος χρόνος θα είναι $8 \cdot \frac{1}{\lambda}$) ■.

Άσκηση: Έστω ότι επισκέπτες μπαίνουν σε ένα μουσείο σύμφωνα με μια σταochαστική διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda = 30$ άνθρωποι/ώρα. Οι επισκέπτες είναι 40% άνδρες και 60% γυναίκες.

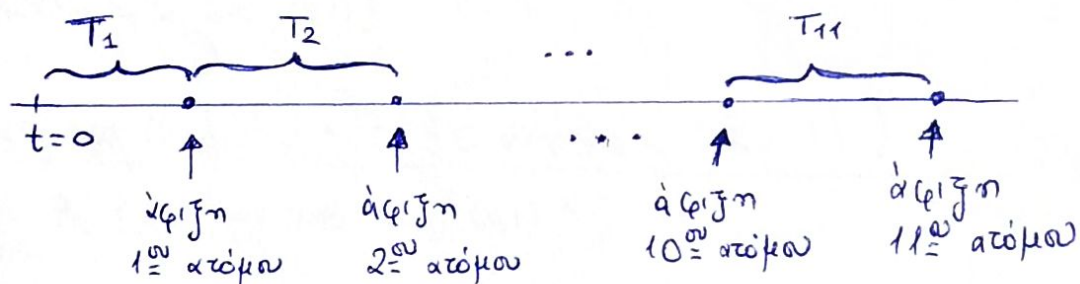
α) Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του δέκατου και του ενδέκατου ατόμου να ξεπεράσει τη μισή ώρα.

Απάντηση:

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία Poisson που μετρά το πλήθος των επισκεπτών στο μουσείο με παράμετρο $\lambda = 30$ άτομα/ώρα.

Τότε: $P(N(t) = x) = e^{-30t} \frac{(30t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$

Έστω $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία των ενδιάμεσων χρόνων, όπου T_i ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της άφιξης του $i-1$ και του i ατόμου.



Γνωρίζω ότι: Στη διαδ. Poisson, οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Έκθετική κατανομή με παράμετρο λ

$$\text{Οπότε, για } P(T_{11} > \frac{1}{2}) = 1 - P(T_{11} \leq \frac{1}{2}) =$$

$$= 1 - \int_0^{1/2} f_T(t) dt = 1 - \int_0^{1/2} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \int_0^{1/2} 30 \cdot e^{-30t} dt =$$

$$= 1 - 30 \left[-\frac{1}{30} e^{-30t} \right]_0^{1/2} = 1 + [e^{-30t}]_0^{1/2} = 1 + e^{-15} - 1 =$$

$$= e^{-15}.$$

6) Αν γνωρίζετε ότι 20 άνδρες επισκέφθηκαν το μουσείο κατά την πρώτη ώρα λειτουργίας του, ποιά η πιθανότητα και οι 20 να μπηκαν τα πρώτα 40 λεπτά;

Απάντηση:

Θεωρούμε διαδικασία Poisson $\{N_A(t), t \geq 0\}$ που μετρά το πλήθος των ανδρών που βγέρκονται στο μουσείο με:

$$\lambda_A = \lambda \cdot 40\% = 30 \cdot \frac{40}{100} = 12 \text{ άνδρες / ώρα.}$$

$$\text{Οπότε, } P(N_A(t) = x) = e^{-\lambda_A t} \frac{(\lambda_A t)^x}{x!} = e^{-12t} \frac{(12t)^x}{x!}, x=0,1,2,\dots$$

Ζητεί την πιθανότητα:

$$P(\{20 \text{ άντρες στο } (0, \frac{2}{3})\} / \{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}) =$$

$$= \frac{P(\{20 \text{ άντρες στο } (0, \frac{2}{3})\}, \{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\})}{P(\{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\})} =$$

$$= \frac{P(\{20 \text{ άντρες στο } (0, \frac{2}{3})\}) \cdot P(\{0 \text{ άντρες στο } (\frac{2}{3}, 1)\})}{P(\{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\})} =$$

$$= \frac{P(N_A(\frac{2}{3}) = 20) \cdot P(N_A(\frac{1}{3}) = 0)}{P(N_A(1) = 20)} =$$

$$= \frac{e^{-12 \cdot \frac{2}{3}} \frac{(12 \cdot \frac{2}{3})^{20}}{20!} \cdot e^{-12 \cdot \frac{1}{3}} \frac{(12 \cdot \frac{1}{3})^0}{0!}}{e^{-12 \cdot 1} \frac{(12 \cdot 1)^{20}}{20!}} =$$

$$= \frac{e^{-8} \frac{8^{20}}{20!} e^{-4}}{e^{-12} \frac{12^{20}}{20!}} =$$

$$= \frac{8^{20}}{12^{20}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}.$$

γ) Πόσοι άνθρωποι κατά μέσο όρο θα μπούν στο μουσείο μια μέρα, αν υποθέσουμε ότι παραμένει ανοικτό από τις 9:00 μέχρι τις 18:00;

Απάντηση:

Το μουσείο μένει ανοικτό 9 ώρες. Ζητάει τον μέσο όρο των επισκεπτών για $t=9$ ώρες,

$$E[N(9)] = 9 \cdot \lambda = 9 \cdot 30 = 270 \text{ επισκέπτες.}$$

δ) Ποιά η πιθανότητα ακριβώς 10 γυναίκες να επισκεφθούν το μουσείο μεταξύ 17:00 - 17:30;

Απάντηση:

Θεωρούμε τη διαδ. Poisson $\{N_T(t), t \geq 0\}$ που μετρά το πλήθος των γυναικών που έρχονται στο μουσείο.

Τότε $\lambda_T = \lambda \cdot 60\% = 30 \cdot \frac{60}{100} = 18 \text{ γυναίκες / ώρα.}$

και $P(N_T(t)=x) = e^{-18t} \frac{(18t)^x}{x!}, x=0,1,2,\dots$

Ζητάει:

$$P(N_T(\frac{1}{2})=10) = e^{-18 \cdot \frac{1}{2}} \frac{(18 \cdot \frac{1}{2})^{10}}{10!} = e^{-9} \frac{9^{10}}{10!} \quad \square.$$

Άσκηση: Η Ιωάννα έρχεται στο καθήκον δέχεται επισκέψεις φοιτητών σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 επισκέψεις ανά ημέρα. Εκτός των φοιτητών, την Ιωάννα επισκέπτονται και οι συγγενείς της σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 2 επισκέψεις την ημέρα.

α) Ποιά η πιθανότητα οι επισκέψεις να υπερβαίνουν τις 10 σε μία μέρα;

Απάντηση:

• Το πλήθος των φοιτητών ακολουθεί μια διαδ. Poisson:

$$\{N_{\phi}(t), t \geq 0\}, \lambda_{\phi} = 10 / \text{ημέρα}.$$

$$P(N_{\phi}(t) = x) = e^{-10t} \frac{(10t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

• Το πλήθος των καθηγητών ακολουθεί μια διαδ. Poisson:

$$\{N_{\kappa}(t), t \geq 0\}, \lambda_{\kappa} = 2 / \text{ημέρα}.$$

$$P(N_{\kappa}(t) = x) = e^{-2t} \frac{(2t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

• Το συνολικό πλήθος των επισκεπτιών ακολουθεί διαδ. Poisson:

$$\{N(t), t \geq 0\}, \lambda = \lambda_{\phi} + \lambda_{\kappa} = 12.$$

$$P(N(t) = x) = e^{-12t} \frac{(12t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Οπότε, ζητώ την πιθανότητα:

$$P(N(1) > 10) = 1 - P(N(1) \leq 10) = 1 - \sum_{x=0}^{10} e^{-12} \frac{(12)^x}{x!} =$$

$$= 1 - \left[e^{-12} \left(\frac{12^0}{0!} + \frac{12^1}{1!} + \dots + \frac{12^{10}}{10!} \right) \right].$$

β) Ποιά η πιθανότητα κανένας φοιτητής να μην επισκεφθεί την Ιωάννα σε διάστημα 10 ωρών;

Απάντηση:

$$P(N_{\Phi}(\frac{10}{24}) = 0) = P(N_{\Phi}(\frac{5}{12}) = 0) = e^{-10 \cdot \frac{5}{12}} \cdot \frac{(10 \cdot \frac{5}{12})^0}{0!} = e^{-\frac{25}{6}}$$

γ) Ας υποθέσουμε ότι κάθε φοιτητής που επισκέπτεται την ιστοσελίδα, πατάει τον σύνδεσμο με τις δημοσιεύσεις του καθηγητή με πιθανότητα $\frac{2}{5}$, να θρεθεί η πιθανότητα μέσα σε μία μέρα μόνο ένας φοιτητής να έχει πατήσει τον συγκεκριμένο σύνδεσμο.

Απάντηση:

Το πλήθος των φοιτητών που πατώνε τον σύνδεσμο ακολουθεί διαδικασία Poisson $\{M_{\Phi}; t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda_M = \lambda_{\Phi} \cdot \frac{2}{5} = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ φοιτητές / ημέρα.

και ισχύει: $P(M_{\Phi}(t) = x) = e^{-4t} \frac{(4t)^x}{x!}, x=0,1,2,\dots$

Ζητά την πιθανότητα:

$$P(M_{\Phi}(1) = 1) = e^{-4 \cdot 1} \frac{(4 \cdot 1)^1}{1!} = 4e^{-4} \quad \blacksquare$$