Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #6

Διαδικασία Poisson (συνέχεια...)

<u>Άσκηση:</u> Η ιστοσελίδα ενός καθηγητή δέχεται επισκέψεις φοιτητών σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 επισκέψεις ανά ημέρα. Εκτός των φοιτητών την ιστοσελίδα επισκέπτονται και οι συνάδελφοί του σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό 2 επισκέψεις την ημέρα.

i) Ποιά η πιθανότητα οι επισκέψεις να υπερβαίνουν τις 10 μία μέρα?

<u>Λύση:</u>

- Το πλήθος των φοιτητών ακολουθεί μια διαδικασία Poisson: $\{N_\phi(t),\ t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda_\phi = 10$.

  Ισχύει: $P(N_\phi(t) = x) = e^{-\lambda_\phi t}\dfrac{(\lambda_\phi t)^x}{x!} = e^{-10t}\dfrac{(10t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

- Το πλήθος των καθηγητών ακολουθεί μια διαδικασία Poisson: $\{N_k(t),\ t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda_k = 2$.

  Ισχύει: $P(N_k(t) = x) = e^{-\lambda_k t}\dfrac{(\lambda_k t)^x}{x!} = e^{-2t}\dfrac{(2t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

- Το συνολικό πλήθος επισκεπτών ακολουθεί μία διαδικασία Poisson: $\{N(t),\ t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_\phi + \lambda_k = 12$.

  Ισχύει: $P(N(t) = x) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-12t}\dfrac{(12t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

Ψάχνω την πιθανότητα:

$$P(\{>10 \text{ επισκέψεις σε μία μέρα}\}) =$$

$$= P(N(1)>10) = 1-P(N(1)\leq 10) =$$

$$= 1-\sum_{x=0}^{10} e^{-12t}\frac{(12t)^x}{x!} = 0,7576.$$

ii) Ποιά η πιθανότητα κανένας φοιτητής να μην επισκεφθεί την ιστοσελίδα σε διάστημα 10 ωρών?

<u>Λύση:</u>

Ψάχνω την πιθανότητα:

$$P(\{\text{κανένας φοιτητής στο } (s, s+\tfrac{5}{12})\}) =$$

$$= P\left(N_\phi\left(\tfrac{5}{12}\right)=0\right) = e^{-10\cdot\frac{5}{12}}\frac{\left(10\frac{5}{12}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{25}{6}}.$$

iii) Ας υποθέσουμε ότι κάθε φοιτητής που επισκέπτεται την ιστοσελίδα, πατάει το σύνδεσμο με τις δημοσιεύσεις του καθηγητή με πιθανότητα $\frac{2}{5}$, να βρεθεί η πιθανότητα μέσα σε μία μέρα μόνο ένας φοιτητής να έχει πατήσει το συγκεκριμένο σύνδεσμο.

<u>Λύση:</u>

Το πλήθος των φοιτητών που πατάνε τον σύνδεσμο ακολουθεί διαδικασία Poisson:

$$\{M_\phi(t), t\geq 0\} \text{ με ρυθμό: } \lambda_M = \lambda_\phi\cdot\frac{2}{5} = 10\cdot\frac{2}{5} = 4$$

και $P(M_\phi(t)=x) = e^{-4t}\frac{(4t)^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

Άρα, ψάχνω την πιθανότητα:

$P(\{1$ φοιτητής κατά τον σύνδεσμο σε μία μέρα$\})$ =

$= P(M_\phi(1)=1) = e^{-4}\frac{4^1}{1!} = 4e^{-4}$.

<u>Άσκηση:</u> Οι αμαξοστοιχίες του "Ηλεκτρικού" και του Μετρό φθάνουν ανεξάρτητα στο σταθμό "Μοναστηράκι" ακολουθώντας δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Κατά μέσο όρο φτάνει μία αμαξοστοιχία του "Ηλεκτρικού" κάθε 12 λεπτά και μία αμαξοστοιχία του Μετρό κάθε 8 λεπτά. Υποθέστε ότι φτάνετε στο σταθμό μια συγκεκριμένη στιγμή και παρακολουθείτε τα τρένα.

i) Ποιά η πιθανότητα να φτάσουν 2 τρένα του "Ηλεκτρικού" μέσα στα επόμενα 24 λεπτά και ακριβώς 3 τρένα του Μετρό μέσα στα επόμενα 36 λεπτά?

<u>Λύση:</u>

Οι αμαξοστοιχίες του "Ηλεκτρικού" ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_H = \frac{1}{12}$

με $P(N_H(t)=x) = e^{-\frac{1}{12}t}\frac{(\frac{t}{12})^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

Οι αμαξοστοιχίες του Μετρό ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_M = \frac{1}{8}$ και

$$P(N_M(t)=x) = e^{-\frac{1}{8}t} \frac{(\frac{t}{8})^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

Οι παραπάνω διαδικασίες είναι ανεξάρτητες. Δημιουργώ μία νέα διαδικασία Poisson $\{N(t),\ t\geq 0\}$ η οποία μετρά το πλήθος των τρένων ανεξάρτητα από το είδος τους με ρυθμό $\lambda = \lambda_H + \lambda_M = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} =$

$= \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$ και σ.π.π.:

$$P(N(t)=x) = e^{-\frac{5}{24}t} \frac{(\frac{5}{24}t)^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

Ζητώ την πιθανότητα:

$P(\{2 \text{ τρένα } H \text{ στο } (t_0, t_0+24)\} \text{ και } \{3 \text{ τρένα } M \text{ στο } (t_0,t_0+36)\}) =$

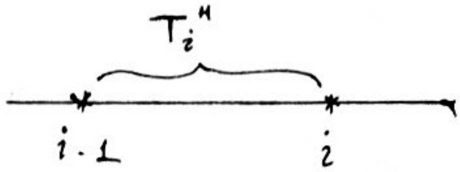
$= P(\{N_H(t_0+24) - N_H(t_0) = 2\}, \{N_M(t_0+36) - N_M(t_0) = 3\}) =$

$= P(\{N_H(24) = 2\}) \cdot P(\{N_M(36) = 3\}) =$

$$= e^{-\frac{24}{12}} \frac{(\frac{24}{12})^2}{2!} \cdot e^{-\frac{36}{8}} \frac{(\frac{36}{8})^3}{3!}.$$

ii) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τρένου του "Ηλεκτρικού".

<u>Λύση:</u>



- Έστω T_i^H, $i \in \mathbb{N}$, ο χρόνος που μεσολαβεί από την άφιξη του $i-1$ τρένου έως το i τρένο.

- Έστω η τ.μ. $S_3 = T_1^H + T_2^H + T_3^H$.

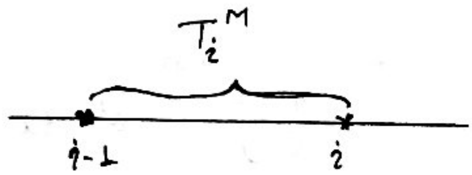
Ψάχνω τη μέση τιμή της S_3, δηλ. την $E[S_3]$.

$$E[T_1^H + T_2^H + T_3^H] = E[T_1^H] + E[T_2^H] + E[T_3^H] = 12 + 12 + 12 =$$

$$= 3 \cdot 12 = 36 \text{ λεπτά.}$$

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ της άφιξης του δεύτερου και του τρίτου ~~χρόνου~~ τρένου του Μετρό να ξεπερνά τα 10 λεπτά.

<u>Λύση:</u>



Θεωρούμε τους ενδιάμεσους χρόνους T_i^M, $i \in \mathbb{N}$, που μεσολαβούν από την άφιξη του $i-1$ τρένου έως την άφιξη του i τρένου του Μετρό.

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την άφιξη του $2^{ου}$ τρένου έως την άφιξη του $3^{ου}$ τρένου περιγράφεται από την τ.μ. T_3^M.

Γενικά, η τ.μ. $T_i^M \sim \mathcal{E}(\lambda_M = \frac{1}{8})$. (*)

Άρα, η σ.π.π. δίνεται από τον τύπο:

$$f_{T_{3}^{M}}(x) = \begin{cases} \lambda_M e^{-\lambda_M x} & , x>0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$ δηλαδή:

$$f_{T_3^M}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} & , x>0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

((*) Θυμάμαι ότι: Η Εκθετική κατανομή περιγράφει τον χρόνο μεταξύ γεγονότων σε μια διαδικασία Poisson.)

Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P(T_3^M > 10) = \int_{10}^{+\infty} f_{T_3^M}(x)\,dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}x}\,dx = \frac{1}{8}\left[-8e^{-\frac{1}{8}x}\right]_{10}^{+\infty} = \left[-e^{-\frac{1}{8}x}\right]_{10}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-\frac{1}{8}x}\right) + e^{-\frac{5}{4}} = e^{-\frac{5}{4}}.$$

iv) Να βρεθεί η πιθανότητα να φτάσουν το πολύ 2 τρένα στο σταθμό μέσα στα επόμενα 10 λεπτά.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσω την κανή διαδικασία Poisson (βλεπε σελ. 4).

Οπότε, ζητώ την πιθανότητα:

$$P(\{\text{το πολύ 2 τρένα στο } (t_0, t_0+10)\}) =$$

$$= P(\{N(t_0+10) - N(t_0) \le 2\}) =$$

$$= P(N(10) \le 2) =$$

$$= P(N(10)=0) + P(N(10)=1) + P(N(10)=2) =$$

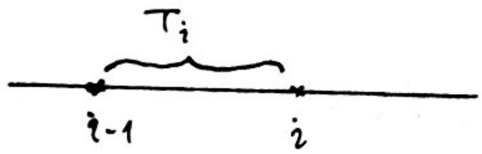
$$= e^{-\frac{5}{24}\cdot 10}\frac{\left(\frac{5}{24}\cdot 10\right)^0}{0!} + e^{-\frac{5}{24}\cdot 10}\frac{\left(\frac{5}{24}\cdot 10\right)^1}{1!} + e^{-\frac{5}{24}\cdot 10}\frac{\left(\frac{5}{24}\cdot 10\right)^2}{2!} =$$

$$= e^{-\frac{25}{12}} + e^{-\frac{25}{12}}\frac{\frac{25}{12}}{1} + e^{-\frac{25}{12}}\frac{\left(\frac{25}{12}\right)^2}{2!} = \dots \blacksquare$$

v) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του πρώτου τρένου, οποιουδήποτε είδους.

Λύση:

· Έστω T_i, $i \in \mathbb{N}$, ο χρόνος αναμονής από την άφιξη του $i-1$ τρένου έως την άφιξη του i τρένου οποιουδήποτε είδους.



Ψάχνω τη μέση τιμή του T_1, δηλ. $E[T_1]$.

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda} = \frac{24}{5}.$$

Άσκηση: Φοιτητές εισέρχονται σε ένα αμφιθέατρο από τις εισόδους 1 και 2. Το πλήθος των φοιτητών που εισέρχονται ~~......~~ στο αμφιθέατρο είναι 2 ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 0{,}5$ και $\lambda_2 = 1{,}5$ φοιτητές ανά λεπτό.

i) Υπολογίστε την πιθανότητα να μην μπει κανένας φοιτητής στο αμφιθέατρο σε ένα διάστημα 3 λεπτών.

Λύση:

Δημιουργώ μια καινή διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ η οποία μετρά το πλήθος των φοιτητών που εισέρχονται στο αμφιθέατρο με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$ φοιτητές/λεπτό.

Άρα, η σ.π.π είναι:

$$P(N(t) = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-2t}\frac{(2t)^x}{x!}$$

Ψάχνω την πιθανότητα:

$$P(\{0 \text{ φοιτητές εισέρχονται στο διάστημα } (s, s+3)\}) =$$

$$= P(N(s+3) - N(s) = 0) = P(N(3) = 0) =$$

$$= e^{-2\cdot 3}\frac{(2\cdot 3)^0}{0!} = e^{-6}.$$

ii) Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο μεταξύ των αφίξεων των φοιτητών στο αμφιθέατρο.

Λύση:

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με ρυθμό $\lambda = 2$ φοιτητές / λεπτό.

Άρα, η μέση τιμή θα είναι $\frac{1}{\lambda}$.

Άσκηση: Έστω ότι επισκέπτες μπαίνουν σε ένα μουσείο σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 30$ άνθρωποι την ώρα. Οι επισκέπτες είναι 40% άνδρες και 60% γυναίκες.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του δέκατου και του ενδέκατου ατόμου να ξεπερνά τη μισή ώρα.

Λύση:

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία Poisson που μετρά το πλήθος των επισκεπτών στο μουσείο με παράμετρο $\lambda = 30$ άτομα/ώρα.

Τότε, $P(N(t) = x) = e^{-30t} \frac{(30t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Έστω $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία των ενδιάμεσων χρόνων, όπου T_i ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ της άφιξης του $i-1$ ατόμου και του i ατόμου.

Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P\left(T_{11} > \frac{1}{2} \right).$$

Έχω: $P(T_{11} > \frac{1}{2}) = 1 - P(T_{11} \le \frac{1}{2}) = 1 - \int_0^{1/2} f_T(t)\,dt \overset{(*)}{=}$

$= 1 - \int_0^{1/2} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \int_0^{1/2} 30\, e^{-30t}\,dt =$

$= 1 - 30\left[-\frac{1}{30} e^{-30t}\right]_0^{1/2} = 1 + \left[e^{-30t}\right]_0^{1/2} =$

$= 1 + e^{-15} - 1 = e^{-15}$

((*) Θυμάμαι ότι: Οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν Εκθετική Κατανομή)

ii) Αν γνωρίζετε ότι 20 άνδρες επισκέφθηκαν το μουσείο κατά την πρώτη ώρα λειτουργίας του, ποιά η πιθανότητα και οι 20 να μπήκαν τα πρώτα 40 λεπτά?

Λύση:

Θεωρώ τη διαδικασία Poisson $\{N_A(t), t \ge 0\}$, που μετρά το πλήθος των ανδρών που εισέρχονται στο μουσείο, με ρυθμό $\lambda_A = \lambda \cdot 40\% = 30 \frac{40}{100} = 12$ άνδρες /ώρα.

Οπότε, $P(N_A(t) = x) = e^{-\lambda_A t} \frac{(\lambda_A t)^x}{x!} = e^{-12t} \frac{(12t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Ζητώ να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,\tfrac{2}{3})\} / \{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}\right) =$$

$$= \frac{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,\tfrac{2}{3})\}, \{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}\right)}{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,\tfrac{2}{3})\}, \{0 \text{ άντρες στο } (\tfrac{2}{3},1)\}\right)}{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,\tfrac{2}{3})\}\right) \cdot P\left(\{0 \text{ άντρες στο } (\tfrac{2}{3},1)\}\right)}{P\left(\{20 \text{ άντρες στο } (0,1)\}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(N_A(\tfrac{2}{3}) = 20\right) \cdot P\left(N_A(\tfrac{1}{3}) = 0\right)}{P\left(N_A(1) = 20\right)} =$$

$$= \frac{e^{-12\frac{2}{3}} \frac{(12\frac{2}{3})^{20}}{20!} \cdot e^{-12\frac{1}{3}} \frac{(12\frac{1}{3})^{0}}{0!}}{e^{-12\cdot 1} \frac{(12\cdot 1)^{20}}{20!}} =$$

$$= \frac{e^{-8} \frac{8^{20}}{20!} \cdot e^{-4}}{e^{-12} \frac{12^{20}}{20!}} = \frac{8^{20} \cdot e^{-12}}{12^{20} \cdot e^{-12}} = \left(\frac{8}{12}\right)^{20} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}.$$

iii) Ποιά η πιθανότητα ακριβώς 10 γυναίκες να επισκεφθούν το μουσείο μεταξύ 17:00 - 17:30 ?

<u>Λύση:</u>

Θεωρώ τη διαδικασία Poisson $\{N_\Gamma(t), t \geq 0\}$ που μετρά το πλήθος των γυναικών που εισέρχονται στο μουσείο με $\lambda_\Gamma = \lambda \cdot 60\% =$

$$= 30 \frac{60}{100} = 18 \text{ γυναίκες/ώρα}.$$

Τότε $$P(N_\Gamma(t) = x) = e^{-18t} \frac{(18t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$$P(\{10 \text{ γυναίκες στο } (s, s+\tfrac{1}{2})\}) =$$

$$= P(N_\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 10) = e^{-18\frac{1}{2}} \frac{(18\frac{1}{2})^{10}}{10!} = e^{-9} \frac{9^{10}}{10!}.$$

iv) Πόσοι άνθρωποι κατά μέσο όρο θα μπουν στο μουσείο μία μέρα, αν υποθέσουμε ότι παραμένει ανοικτό από τις 9:00 μέχρι τις 18:00 ?

<u>Λύση:</u>

Το μουσείο μένει ανοιχτό 9 ώρες. Θέλω το μέσο όρο των επισκεπτών για $t = 9$ ώρες.

$$E[N(9)] = 9 \cdot \lambda = 9 \cdot 30 = 270 \text{ άτομα}.$$