Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #7

Προσομοίωση

... η μίμηση της λειτουργίας συστημάτων μέσα στο χρόνο με τη βοήθεια υπολογιστή (ή ενός άλλου συστήματος).

Προσομοίωση Monte-Carlo : Μεθοδολογία Προσομοίωσης. Χρησιμοποιεί γεννήτριες τυχαίων αριθμών για την επίλυση στοχαστικών προβλημάτων, στα οποία ο χρόνος δεν έχει σημασία. Εφαρμογή της : υπολογισμός ολοκληρώματος:

$$I = \int_a^b h(x)\,dx.$$

όπου $h(x)$ συνάρτηση, της οποίας το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά.

Προσομοίωση συνεχών τυχαίων μεταβλητών.

Προσομοίωση με τη μέθοδο της Απόρριψης.
(Rejection Sampling -Von Neumann)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς (από συνάρτηση p), αλλά είναι δύσκολο. Ταυτόχρονα είναι

εύκολο να παράγω τυχαίους αριθμούς από μία άλλη συνάρτηση (συνάρτηση G).
Τότε, παράγω τυχαίους αριθμούς από τη G και τους δεχόμαστε ή τους απορρίπτουμε με μία πιθανότητα αποδοχής.

Χρησιμοποιείται όταν ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Έστω $f(x) \geq 0$ σ.π.π. της τ.μ. X, για την οποία δεν μπορώ να βρώ την F ή την F^{-1}. Βρίσκω την $g(x) \geq f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα $c = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$

μετασχηματίζω την $g(x)$ σε σ.π.π. $h(x) = \frac{g(x)}{c}$

Αλγόριθμος:

Βήμα 1º: Γέννησε την τ.μ. Y με σ.π.π. f
Γέννησε την $U \sim U(0,1)$

Βήμα 2º: Αν $U \leq \frac{f(Y)}{g(Y)}$, τότε αποδέξου Y: $X = Y$
αλλιώς απόρριψέ την και επανάλαβε το βήμα 1.

Προσομοίωση με τη μέθοδο του Αντίστροφου Μετασχηματισμού

Έστω 2 τ.μ. X & Y που έχουν την ίδια κατανομή. Τότε σε κάποιο πείραμα που χρησιμοποιεί τη X, μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε την Y.

Οι X & Y ονομάζονται στατιστικά ίσες τ.μ. κατά κατανομή. Αυτό σημαίνει οπουδήποτε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την τ.μ. X, μπορούμε αντ' αυτής να χρησιμοποιούμε την Y.

Αν $F(x)$ σ.κ. της X (συνεχής και γνησίως μονότονη) τότε υπάρχει η F^{-1}.

Θεωρούμε την τ.μ. U, $U \sim U(0,1)$

α. Πάρε το $U \sim U(0,1)$

β. Θέσε $X = F^{-1}(U)$.

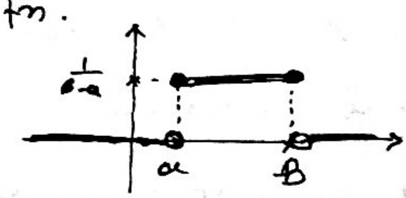
Άσκηση: Υποθέστε ότι έχετε μία συνάρτηση rand( ) που θα επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό, ομοιόμορφα κατανεμημένο στο (0,1). Προσομοιώστε μία ομοιόμορφη τ.μ. στο (−3,6).

Λύση:

$X \sim U(-3,6)$ με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{6+3} = \frac{1}{9}, \ \forall x\in(-3,6)$

(η $X \sim U(a,b)$: ομοιόμορφη κατανομή.

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$)



$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-3}^{x} \frac{1}{9}\,dt = \frac{1}{9}\left[t\right]_{-3}^{x} = \frac{1}{9}(x+3) =$$

$$= \frac{x+3}{9}, \quad x\in(-3,6).$$

Άρα,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \le -3 \\ \frac{x+3}{9} & , -3 < x < 6 \\ 1 & , 6 \le x < +\infty . \end{cases}$$

Βρίσκω την $F^{-1}(x)$: $\quad u = F(x) \Rightarrow \frac{x+3}{9} = u \Rightarrow x = 9u-3.$

Συνεπώς, $F^{-1}(u) = 9u-3.$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο : Δημιουργώ τυχαίο αριθμό $U \in (0,1)$

Βήμα 2ο : Θέτω $X = F^{-1}(U) = 9U-3$ και η X είναι μία τ.μ. $X \sim U(-3,6)$ ∎

Πράγματι:

$$0 < v < 1 \xrightarrow{\cdot 9} 0 < 9v < 9 \xrightarrow{-3} -3 < 9v-3 < 6$$

Δηλ. με $v \in (0,1)$ ---> $X \in (-3,6)$.

π.χ. → αν $v = \frac{1}{2} \in (0,1)$, τότε $X = 9v - 3 = 9 \cdot \frac{1}{2} - 3 = \frac{3}{2} \in (-3,6)$.

Άσκηση: Έστω μία συνεχής τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{e^x}{e^2-1} \quad , \quad 0<x<2.$$

Προσομοιώστε τη με τη i) μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού ii) μέθοδο της απόρριψης.

Λύση:

i) Θα προσδιορίσω τη συνάρτηση κατανομής της X.

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^x}{e^2-1}\,dx = \frac{1}{e^2-1}\int_0^x e^x\,dx =$$

$$= \frac{1}{e^2-1}\left[e^x\right]_0^x = \frac{e^x-1}{e^2-1}$$

Θα υπολογίσω την αντίστροφη της F.

Θέτω $u = \frac{e^x-1}{e^2-1} \Rightarrow u(e^2-1) = e^x - 1 \Rightarrow 1 + u(e^2-1) = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \ln\left(1+u(e^2-1)\right).$$

Προσομοίωση:

Βήμα 1: Φτιάξε μια ομοιόμορφη $U \in (0,1)$

Βήμα 2: Θέσε $X = F^{-1}(U) = \ln\left(1 + U(e^2-1)\right)$

και η X είναι η ζητούμενη τ.μ.

ii) Θα πρέπει να χρησιμοποιήσω μια άλλη τ.μ. Y στο $(0,2)$

με $g(x)$ συνάρτηση πυκνότητας στο $(0,2)$.

με $g(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Έστω επίσης σταθερά c για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c, \quad \forall x \in (0,2).$$

Δηλαδή $$\frac{\frac{e^x}{e^2-1}}{\frac{1}{2}} \leq c \Rightarrow \frac{2e^x}{e^2-1} \leq c$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{2e^x}{e^2-1}.$$ Έστω $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \geq 0$

που ισχύει $\forall x \in (0,2)$

Άρα, έχω μέγιστο στο $x_0 = 2$. με τιμή $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2e^2}{e^2-1} = c$.

Άρα, $$\frac{2e^x}{e^2-1} \leq \frac{2e^2}{e^2-1}$$

Επομένως, $\frac{f(x)}{c\cdot g(x)} = \frac{\frac{e^x}{e^2-1}}{\frac{2e^2}{e^2-1}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2e^x(e^2-1)}{2e^2(e^2-1)} = \frac{e^x}{e^2}$.

Προσομοίωση:

Βήμα 1: Δημιούργησε μια τ.μ. Y με σ.π.π. $g(x)=\frac{1}{2}$

Βήμα 2: Δημιούργησε μια ομοιόμορφη τ.μ. U στο $(0,1)$.

Βήμα 3: Αν $U \le \frac{f(Y)}{c\cdot g(Y)} = \frac{e^Y}{e^2}$, τότε θέσε $X=Y$,

διαφορετικά επέστρεψε στο Βήμα 1. ∎

<u>Άσκηση:</u> Υποθέστε ότι έχετε μια συνάρτηση rand(.) που επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανεμημένο στο $(0,1)$. Προσομοιώστε μια συνεχή τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = 30(x^2-2x^3+x^4), \quad 0<x<1.$$

<u>Λύση:</u>

$$F(x) = \int 30(x^2-2x^3+x^4)\,dx = 30\left(\frac{x^3}{3}-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right) =$$

$$= 10x^3-15x^4+6x^5.$$

(Δύσκολα αντιστρέφεται... Ακολουθώ τη μέθοδο της απόρριψης.)

Έστω Y μια συνεχής τ.μ. που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ με σ.π.π. $g(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$.

Έστω $c \in \mathbb{R}$ τω: $\frac{f(x)}{g(x)} \le c \Rightarrow \frac{30x^2-60x^3+30x^4}{1} \le c$

$\Rightarrow 30x^2-60x^3+30x^4 \le c$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 60x - 180x^2 + 120x^3 = 60x(1-3x+2x^2)$$

Ψάχνω το μέγιστο:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ή \\ x=1 \\ ή \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

		0		$\frac{1}{2}$		1	
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$			$\nearrow$		$\searrow$		

Άρα, έχω τοπικό μέγιστο για $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$\frac{f(1/2)}{g(1/2)} = 30 \cdot \frac{1}{4} - 60\frac{1}{8} + 30\frac{1}{16} = \frac{15}{8} = c$$

Επομένως, $\frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{f(x)}{\frac{15}{8}g(x)} = \frac{8}{15}30(x^2-2x^3+x^4) =$

$= 16(x^2-2x^3+x^4) \le 1$.

Προσομοίωση:

Βήμα 1: Δημιουργώ Y με σ.π.π. $g(x)=1$.

Βήμα 2: —//— U στο $(0,1)$

Βήμα 3: Αν $U \le 16(Y^2-2Y^3+Y^4)$, θέσε $X=Y$,

αλλιώς επιστρέφω στο Βήμα 1.

<u>Άσκηση</u>: Έστω μία συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. :

$$f(x) = \frac{x^2}{81}, \quad -3<x<6.$$

Προσομοιώστε την με

i) τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού

ii) τη μέθοδο της απόρριψης.

<u>Λύση</u>:

i) Προσδιορίζω πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της X στο διάστημα $(-3,6)$.

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-3}^{x} \frac{t^2}{81}\,dt = \frac{1}{81}\int_{-3}^{x} t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{81}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{x} = \frac{1}{81}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{27}{3}\right] = \frac{1}{81\cdot 3}(x^3+27) = \frac{x^3+27}{243}.$$

Θα αντιστρέψω την $F(x)$.

Η $F(x)$ αντιστρέφεται, διότι είναι 1-1 :

Πράγματι, με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow x_1^3+27 \neq x_2^3+27 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1^3+27}{243} \neq \frac{x_2^3+27}{243} \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2).$$

Θέτω $u = F(x) \Rightarrow \frac{x^3+27}{243} = u \Rightarrow x^3 = 243u - 27 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{243u-27}.$$

με $x \in (-3,6) \longrightarrow u \in (0,1)$.

Άρα, $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{243x-27}$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο: Χρησιμοποιώ την συνάρτηση rand(·) για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών $U \in (0,1)$.

Βήμα 2ο: Θέτω $X = F^{-1}(U) = \sqrt[3]{243U - 27}$ και η X είναι η ζητούμενη τ.μ.

ii) Θέτω $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{x^2}{81}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{x^2}{9}$, $x \in (-3,6)$

Διότι: Έστω Y τ.μ. ομοιόμορφη στο $[-3,6]$

Άρα, η σ.π.π. της Y είναι $g(x) = \dfrac{1}{6-(-3)} = \dfrac{1}{9}$

Ψάχνω σταθερά c τ.ω: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le c$, $\forall x \in (-3,6)$

Η $h(x)$ δεν έχει μέγιστο. Όμως όταν $x \in (-3,6)$, θεωρώ το $h(6)$ μέγιστο και $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le c = h(6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} \le \frac{36}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{9} \le 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4 \cdot 9} \le 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} \le 1.$$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο: $Y \sim U(-3,6)$

Βήμα 2ο: $U \sim U(0,1)$

Βήμα 3ο: Αν $U \le f(Y)/cg(Y) = \dfrac{Y^2}{36}$, τότε θέτω $X = Y$!

Άσκηση: Υποθέστε ότι έχετε μία συνάρτηση rand(·) που σας επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό, ομοιόμορφα κατανεμημένο στο (0,1). Έστω X μια τ.μ. με σ.κ. $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x > 0$.
Προσομοιώστε την X με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Λύση:

· Θα εξετάσω αν η F είναι 1-1:

$$\text{με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow -\frac{x_1^2}{2} \neq -\frac{x_2^2}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$$

Άρα, η F αντιστρέφεται.

· Θα βρώ την $F^{-1}(x)$:

$$y = F(x) \Rightarrow y = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - y \Rightarrow -\frac{x^2}{2} = \ln(1-y) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x^2 = -2\ln(1-y) \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2\ln(1-y)}$$

((*) πρέπει $1-y > 0 \Rightarrow 1 > y$.)

Επειδή $x > 0$, κρατώ το (+), άρα $x = \sqrt{-2\ln(1-y)}$

Άρα, $F^{-1}(x) = \sqrt{-2\ln(1-x)}$, $x \in (0,1)$

Προσομοίωση:

Βήμα 1º: Έστω τυχαίος αριθμός $U \in (0,1)$

Βήμα 2º: Θέτω $X = \sqrt{-2\ln(1-U)}$. Τότε η X είναι τ.μ.