Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #8

<u>Άσκηση:</u> Υποθέστε ότι έχετε μία συνάρτηση rand(·) που σας επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό (ομοιόμορφα κατανεμημένο) στο (0,1). Απαντήστε τα εξής:

α) Έστω το εξής παιχνίδι: Απο κουτί που περιέχει 10 κόκκινες, 15 μαύρες & 5 μπλε κάρτες, τραβάμε μία και την επανατοποθετούμε. Αν η κάρτα είναι κόκκινη κερδίζουμε 1 ευρώ, αν είναι μπλε κερδίζουμε 3 ευρώ και αν είναι μαύρη χάνουμε 2 ευρώ. Περιγράψτε τον τρόπο για την προσομοίωση του παιχνιδιού αυτού.

<u>λύση:</u>

Σύνολο καρτών: $10+15+5=30$

με $\frac{1}{3}$ πιθανότητα να τραβήξω κόκκινη - κερδίζω 1 €

με $\frac{1}{2}$ — // — μαύρη - χάνω 2 €

με $\frac{1}{6}$ — // — μπλε - κερδίζω 3 €

Δημιουργώ μία συνάρτηση που να μου επιστρέφει το ποσό που κερδίζω/χάνω σε μία επιλογή μόνο.

Μετά καλώ αυτή τη συνάρτηση σε περισσότερα παιχνίδια για να έχω μια εκτίμηση για το τί πρόκειται να συμβεί.

```
function_one_choice(·)
{
  U = rand(·)
  If  u < 1/2 , then  loose 2
  If  1/2 < u < 1/2 + 1/3 , then  earn 1
  Else, earn 3
}.
```

β) Έστω ότι το πλήθος των πελατών σ' ένα βενζινάδικο κατά τη διάρκεια της ημέρας είναι μία διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο [0, 99]. Το ποσό της βενζίνης που βάζει κάθε πελάτης είναι μια ομοιόμορφη συνεχής τ.μ. στο (0, 50). Περιγράψτε έναν τρόπο για τον υπολογισμό των κερδών του βενζινάδικου στη διάρκεια της ημέρας.

<u>Λύση:</u>

Πλήθος πελατών : $X = 100 \cdot U$, $U = rand(\cdot)$

```
count 0
for i=1 to X
{
   poso = 50·rand( );
   count = count + poso;
}.
```

γ) Μια τ.μ. Γάμμα με παραμέτρους (n, λ) γράφεται ως το άθροισμα n εκθετικών τ.μ. με παράμετρο λ. Πώς θα προσομοιώνατε αυτή την τ.μ. ?

<u>λύση:</u>

Η Εκθετική με παράμετρο λ : $e^{-\lambda x}$.

Άρα, θέτω $U = e^{-\lambda X} \Rightarrow \ln U = \ln e^{-\lambda X} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln U = -\lambda X \Rightarrow X = -\dfrac{\ln U}{\lambda}$.

Άρα, οι εκθετικές θα είναι:

$$-\frac{\ln U_1}{\lambda} - \frac{\ln U_2}{\lambda} - \dots - \frac{\ln U_n}{\lambda} = -\frac{\ln(U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_n)}{\lambda}$$ ■.

<u>Άσκηση:</u> Περιγράψτε μία μέθοδο προσομοίωσης μιας συνεχούς τ.μ. X με σ.π.π. : $f(x) = \dfrac{x^2}{9}$, $0 < x < 3$.

<u>λύση:</u>

α) Με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού:

Προσδιορίζω πρώτα τη συνάρτηση κατανομής της X στο διάστημα $(0,3)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t^2}{9}\,dt = \frac{1}{9}\int_0^x t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3} - 0\right] = \frac{x^3}{27}.$$

Η $F(x) = \frac{x^3}{27}$ είναι "1-1", αφού με

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow \frac{x_1^3}{27} \neq \frac{x_2^3}{27} \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2).$$

Άρα, $\exists\, F^{-1}(x)$.

Θέτω $u = F(x) \Rightarrow u = \frac{x^3}{27} \Rightarrow x^3 = 27u \Rightarrow x = \sqrt[3]{27u} = 3\sqrt[3]{u}$.

με $x \in (0,3)$ έχω ότι $u \in (0,1)$

Άρα, $F^{-1}(x) = 3\sqrt[3]{x}$.

Προσομοίωση:

Βήμα 1º: Χρησιμοποιώ τη συνάρτηση rand(·) για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών $U \in (0,1)$.

Βήμα 2º: Θέτω $X = F^{-1}(U) = 3\sqrt[3]{U}$ και η X είναι η ζητούμενη τ.μ.

β) Με τη μέθοδο της απόρριψης.

Θέτω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$, $x \in (0,3)$.

Διότι, έστω Y τ.μ. ομοιόμορφη στο $(0,3)$.
Άρα η σ.π.π. της Y είναι η $g(x) = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$ $\left(= \frac{1}{b-a}\right)$.
Ψάχνω σταθερά c τ.ω.: $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$, $\forall x \in (0,3)$.

Δηλ. $\frac{x^2}{3} \leq c$.

Η $h(x)$ δεν έχει μέγιστο, όμως περιοριζόμενοι στο $(0,3)$,

θεωρώ το $h(3)$ ως μέγιστο. Κι έτσι έχω:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq c = h(3) \Rightarrow \frac{x^2}{3} \leq \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{3} \leq 3 \overset{:3}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} \leq 1.$$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο: $Y \sim U(0,3)$

Βήμα 2ο: $U \sim U(0,1)$

Βήμα 3ο: Αν $U \leq \frac{f(Y)}{c\,g(Y)} = \frac{Y^2}{9}$, τότε θέτω $X = Y$,

διαφορετικά απόρριψέ την και επανάλαβε το βήμα 1.

Άσκηση: Έστω μία συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{x^3}{4}$, $0<x<2$. Προσομοιώστε την

α) με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού

β) με τη μέθοδο της απόρριψης.

Λύση:

α) Θα προσδιορίσω τη συνάρτηση κατανομής της X στο $(0,2)$.

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{t^3}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int_{0}^{x} t^3\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4} - 0\right] = \frac{x^4}{16}$$

Στο $(0,2)$ η $F(x)$ είναι 1-1, κι έχω:

$$y = F(x) \Rightarrow y = \frac{x^4}{16} \Rightarrow x^4 = 16y \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 2\sqrt[4]{y} \quad (y \ge 0)$$

Επειδή $x>0$, κρατάω το $(+)$, άρα $x = 2\sqrt[4]{y}$.

Άρα $F^{-1}(x) = 2\sqrt[4]{x}$, $x \in (0,1)$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο: Έστω τυχαίος αριθμός $U \in (0,1)$

Βήμα 2ο: Θέτω $X = 2\sqrt[4]{U}$. Τότε η X είναι η τ.μ.

β) Έστω Y τ.μ. ομοιόμορφη στο $(0,2)$.

Τότε, η σ.π.π. της Y είναι $g(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Θέτω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2x^3}{4} = \frac{x^3}{2}$.

Ψάχνω σταθερά c τ.ω.: $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c \ , \ \forall x \in (0,2)$

Έστω $h'(x) \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x^3}{2}\right)' \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{2} \geq 0$ που ισχύει (για $x=0$ έχω $h'(x)=0$)

	0		2
$h'(x)$	0	+	
$h(x)$		↗	

Άρα, έχω μέγιστο για $x=2$, το $h(2) = \frac{2^3}{2} = 4$.

Οπότε, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c = h(2) \Rightarrow \frac{x^3}{2} \leq 4 \overset{:4}{\Longrightarrow} \frac{x^3}{8} \leq 1$.

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο: Δημιουργώ Y με σ.π.π. $g(x) = 1$.

Βήμα 2ο: —//— U στο $(0,1)$

Βήμα 3ο: Αν $U \leq \frac{Y^3}{8}$, δέχω $X = Y$,

διαφορετικά επιστρέφω στο Βήμα 1.

<u>Άσκηση:</u> Υλοποιήστε μια μέθοδο προσομοίωσης μιας εκθετικής τ.μ. με παράμετρο λ.

<u>Λύση:</u>

Για την προσομοίωση μιας εκθετικής τ.μ. X με παράμετρο λ, ακολουθώ τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού.

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = u \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Rightarrow -\lambda x = \ln(1-u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$$

Συνεπώς, $F^{-1}(u) = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}$.

Όταν $u \in (0,1)$, $0 < u < 1 \Rightarrow -1 < -u < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < 1 - u < 1 \Rightarrow (1-u) \in (0,1)$

Προσομοίωση:

Βήμα 1ο : Δημιουργώ αριθμό $U \in (0,1)$

Βήμα 2ο : Θέτω $X = F^{-1}(U) = -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}$

Και τότε $X \sim E(\lambda)$.