Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

1. Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής.

π.χ. $I = \int \sin x \cdot \cos x \, dx$.

Θέτω $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$

Άρα, $I = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ ∎

π.χ. $I = \int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Θέτω $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.

Άρα, $I = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\ln^4 x}{4} + c$ ∎.

π.χ. $I = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

Θέτω $1 + e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$.

Άρα, $I = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$ ∎

π.χ. $I = \int e^{4x-8} dx$.

Θέτω $u = 4x - 8 \Rightarrow du = 4 dx$.

Άρα, $I = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4} e^u + c = \frac{1}{4} e^{4x-8} + c$ ∎.

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx \qquad (f,g \text{ παραγωγίσιμες})$$

π.χ. $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$.

$$I = \int \cos bx\cdot\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}(\cos bx)'\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin bx\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\cdot\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int\frac{e^{ax}}{a}b\cos bx\,dx =$$

$$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{e^{ax}b\sin bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\,dx}_{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} \quad \blacksquare.$$

π.χ. $\rightarrow$ $I = \int x^2 e^x \, dx$.

$$I = \int x^2 (e^x)' \, dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x \cdot (e^x)' \, dx =$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \;\blacksquare.$$

π.χ. $\rightarrow$ $I = \int x \ln x \, dx$.

$$I = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \;\blacksquare$$

π.χ. $\rightarrow$ $I = \int (1 - \ln x) \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

$$I = \int \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot \ln x \, dx = \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \cdot \ln x \, dx =$$

$$= \frac{\ln x}{x} \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln^2 x}{x} - \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{x} - \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln x \, dx = \frac{\ln^2 x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln x \, dx =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{x} - \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right] =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{x} + \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{\ln^2 x}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C =$$

$$= \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x} + C \;\blacksquare.$$

3. Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

3.A. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $\deg(f(x)) \geq \deg(g(x))$.

Τότε εκτελώ τη διαίρεση πολυωνύμων κι έχω:

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

π.χ. $\rightarrow$ $I = \displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+1}{x-1}\,dx$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & +0x & +1 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+3x+3 \\
\hline
 & 3x^2 & +0x & +1 & \\
 & -3x^2 & +3x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & +1 & \\
 & & -3x & +3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 4 &
\end{array}
$$

Άρα, $x^3+2x^2+0x+1 = (x-1)(x^2+3x+3)+4$.

Οπότε, $I = \displaystyle\int \frac{(x-1)(x^2+3x+3)+4}{x-1}\,dx =$

$= \displaystyle\int \left[(x^2+3x+3) + \frac{4}{x-1}\right] dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln|x-1|$ ∎.

3.B. $\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\deg(f(x)) < \deg(g(x))$: Γνήσια Ρητή Συνάρτηση

3.B.α. <u>Ο $g(x)$ έχει πραγματικές ρίζες κι άνισες.</u>

π.χ. $\rightarrow$ $I = \int \frac{x^2+30x-96}{x^3-2x^2-24x}\,dx$.

$x^3-2x^2-24x = x(x+4)(x-6)$.

Σε αυτήν την περίπτωση κάνω <u>ανάλυση σε απλά κλάσματα</u>

Δηλ:

$$\frac{x^2+30x-96}{x^3-2x^2-24x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{\Gamma}{x-6} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=4,\ B=-5,\ \Gamma=2.$$

Οπότε: $I = \int\left(\frac{4}{x} + \frac{-5}{x+4} + \frac{2}{x-6}\right)dx = 4\ln|x| - 5\ln|x+4| + 2\ln|x-6|$ ∎

π.χ. $\rightarrow$ $I = \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$.

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} A=2-B \\ -3(2-B)-2B=1 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=2-B \\ -6+3B-2B=1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} A=-5 \\ B=7 \end{array}\right.$$

Οπότε, $I = \int\left(-\frac{5}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right)dx = -5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C$ ∎

3. B. β. <u>Ο $g(x)$ έχει πολλαπλές πραγματικές ρίζες.</u>

π.χ. → $I = \int \frac{3x^3+6x^2+7x-4}{(x^2-1)^2}\,dx$.

$(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$

Τότε, η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι:

$$\frac{3x^3+6x^2+7x-4}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}.$$

(Δηλ. για κάθε παράγοντα $(x-\alpha)^k$ αντιστοιχούν τα μερικά κλάσματα: $\frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)}$).

Λύνοντας, έχω ότι: $A=3$, $B=4$, $C=-2$, $D=-1$.

■.

(→ Η περίπτωση όπου το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, δεν θα κληθεί σε αυτό το εξάμηνο...)

4. Τριγωνομετρικές Αντικαταστάσεις

$\sqrt{a^2+x^2}$: $x = a\tan\theta$

$\sqrt{a^2-x^2}$: $x = a\sin\theta$

$\sqrt{x^2-a^2}$: $x = a\sec\theta$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$(\sec\theta)' = \tan\theta \cdot \sec\theta$$

$$(\tan\theta)' = \sec^2\theta$$

$$1+\tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

π.χ. → $I = \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$.

Θέτω $x = 2\tan\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Άρα, $4+x^2 = 4+4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$.

Οπότε, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{4\sec^2\theta}}\, 2\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{2|\sec\theta|}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta, \quad \sec\theta > 0$$

Θα υπολογίσω το $\int \sec\theta\, d\theta$.

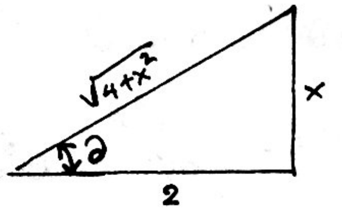
Θέτω $u = \sec\theta + \tan\theta \Rightarrow du = (\tan\theta \cdot \sec\theta + \sec^2\theta)\, d\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow du = \sec\theta(\tan\theta + \sec\theta)\, d\theta \Rightarrow du = u \cdot \sec\theta\, d\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{du}{u} = \sec\theta\, d\theta.$

Άρα, $\int \sec\theta \, d\theta = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$.

Οπότε, $I = \int \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$. $(*)$



$$\left.\begin{aligned} x &= 2\tan\theta \\ \tan\theta &= \frac{x}{2} \\ \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Από τη $(**)$, η $(*)$ γίνεται:

$$I = \ln\left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| \quad \blacksquare.$$

Διάφορα παραδείγματα:

1. $I = \int \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} dx = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$

Θέτω $\frac{1+x}{1-x} = t^2 \Rightarrow (1+x) = (1-x)t^2 \Rightarrow 1+x = t^2 - xt^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(1+t^2) = t^2-1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \frac{2t\,(t^2+1-t^2+1)}{(t^2+1)^2}\, dt \Rightarrow dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt.$

Άρα, $I = \int \sqrt{t^2}\, \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt = 4\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt =$

$= \frac{4}{2} \int \frac{t\cdot(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}\, dt = 2\int t\cdot\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)' dt =$

$= -2\int t\cdot\left((t^2+1)^{-1}\right)' dt = -2t(t^2+1)^{-1} + 2\int (t^2+1)^{-1}\, dt =$

$= -2\frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{-2t}{t^2+1} + 2\arctan t + c.$

Δηλ. $I = 2\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} - \frac{2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}}{\frac{1+x}{1-x}+1} + c.$ ∎.

2. $I = \int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx.$

Θέτω $u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx.$

Άρα, $I = \int \frac{1}{u^{1/3}}\,du = \int u^{-\frac{1}{3}}\,du = \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$

$= \frac{3}{2} u^{2/3} + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3} + c$ ∎.

<u>Σημείωση</u>: Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να λυθεί και ως εξής:

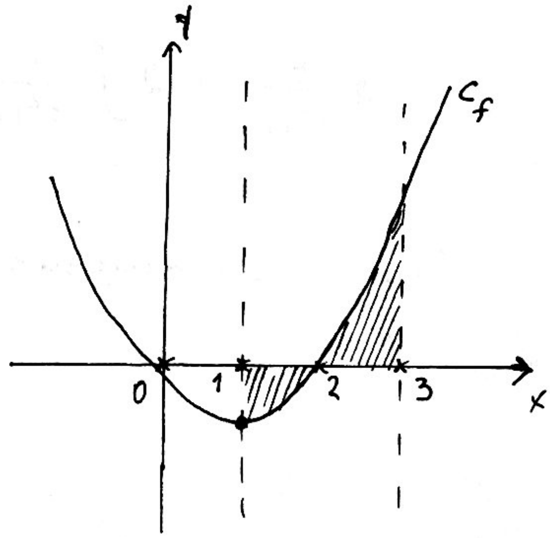
Θέτω $v = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow dv = \left((x^2+1)^{1/3}\right)' dx \Rightarrow dv = \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\,dx = 3\,dv\,(x^2+1)^{2/3} \Rightarrow 2x\,dx = 3\,dv \cdot v^2.$

Άρα, $I = 3\int \frac{v^2}{v}\,dv = 3\int v\,dv = \frac{3}{2}v^2 + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3} + c$ ∎.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x$, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

<u>Λύση</u>:



$f(x) = x^2 - 2x.$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 2. \end{cases}$

$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$: Η κορυφή της παραβολής.

Το ζητούμενο εμβαδό φαίνεται στο σχήμα και υπολογίζεται ως εξής:

$E = -\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx =$

$= -\int_1^2 (x^2-2x)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 =$

$= -\left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right) + \left(\frac{27}{3} - 9 - \frac{8}{3} + 4\right) = 2$ τ.μ.

∎.

4. Έστω $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x=1$.

Λύση:

Θα δείξω ότι $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\geq 0$.

Έστω $h(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow h(x)=\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$, $x\geq 0$.

Έχω: $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$

Και: $h''(x)=\frac{-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}}{4(x+1)}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4}=$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\right)$, $x\geq 0$.

Για $x>0$ έχω: $\left.\begin{array}{c} x+1>1 \\ \text{και} \\ \sqrt{x+1}>1 \end{array}\right\} (x+1)\sqrt{x+1}>1 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}>-1 \Rightarrow 1-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}>0$.

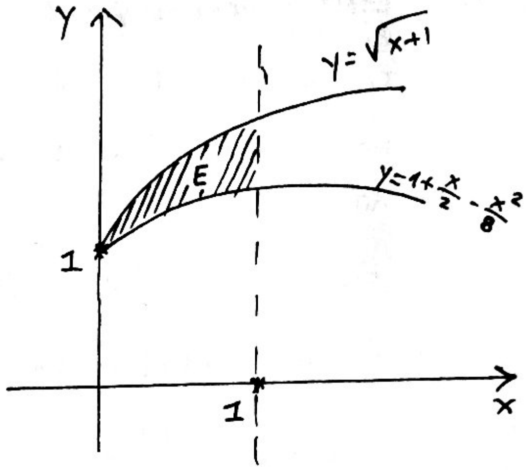
Οπότε, $h''(x)>0$, $\forall x>0$. Δηλ. $h'(x)\nearrow$, $\forall x>0$.

Δηλ. $h'(x)>h'(0) \xrightarrow{h'(0)=0} h'(x)>0$

Άρα, $h(x)\nearrow$, $\forall x>0$. Οπότε: $h(x)>h(0) \xrightarrow{h(0)=0} h(x)>0, \forall x>0$.

Συνεπώς, $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\geq 0$ (Το "=" ισχύει για $x=0$).

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



$$E = \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx + \int_0^1 \left(-1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) dx \quad (*)$$

• Υπολογίζω το $\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx \xrightarrow[dx = du]{u = x+1} \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \int_1^2 u^{1/2}\,du =$

$$= \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - \sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right).$$

• Υπολογίζω το $\int_0^1 \left(-1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) dx = \left[-x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24}\right]_0^1 =$

$$= -1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - 0 = -\frac{29}{24}.$$

Η (*) γίνεται: $E = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) - \frac{29}{24}$ ∎.

Γενικευμένα Ολοκληρώματα.

► Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[a,+\infty)$ (ή αντίστοιχα στο $(-\infty, b]$ ή στο $(-\infty,+\infty)$). Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της f στα διαστήματα αυτά, όπου δεν είναι φραγμένα;

π.χ.
→

α) $$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x \, dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x \right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^a \right) = 1 - 0 = 1.$$

β) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\sqrt{3b+1} - \frac{2}{3} \right) = \lim_{b\to+\infty} \frac{2}{3}\left(\sqrt{3b+1} - 1 \right) = +\infty.$$

γ) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-2}\, dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = 1.$$

δ) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{a} e^{-x}\,dx + \int_{a}^{+\infty} e^{-x}\,dx =$

$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} e^{-x}\,dx + \lim_{w\to+\infty}\int_{a}^{w} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-e^{-x}\right]_{t}^{a} + \lim_{w\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_{a}^{w} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(-e^{-a}+e^{-t}\right) + \lim_{w\to+\infty}\left(-e^{-w}+e^{-a}\right) =$$

$$= -e^{-a} + \lim_{t\to-\infty} e^{-t} + \lim_{w\to+\infty}(-e^{-w}) + e^{-a} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} e^{-t} - \lim_{w\to+\infty} e^{-w} = +\infty - 0 = +\infty$$ (Το ολοκλήρωμα αποκλίνει).

► Πώς υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας f σ' ένα διάστημα $[a,b)$, όπου η f δεν ορίζεται στο b; (ή αντίστοιχα στο $(a,b]$, όπου η f δεν ορίζεται στο a).

π.χ.

α) $\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$, $a<b$.

Είναι: $\lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = \lim_{t\to b^-}\left[-2\sqrt{b-x}\right]_{a}^{t} =$

$$= \lim_{t\to b^-}\left[-2\sqrt{b-t} + 2\sqrt{b-a}\right] = 2\sqrt{b-a}.$$ (Το ολοκλήρωμα συγκλίνει)

β) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} =$

$= \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x^2} + \lim_{w \to 0^+} \int_{w}^{1} \frac{dx}{x^2} =$

$= \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{t} + \lim_{w \to 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{w}^{1} =$

$= \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{t} - \left(\frac{-1}{-1} \right) \right] + \lim_{w \to 0^+} \left[-1 - \left(-\frac{1}{w} \right) \right] =$

$= \lim_{t \to 0^-} \left[-1 - \frac{1}{t} \right] + \lim_{w \to 0^+} \left[\frac{1}{w} - 1 \right] = +\infty.$

γ) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} =$

$= \lim_{t \to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{w \to 1^+} \int_{w}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} =$

$= \lim_{t \to 1^-} \left[-(x-1)^{-1} \right]_{0}^{t} + \lim_{w \to 1^+} \left[-(x-1)^{-1} \right]_{w}^{2} =$

$= \lim_{t \to 1^-} \left[-(t-1)^{-1} + (-1)^{-1} \right] + \lim_{w \to 1^+} \left[-1^{-1} + (w-1)^{-1} \right] =$

$= \lim_{t \to 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1 \right] + \lim_{w \to 1^+} \left[-1 + \frac{1}{w-1} \right] = +\infty$