Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Στοχαστικές Διαδικασίες – Θέματα Εξετάσεων

Διδάσκουσα: Ελισάβετ Κωνσταντίνου, Αναπλ. Καθηγήτρια

Προσομοίωση

Ζήτημα 1 (1 μονάδα). Σε κάθε ρίψη ενός ζαριού, έρχεται με πιθανότητα 30% το αποτέλεσμα 1, 2 ή 3 (με ίση πιθανότητα και τα 3 νούμερα) και με πιθανότητα 70% έρχεται 4, 5 ή 6 (με ίση πιθανότητα επίσης). Πως θα προσομοιώνατε το αποτέλεσμα της ρίψης αυτού του ζαριού?

Ζήτημα 2 (1.3 μονάδα). Περιγράψτε μία μέθοδο για την προσομοίωση μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \quad 0 \le x \le 1$.

Διαδικασία Poisson

Ζήτημα 3 (1 μονάδα). Λεωφορεία φτάνουν σε ένα σταθμό με ρυθμό λ=3 λεωφορεία ανά μέρα.

1. Ποια η πιθανότητα να περάσουν δύο λεωφορεία την πρώτη μέρα και να μην περάσει κανένα τη δεύτερη μέρα; (0.5)

2. Ποια η πιθανότητα ότι θα περάσουν περισσότερες από δύο μέρες για να έρθει το 4ο λεωφορείο; (0.5)

Ζήτημα 4 (1.5 μονάδα). Σε ένα υπολογιστικό κέντρο οι βλάβες στο υλικό συμβαίνουν τυχαία στον χρόνο. Έχει υπολογιστεί ότι η εμφάνιση βλαβών μπορεί να θεωρηθεί ως διαδικασία Poisson με ρυθμό λ = 2.4 βλάβες/ημέρα.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία βλάβη μέσα στις επόμενες 12 ώρες. (0.5)

(β) Δοθέντος ότι είχαμε 2 βλάβες μέσα σε μια ημέρα, ποια η πιθανότητα και οι δύο να έγιναν τις πρώτες 12 ώρες; (0.5)

(γ) Μία στις τρεις βλάβες οφείλεται στην τροφοδοσία ρεύματος από τη ΔΕΗ. Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε το πολύ δύο βλάβες λόγω ρεύματος στα επόμενα τρία 24ωρα. (0.5)

Τυχαίες Μεταβλητές

Ζήτημα 5 (1.5 μονάδες). Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τη σχέση:

$$f(x,y) = x + y \qquad \text{με} \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

(α) Υπολογίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των X και Y ξεχωριστά. Είναι ανεξάρτητες οι τυχαίες μεταβλητές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0.7)

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\{X < Y\}$. (0.8)

Ζήτημα 6 (1 μονάδα). Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι η εξής:

p(X = 0, Y = 0) = 0.6,

p(X = 1, Y = 0) = 0.1,

p(X = 0, Y = 1) = 0.1 και

p(X = 1, Y = 1) = 0.2. Υπολογίστε την μέση τιμή E[X|Y=1].

<u>Μαρκοβιανές Αλυσίδες</u>

Ζήτημα 7 (1.6 μονάδα). Τέσσερα παιδιά, έστω Α, Β, Γ και Δ, έχουν μια μπάλα και παίζουν το εξής παιχνίδι: σε κάθε φάση του παιχνιδιού, το παιδί που έχει τη μπάλα τη ρίχνει τυχαία σε κάποιο άλλο. Έστω X_0 το παιδί που έχει αρχικά τη μπάλα και X_n, n=1,2,3,... το παιδί που έχει τη μπάλα μετά τη n-οστή φάση του παιχνιδιού.

(α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω παιχνίδι με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης πρώτης τάξης. (0.5)

(β) Ποια είναι η πιθανότητα $P\{X_2 = A | X_0 = A\}$ και ποια η $P\{X_2 = A\}$ αν είναι το ίδιο πιθανό αρχικά την μπάλα να την έχει οποιοδήποτε παιδί; (0.6)

(γ) Υπάρχουν οριακές πιθανότητες για τις καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας που προέκυψε από την μοντελοποίησή σας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αν είναι θετική, υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες. (0.5)

Ζήτημα 8 (1.1 μονάδα). Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις {0,1,2,3,4,5} και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης τον:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

α) Σχηματίστε το γράφημα της αλυσίδας. Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της αλυσίδας; Ποιες καταστάσεις είναι έμμονες, ποιες μεταβατικές και ποιες απορροφητικές; Ποια είναι η περίοδος των έμμονων καταστάσεων; (0.5)

β) Αν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 1, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρεθεί σε μία έμμονη κατάσταση; (0.6)

Καλή Επιτυχία!