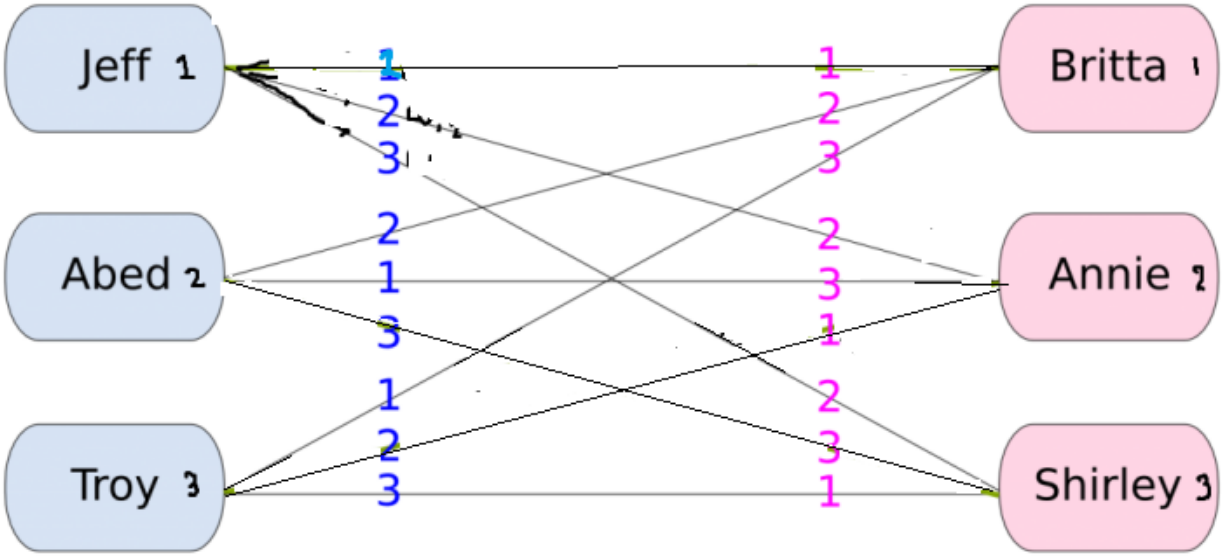
```
> restart :
> with(LinearAlgebra) :
> with(linalg) :
> with(simplex) :
>
```

στο διμερές γράφημα, κάθε εξερχόμενη ακμή από κόμβο (άνδρα/γυναίκα) έχει αριθμό (μπλε/ρόζ) που δηλώνει την σειρά προταιρερότητας της σύνδεσης με τον απέναντι κόμβο (πχ μικρός αριθμός μεγάλη επιθυμία σύνδεσης με τον απέναντι κόμβο). ορίζω μεταβλητή xij =**1** αν η ακμή (i,j) **ανήκει** στο matching (σημαίνει ο **i**-άντρας στο αριστερό μέρος έχει ταιρίαξει με την **j**-γυναίκα στο δεξιό μέρος), αλλιώς xij =**0 δεν** ανήκει στο matching.

```
>
```



Διαισθητικά αναλύουμε τους περιορισμούς σταθερότητας για κάθε μία ακμή.

Η ακμή (1,1) δηλώνει ότι ο 1-άντρας ταιρίαζει με την 1-γυναίκα. **A)** ο 1-άντρας προτιμά την 1-γυναίκα από όλες. **B)** η 1-γυναίκα προτιμά τον 1-άντρα από όλους.
Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε matching όπου έστω έχουμε x11= 0, τότε λόγω A & B αμφότεροι ο 1-άντρας και 1-γυναίκα θα προτιμούν να συνδεθούν μεταξύ τους και να τα χαλάσουν με τους αντίστοιχους συντρόφους τους. Οπότε θα είναι ασταθές.
Οπότε υποχρεωτικά ***x11* ≥ 1.**

Η ακμή (1,2) δηλώνει ότι ο 1-άντρας έχει σχέση με την 2-γυναίκα, μπαίνει στο άθροισμα η x12. C) ο 1-άντρας προτιμά την 1-γυναίκα από την 2-γυναίκα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x11. D) η 2-γυναίκα προτιμά τον 3-άντρα από τον 1-άντρα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x32.
Οπότε $x12 + x11 + x32 \geq 1$.

Η *ανισότητα δηλώνει είτε οι* (1, 2) *έχουν σχέση,*
είτε κάποιος από τους δυο έχει σχέση με πιο ισχυρή αντίστοιχη προτιμήση
. Αυτό είναι το φυσιολογικό κριτήριο σταθερότητας
. Αλλιώς αν και οι 2 *έχουν σχέση με χειρότερη προτίμηση τότε έχουμε αστάθεια*

. Δίοτι αν ισχύει :
$x12 + x11 + x32 = 0$ τότε ο 1 αντράς θα είναι αναγκαστικά (λόγω $x11 + x12 = 0$) με την 3 γυναίκα (που είναι η χειρότερη για αυτόν) δλδ $x13 = 1$ και η 2 γυναίκα θα είναι αναγκαστικά (λόγω $x12 + x32 = 0$) με τον 2 άντρα (που είναι ο χειρότερος για αυτήν) δλδ $x22 = 1$. Συνεπώς ο 1 άντρας και η 2 γυναίκα θέλουν 1000 % να χωρίσουν και δεν θα έχουμε σταθερότητα.

Η ακμή (1,3) δηλώνει ότι ο 1-άντρας έχει σχέση με την 3-γυναίκα, μπαίνει στο άθροισμα η x13. E) ο 1-άντρας προτιμά την 1-γυναίκα από την 3-γυναίκα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x11. F) ο 1-άντρας προτιμά την 2-γυναίκα από την 3-γυναίκα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x12. G) η 3-γυναίκα προτιμά τον 3-άντρα από τον 1-άντρα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x33.
Οπότε x13+ $x11 + x12 + x33 \geq 1$.

Η ανισότητα δηλώνει είτε οι $(1, 3)$ έχουν σχέση,
είτε κάποιος από τους δυο έχει σχέση με πιο ισχυρή αντίστοιχη προτιμήση
. Αυτό είναι το φυσιολογικό κριτήριο σταθερότητας
. Αλλιώς αν και οι 2 έχουν σχέση με αντίστοιχη χειρότερη προτίμηση τότε έχουμε αστάθεια
. Δίοτι αν ισχύει :
$x13 + x11 + x12 + x33 = 0$ τότε ο 1 αντράς θα είναι αναγκαστικά μόνος (λόγω $x13 + x11 + x12 = 0$) που είναι αδυνατον και η 2 γυναίκα θα είναι αναγκαστικά (λόγω $x13 + x33 = 0$) με τον 2 άντρα (που είναι ο χειρότερος για αυτήν) δλδ $x23 = 1$. Συνεπώς η 3 γυναίκα θέλει 1000 % να χωρίσει και να πάει με τον 1 που είναι single και δεν θα έχουμε σταθερότητα.

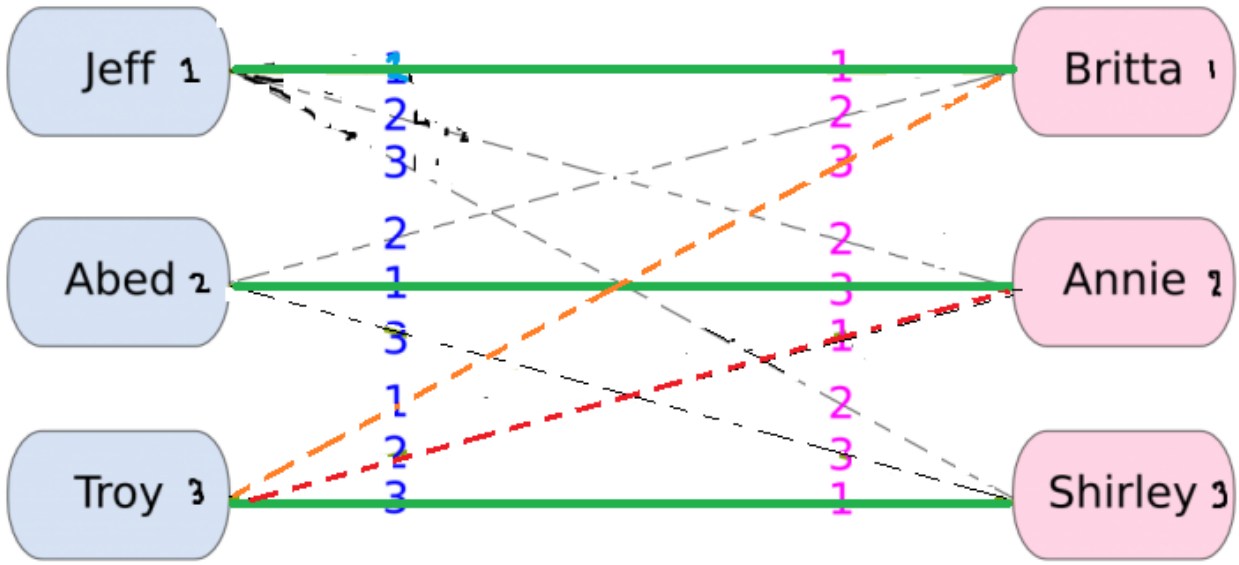
Η ακμή (2,1) δηλώνει ότι ο 2-άντρας έχει σχέση με την 1-γυναίκα, μπαίνει στο άθροισμα η x21. J) ο 2-άντρας προτιμά την 2-γυναίκα από την 1-γυναίκα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x22. H) η 1-γυναίκα προτιμά τον 1-άντρα από τον 2-άντρα, οπότε να μπει στο άθροισμα και η x11.
Οπότε x21 + $x22 + x11 \geq 1$.

Η ανισότητα δηλώνει είτε οι $(2, 1)$ έχουν σχέση,
είτε κάποιος από τους δυο έχει σχέση με πιο ισχυρή αντίστοιχη προτιμήση
. Αυτό είναι το φυσιολογικό κριτήριο σταθερότητας
. Αλλιώς αν και οι 2 έχουν σχέση με χειρότερη προτίμηση τότε έχουμε αστάθεια
. Δίοτι αν ισχύει :
$x21 + x22 + x11 = 0$ τότε ο 2 αντράς θα είναι αναγκαστικά (λόγω $x21 + x22 = 0$) με την 3 γυναίκα (που είναι η χειρότερη για αυτόν) δλδ $x23 = 1$ και η 1 γυναίκα θα είναι αναγκαστικά (λόγω $x21 + x11 = 0$) με τον 3 άντρα (που είναι ο χειρότερος για αυτήν) δλδ $x31 = 1$. Συνεπώς ο 2 άντρας και η 3 γυναίκα θέλουν 1000 % να χωρίσουν και δεν θα έχουμε σταθερότητα.

Όμοια συλλογιστική και για τις υπόλοιπες ακμές:
x22, x23 και *x31, x32, x33*, *δείτε στο πρόγραμμα τις αντίστοιχες ανισότητες.*

Σχηματικό παράδειγμα είναι οι πράσινες ακμές που είναι ένα ασταθές matching λόγω τις κόκκινης διακεκομένης ακμής $(3,2)$ *όπου* $x32=0$ *και επίσης* $x31=0$ *της πορτοκαλί διακεκομμένης . Ενώ αν είχαμε για την ακμή* $(3,2)$ *την ανίσωση* : $x32+x31\geq 1$ *τότε ... όλα οκευ ...*

>



> #*Περιορισμοί για stable matching*
constraints := {
#*περιορισμοί μονογαμικότητας: κάθε άντρας να ταιριάξει με <=1 γυναίκα*
$x11+x12+x13\leq 1, x21+x22+x23\leq 1, x31+x32+x33\leq 1,$
#*περιορισμοί μονογαμικότητας: κάθε γυναίκα να ταιρίαξει με* ≤ 1 *άντρα*
$x11+x21+x31\leq 1, x12+x22+x32\leq 1, x13+x23+x33\leq 1,$
#*περιορισμοί σταθερότητας: για να είναι stable οι ακμές* ***x11,x12, x13.***
$x11\geq 1, x12+x11+x32\geq 1, x13+x11+x12+x33\geq 1,$
#*περιορισμοί για να είναι stable οι ακμές x21,x22,x23*
$x21+x11+x22\geq 1, x22+x12+x32\geq 1, x23+x21+x22+x13+x33\geq 1,$
#*περιορισμοί για να είναι stable οι ακμές x31,x32,x33*
$x31+x11+x21\geq 1, x32+x31\geq 1, x33+x31+x32\geq 1\};$

$$constraints := \{1\leq x11, 1\leq x31+x32, 1\leq x11+x21+x31, 1\leq x12+x11+x32, 1\leq x12+x22+x32, 1\leq x21+x11+x22, 1\leq x31+x32+x33, 1\leq x13+x11+x12+x33, 1\leq x23+x21+x22+x13+x33, x11+x12+x13\leq 1, x11+x21+x31\leq 1, x12+x22+x32\leq 1, x13+x23+x33\leq 1, x21+x22+x23\leq 1, x31+x32+x33\leq 1\} \quad (1)$$

> #*θέτουμε μεταβλητές βάρους για την κάθε προτίμιση όλων των αντρών:*
$w11:=3; w12:=2; w13:=1;$
$w21:=2; w22:=3; w23:=1;$
$w31:=3; w32:=2; w33:=1;$

$$w11 := 3$$
$$w12 := 2$$
$$w13 := 1$$
$$w21 := 2$$
$$w22 := 3$$
$$w23 := 1$$
$$w31 := 3$$
$$w32 := 2$$
$$w33 := 1 \quad \textbf{(2)}$$

> #θέτουμε μεταβλητές βάρους για την κάθε προτίμιση όλων των γυναικών:
```
v11 := 3; v12 := 2; v13 := 1;
v21 := 2; v22 := 1; v23 := 3;
v31 := 2; v32 := 1; v33 := 3;
```

$$v11 := 3$$
$$v12 := 2$$
$$v13 := 1$$
$$v21 := 2$$
$$v22 := 1$$
$$v23 := 3$$
$$v31 := 2$$
$$v32 := 1$$
$$v33 := 3 \quad \textbf{(3)}$$

> #αθροίζουμε τα βάρη των ακμών μεταξύ τους ώστε να οριστούν οι ακμές του σχήματος:
```
c11 := w11 + v11; c12 := w12 + v12; c13 := w13 + v13;
c21 := w21 + v21; c22 := w22 + v22; c23 := w23 + v23;
c31 := w31 + v31; c32 := w32 + v32; c33 := w33 + v33;
```

$$c11 := 6$$
$$c12 := 4$$
$$c13 := 2$$
$$c21 := 4$$
$$c22 := 4$$
$$c23 := 4$$
$$c31 := 5$$
$$c32 := 3$$
$$c33 := 4 \quad \textbf{(4)}$$

> #ορίζουμε αντικειμενική συνάρτηση:
```
objective :=
c11*x11 + c12*x12 + c13*x13 +
c21*x21 + c22*x22 + c23*x23 +
c31*x31 + c32*x32 + c33*x33;
```

$$objective := 6\,x11 + 4\,x12 + 2\,x13 + 4\,x21 + 4\,x22 + 4\,x23 + 5\,x31 + 3\,x32 + 4\,x33 \quad \textbf{(5)}$$

> $z := maximize(objective, constraints, NONNEGATIVE);$

$$z := \{x11 = 1, x12 = 0, x13 = 0, x21 = 0, x22 = 0, x23 = 1, x31 = 0, x32 = 1, x33 = 0\} \quad \textbf{(6)}$$

```
> assign(z);
> objective;
```

13 **(7)**

Παρατηρούμε ότι έχουμε και σταθερότητα και η κοινωνική χαρά είναι 13 ελάχιστα μικρότερη της μέγιστης που ήταν 14 όπως είχαμε δει.

```
>
```