Πιθανότητες

Φροντιστήριο #1

Βασικές Έννοιες

• **Πείραμα Τύχης:** Το χαρακτηριστικό του είναι ότι σε μία εκτέλεσή του δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Μπορούμε όμως να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα.

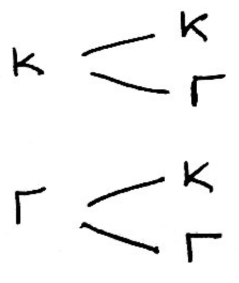
• **Δειγματικός Χώρος:** Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

π.χ. → Ρίψη ενός ζαριού (πείραμα τύχης)

Τότε, ο δειγματικός χώρος, $\underline{\Omega}$, του πειράματος τύχης είναι το σύνολο:

$$\underline{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

π.χ. → Ρίψη δύο νομισμάτων.



άρα $\underline{\Omega} = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$

Πειράματα τύχης

- Αιτιοκρατικά (γνωρίζω με βεβαιότητα το αποτέλεσμα)
- Στοχαστικά (δεν γνωρίζω με βεβαιότητα το αποτέλεσμα)

• <u>Ενδεχόμενο:</u> ενός πειράματος τύχης είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\underline{\Omega}$.

π.χ. → Στο παράδειγμα της ρίψης ενός ζαριού:

$A = \{1, 2\}$, $B = \{6\}$ δύο διαφορετικά ενδεχόμενα.

<u>Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων:</u>

Ό,τι γνωρίζω για τις πράξεις μεταξύ συνόλων:

$A \cup B$, $A \cap B$, $\varnothing$, $A - B$, A' , $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

<u>Τύποι De Morgan:</u>

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Πιθανοθεωρητικός τύπος για ισοπίθανα αποτελέσματα

Αν Ω ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος, στον οποίο όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο Α είναι ίση με:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} := \frac{\text{αριθμός στοιχείων του } A}{\text{αριθμός στοιχείων του } \Omega}$$

Παρατηρήσεις:

1) $P(A) \geq 0, \ \forall A \subseteq \Omega$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ανν $A \cap B = \emptyset$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \ \forall A, B \subseteq \Omega$

5) $P(A') = 1 - P(A)$

6) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $A \cap B = \emptyset$

Άσκηση: Αν για ένα ενδεχόμενο A ισχύει:

$$2P(A) = P(A') + 0,5$$

ν.δ.ο. $P(A) = P(A')$

Λύση:

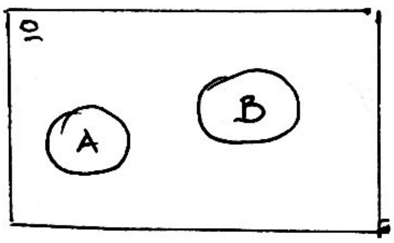
$$2P(A) = P(A') + 0,5 \xRightarrow{P(A') = 1 - P(A)}$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 1 - P(A) + 0,5 \Rightarrow 3P(A) = 1,5 \Rightarrow P(A) = 0,5.$$

Οπότε και $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5 = P(A)$ ■.

Άσκηση: Έστω A το ενδεχόμενο ο φοιτητής X βρίσκεται στις 9:00 το πρωί στο μάθημα «Πιθανότητες». Έστω B το ενδεχόμενο ο φοιτητής X βρίσκεται στις 9:00 το πρωί στο σπίτι του (και άρα όχι στο μάθημα). Έστω $P(A) = 0,3$ και $P(B) = 0,6$.
Ποιά η πιθανότητα ο φοιτητής X να μη βρίσκεται ούτε στο σπίτι του, ούτε στο μάθημα;

Λύση:



Τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα μεταξύ τους. (Μην σκεφτείτε την περίπτωση των διαδικτυακών μαθητών :))

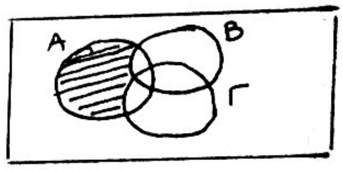
Άρα, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = 0,9$. Συνεπώς, $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 0,1$ ■.

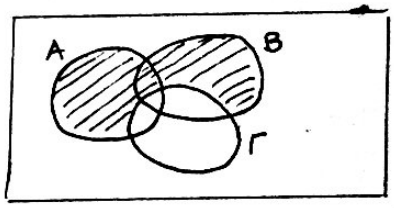
Συνολοθεωρητικές Εκφράσεις Καθημερινών Εκφράσεων.

A, B, Γ ενδεχόμενα.

- Μόνο το A συμβαίνει $\longrightarrow A \cap B^c \cap \Gamma^c$ ή $A - (B \cup \Gamma)$



- A και B συμβαίνουν αλλά όχι το Γ $\longrightarrow A \cap B \cap \Gamma^c$



- Τουλάχιστον 1 συμβαίνει $\longrightarrow A \cup B \cup \Gamma$
- Τουλάχιστον 2 συμβαίνουν $\longrightarrow (A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap A)$
- Και τα 3 συμβαίνουν $\longrightarrow A \cap B \cap \Gamma$
- Κανένα απο τα 3 δεν συμβαίνει $\longrightarrow (A \cup B \cup \Gamma)^c$
- Το πολύ ένα συμβαίνει $\longrightarrow (A^c \cap B^c \cap \Gamma) \cup (A^c \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A \cap B^c \cap \Gamma^c) \cup (A^c \cap B^c \cap \Gamma^c)$
- Το πολύ δύο συμβαίνουν $\longrightarrow (A \cap B \cap \Gamma)^c$
- Το πολύ τρία συμβαίνουν $\longrightarrow \underline{\Omega}$

Άσκηση: A, B ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Έστω ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

i) $P($τουλάχιστον ένα από τα A, B συμβαίνει$) =$

$$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ii) $P($ούτε το A, ούτε το B συμβαίνει$) = P((A \cup B)^c) =$

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

iii) $P($το πολύ ένα συμβαίνει$) = P((A \cap B)^c) =$

$$= 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$

iv) $P($μόνο το A συμβαίνει$) = P(A \cap B^c) = P(A - B) \overset{(*)}{=}$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(*) Θ.δ.ο. ισχύει: $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

Πράγματι, έστω $x \in [(A-B) \cup (A \cap B)] \Leftrightarrow x \in (A-B) \vee x \in (A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

Οπότε, $P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) \xrightarrow[\text{ξένα μεταξύ τους}]{A-B \text{ και } A \cap B} P(A-B) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Άσκηση: Έστω μία τράπουλα. Επιλέγω τυχαία ένα χαρτί.

i) Ποιά η πιθανότητα να είναι κόκκινο και όχι φιγούρα;

ii) — // — η αξία του επιλεγμένου χαρτιού να είναι τουλάχιστον 10; (θεωρούμε τους άσσους μεγαλύτερους του 10).

iii) — // — το ενδεχόμενο η αξία του επιλεγμένου χαρτιού να είναι το πολύ 4;

Λύση:

i) Κόκκινο: Καρό ή κούπα. (και όχι φιγούρα)

Δηλ. $\frac{52}{2} = 26$ τα κόκκινα χαρτιά.

Οι κόκκινες φιγούρες: $3+3=6$.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{20}{52}$.

ii) Θέλω να έχω: 10, J, Q, K, A σε όλα τα χρώματα. (καρό - κούπα - σπαθί - μπαστούνι).

Άρα: $\frac{5 \cdot 4}{52} = \frac{20}{52}$

iii) Θέλω 2, 3 ή 4 σε όλα τα χρώματα.

Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{52} = \frac{12}{52}$ ∎

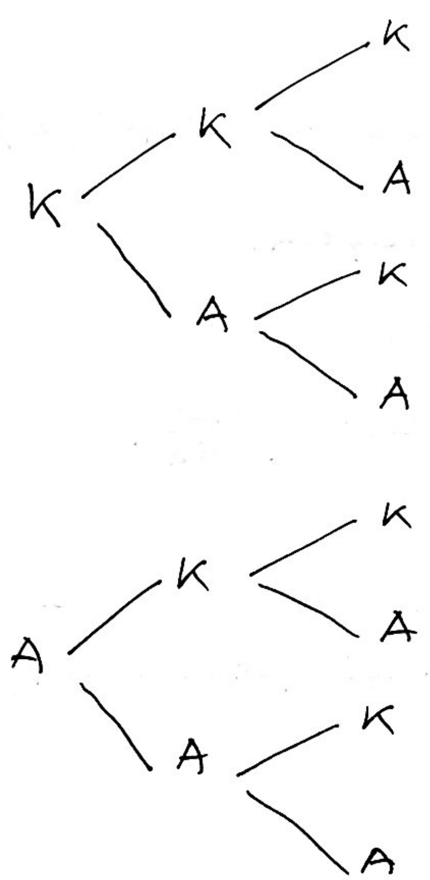
Άσκηση: Έστω μία οικογένεια με 3 παιδιά. Υποθέτω ότι η πιθανότητα να γεννηθεί κανείς αγόρι ή κορίτσι είναι η ίδια. Βρείτε την πιθανότητα:

i) Το ένα μόνο παιδί να είναι κορίτσι

ii) Τουλάχιστον 2 παιδιά να είναι κορίτσια

iii) Κανένα παιδί να μην είναι κορίτσι.

Λύση:



$\Omega = \{KKK, KKA, KAK, KAA, AKK, AKA, AAK, AAA\}$

Οπότε: i) $\frac{3}{8}$, ii) $\frac{4}{8}$, iii) $\frac{1}{8}$

Άσκηση: Μία εταιρεία χρησιμοποιεί 2 επιμελητές X και Y για τον έλεγχο ενός συγγράμματος. Του X του ξεφεύγουν 12% τυπογραφικά λάθη και του Y του ξεφεύγουν 15%. Υποθέστε ότι οι επιμελητές εργάζονται ανεξάρτητα.

i) Ποιά η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο τυπογραφικό λάθος να ξεφύγει και από τους 2;

ii) Αν το σύγγραμμα έχει 1000 τυπογραφικά λάθη, ποιό είναι το αναμενόμενο πλήθος λαθών που θα ξεφύγουν κι από τους 2 επιμελητές;

Λύση:

i) Έστω A το ενδεχόμενο: «Το τυχαία επιλεγμένο τυπογραφ. λάθος ξέφυγε από τον X».

Έστω B το ενδεχόμενο: «Το τυχαία επιλεγμένο τυπογραφ. λάθος ξέφυγε από τον Y».

Τότε $P(A) = \frac{12}{100}$, $P(B) = \frac{15}{100}$

Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}12 \cdot 0{,}15 = 0{,}018 = \frac{1{,}8}{100}$

ii) Στα 100 τυπογρ. λάθη ξεφεύγουν 1,8

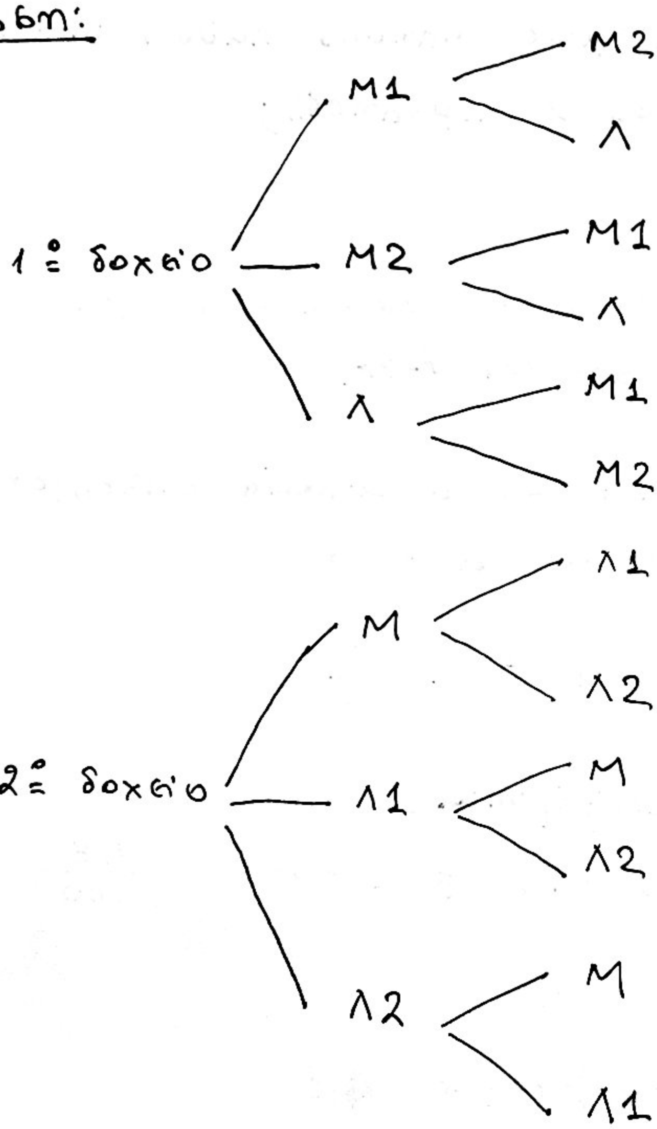
1000 x;

$x = 18$ λάθη.

■

Άσκηση: Ένα δοχείο περιέχει 2 μαύρες μπάλες (Μ1 & Μ2) και μία λευκή (Λ). Ένα δεύτερο δοχείο περιέχει μία Μαύρη (Μ) και δύο λευκές (Λ1 & Λ2).
Επιλέγεται τυχαία ένα δοχείο από τα δύο.
Στη συνέχεια επιλέγεται μία μπάλα από αυτό τυχαία και έπειτα μία δεύτερη μπάλα από το ίδιο δοχείο, χωρίς επανατοποθέτηση.
Ποιά η πιθανότητα να επιλεγούν δύο μπάλες διαφορ. χρώματος;

Λύση:



Άρα, έχω 12 ισοπίθανα αποτελέσματα.

A : Το ενδεχόμενο να επιλεγούν 2 μπάλες διαφορ. χρώματος.

Τότε, $P(A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ∎.

Άσκηση: Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες κάλτσες και 2 γαλάζιες. Ανασύρονται τυχαία 2 κάλτσες. Να βρεθεί η πιθανότητα οι κάλτσες να είναι ζευγάρι.

Λύση:

Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ διαφορετικοί τρόποι να τραβήξω 2 κάλτσες από τις 4.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6 \text{ τρόποι.}$$

$$\{ A_1A_2,\ A_1\Gamma_1,\ A_2\Gamma_1,\ A_1\Gamma_2,\ A_2\Gamma_2,\ \Gamma_1\Gamma_2 \}$$

Από αυτούς, μόνο 2 είναι ζευγάρι.

Άρα, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(όπου A το ενδεχόμενο να τραβήξω 2 κάλτσες ίδιου χρώματος).

Άσκηση: Ποιά η πιθανότητα να έρθει ένα τουλάχιστον 4 σε δύο ρίψεις ζαριού;

Λύση:

Έστω A_1 το ενδεχόμενο : "φέρνω 4 στην πρώτη ρίψη"

Έστω A_2 το ενδεχόμενο : "φέρνω 4 στην δεύτερη ρίψη".

α' τρόπος: Ζητώ την $P(A_1 \cup A_2)$.

Τα ενδεχόμενα A_1 & A_2 είναι ανεξάρτητα.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

β' τρόπος: P(ένα τουλάχιστον 4 στις 2 ρίψεις) =

= 1 − P(κανένα 4 στις 2 ρίψεις) =

= 1 − P(όχι 4 στην 1η ρίψη και όχι 4 στη 2η ρίψη) =

$$= 1 - P(A_1' \cap A_2') =$$

$$= 1 - P(A_1') \cdot P(A_2') =$$

$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

γ' τρόπος: Πλήθος περιπτώσεων στις 2 ρίψεις: $36 = 6 \times 6$.
Πλήθος περιπτώσεων να συμβεί το A_1 και όχι το A_2 $= 5$
πλήθος περιπτώσεων να συμβεί το A_2 και όχι το A_1 $= 5$
πλήθος περιπτώσεων να συμβεί το A_1 και το A_2 $= 1$

Άρα, το πλήθος των περιπτώσεων να συμβεί το A_1 είτε το A_2 (ή και τα δύο) είναι: $5+5+1 = 11$.

Άρα, $P(A_1 \cup A_2) = \frac{11}{36}$ ∎.