Πιθανότητες & Στατιστική

Φροντιστήριο # 12

Ασκήσεις Επανάληψης

Άσκηση: Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Έστω δύο ενδεχόμενα του Ω, έ.ω: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ & $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Να βρείτε τις ακόλουθες πιθανότητες:

α) Τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από τα A & B να συμβεί.

β) Κανένα από τα δύο ενδεχόμενα A & B να συμβεί.

γ) Μόνο το A συμβαίνει.

δ) Το πολύ ένα από τα δύο ενδεχόμενα συμβαίνει.

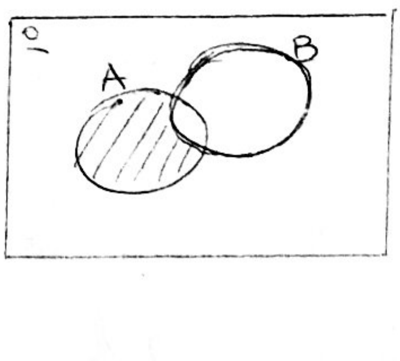
Λύση:

α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

β) $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

γ) $P(A \cap B') \overset{(*)}{=} P(A) - P(A \cap B) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



(*) $A \cap B' = A - (A \cap B)$

δ) $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. ■

<u>Άσκηση:</u> Επιλέγω 5 άτομα από 100 συνολικά για να φτιάξω μια επιτροπή. Εάν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής

α) Πόσες δυνατές 5άδες θα φτιάξω;

β₁) Αν στα 100 άτομα, οι 40 είναι άνδρες και οι 60 γυναίκες, ποια η πιθανότητα να επιλέξω 2 άνδρες και 3 γυναίκες

β₂) .... Ποιά η πιθανότητα να επιλέξω 4 άνδρες και 1 γυναίκα

β₃) ... Ποιά η πιθανότητα να επιλέξω μόνο άντρες.

<u>Λύση:</u>

a) Δυνατές 5άδες: $\binom{100}{5} = \frac{100!}{5!(100-5)!} = \frac{100!}{5!\,95!} = \frac{96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

β₁) $P = \frac{\binom{40}{2}\binom{60}{3}}{\binom{100}{5}}$

β₂) $P = \frac{\binom{40}{4}\binom{60}{1}}{\binom{100}{5}}$

β₃) $P = \frac{\binom{40}{5}}{\binom{100}{5}}$

Άσκηση: Ένα δοχείο περιέχει 6 λευκούς και 5 μαύρους βόλους. Αν τραβήξουμε τυχαία δύο βόλους απο το δοχείο Ποιά η πιθανότητα:

α) να είναι και οι δύο λευκοί;

β) να είναι ο ένας λευκός και ο άλλος μαύρος;

Λύση:

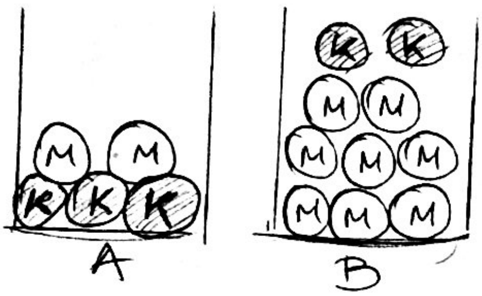
Τους 2 βόλους απο τους 11 έχω $\binom{11}{2}$ τρόπους να τους τραβήξω.

α) $P = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \dfrac{\frac{6!}{2!\,4!}}{\frac{11!}{2!\,9!}} = \dfrac{\frac{5\cdot 6}{2}}{\frac{10\cdot 11}{2}} = \dfrac{30}{10\cdot 11} = \dfrac{3}{11}$

β) $P = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \dfrac{\frac{6!}{1!\,5!}\cdot\frac{5!}{1!\,4!}}{\frac{11!}{2!\,9!}} = \dfrac{6\cdot 5}{\frac{10\cdot 11}{2}} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 2}{10\cdot 11} = \dfrac{6}{11}$. ∎

Άσκηση: Ένα κουτί Α περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες. Ένα άλλο κουτί Β περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και, αν έρθει (Κ), βγάζουμε μία σφαίρα απο το κουτί Α, ενώ αν έρθει (Γ), βγάζουμε μία σφαίρα απο το κουτί Β. Ποιά είναι η πιθανότητα να βγει κόκκινη σφαίρα?

Λύση:



Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: Να βγάλω σφαίρα απο το Α κουτί

Β: — // — Β — // —

Κ: Να βγάλω κόκκινη σφαίρα.

Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας(*):

$$P(K) = P(A)\cdot P(K/A) + P(B)\cdot P(K/B) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$ ■

(*) Υπενθύμιση: Θ. Ολικής Πιθανότητας:

B ενδεχ. ενός δ.χ. Ω με $0<P(B)<1$ και $A \subseteq \Omega$.

Τότε: $P(A) = P(A/B)\cdot P(B) + P(A/B')\cdot P(B')$

<u>Άσκηση:</u> Ας υποθέσουμε ότι αυτός που ρίχνει το νόμισμα, στην προηγούμενη άσκηση, δε μας λέει αν ήρθε κεφάλι ή γράμματα και συνεπώς δεν ξέρουμε από ποιό κουτί βγήκε η σφαίρα. Ξέρουμε όμως ότι βγήκε κόκκινη σφαίρα. Ποιά η πιθανότητα να έφερε Κορώνα (K)?

<u>Λύση:</u>

Την κόκκινη σφαιρα την τραβάει από το κουτί A αν φέρει (K). Οπότε, ζητεί την πιθανότητα:

$$P(A/K) \underset{=}{\overset{\text{Θ. Bayes}^{(**)}}{=}} \frac{P(K/A)\cdot P(A)}{P(A)\cdot P(K/A) + P(B)\cdot P(K/B)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{3}{4}$$ ■

(**) Υπενθύμιση: Θεώρημα Bayes:

Έστω δ.χ. Ω και $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του Ω (δηλ. η ένωσή τους δίνει το Ω και ανά 2 είναι ξένα μεταξύ τους), τότε, αν $A \subseteq \Omega$ με $P(A) \neq 0$ έχω ότι:

$$P(B_k / A) = \frac{P(A/B_k) \cdot P(B_k)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) P(B_2) + \ldots + P(A/B_n) P(B_n)}$$

όπου $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$.

Άσκηση: Ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες, 3 άσπρες, 9 μπλέ σφαίρες. Βγάζω 3 σφαίρες στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα:

α) να είναι και οι τρεις κόκκινες;

β) να είναι και οι τρεις άσπρες;

γ) να είναι 2 κόκκινες & 1 άσπρη;

δ) τουλάχιστον μία άσπρη;

ε) μία από κάθε χρώμα;

στ) να βγουν στη σειρά : κόκκινη - άσπρη - μπλέ;

Λύση:

α) Έστω K_1: το ενδεχόμενο να έχω κόκκινη στο 1η προσπάθεια

$\boxed{\text{α' τρόπος}}$

K_2: — // — 2η — // —

K_3: — // — 3η — // —

Τότε γιατί: $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) \xrightarrow[\text{πιθανοτήτων}]{\text{πολ/κος νόμος}^{(***)}}$

$$= P(K_1) \cdot P(K_2/K_1) \cdot P(K_3/K_1 \cap K_2) =$$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

$\boxed{\text{Β' τρόπος}}$ $P = \dfrac{(\text{με πόσους τρόπους διαλ. 3 από τις 8 κόκκινες})}{(\text{με πόσους τρόπους διαλ. 3 από τις 20})} =$

$$= \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{8!}{3!\,5!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} = \frac{\frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3}}{\frac{18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3}} = \frac{14}{285}$$

β) Όμοια με πριν: $P = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{1}{1140}$.

(Λύνεται και με τον πολ/κο νόμο των πιθανοτήτων)

(***) Πολ/κος Νόμος Πιθανοτήτων:

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_K$ μία διαμέριση του Ω

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_K) = P(A_K / A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{K-1}) \cdot P(A_{K-1} / A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{K-2}) \cdots$$
$$\cdots P(A_2/A_1) \cdot P(A_1)$$

γ) $P = \dfrac{\binom{8}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \ldots$

δ) Έστω A: το ενδεχόμενο έχω τουλάχιστον 1 άσπρη.

Τότε A': το ενδεχόμενο δεν έχω καμία άσπρη.

$$P(A') = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{57}$$

Οπότε $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \dfrac{34}{57} = \dfrac{23}{57}$.

ε) $P = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \ldots$

στ) Έστω K_1: το ενδεχόμενο να έχω κόκκινη την $1^{η}$ φορά.

A_2: — // — άσπρη την $2^{η}$ — // —

M_3: — // — μπλε την $3^{η}$ — // —.

Τότε: $P(K_1 \cap A_2 \cap M_3) = P(K_1) \cdot P(A_2 / K_1)\, P(M_3 / K_1 \cap A_2) =$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{3}{95}$$

■

Άσκηση: Το πλήθος των ατυχημάτων σε μια διασταύρωση είναι μια τ.μ. Poisson με μέση τιμή $\mu = 3,5$ ατυχήματα ανά εβδομάδα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Να μη συμβεί ατύχημα στη διάρκεια μιας εβδομάδας

ii) Να συμβούν 5 ή περισσότερα ατυχήματα σε μια εβδομάδα

iii) Να συμβεί ένα ατύχημα σήμερα.

Λύση:

Υπενθύμιση: Κατανομή Poisson

$$f_X(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

i) $P(X=0) = \dfrac{e^{-3,5} \cdot (3,5)^0}{0!} = e^{-3,5} \simeq 0,0302$ ή $3,02\%$

ii) $P(X \geq 5) = 1 - P(X<5) = 1 - P(X \leq 4) =$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)]$

$= 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-3,5} \dfrac{3,5^k}{k!} \simeq 0,2746$ ή $27,46\%$.

iii) 1 εβδομάδα έχει 7 ημέρες.
Άρα
Σε 7 ημέρες έχουμε 3,5 ατυχήματα.
Σε 1 ημέρα λ;

$$\lambda = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$$

Σε ένα πείραμα Poisson, η πιθανότητα επιτυχίας σ'ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος.

Οπότε: $P(X=1) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{2})^1}{1!} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

Άσκηση: Ένας φοιτητής υπολογίζει ότι με βάση τους βαθμούς του και την πρακτική άσκηση που θα κάνει έχει πιθανότητα 70% να δεχθεί μια προσφορά εργασίας από κάθε επιχείρηση που θα στείλει το βιογραφικό του. Αν στείλει βιογραφικό σε 4 μόνο επιχειρήσεις, ποιά η πιθανότητα να μην δεχθεί καμία προσφορά εργασίας?

Λύση:

Διωνυμικό πείραμα: Εδώ ως "επιτυχία" θεωρούμε την προσφορά εργασίας με πιθανότητα επιτυχίας $p=0,7$.

Άρα, πιθανότητα αποτυχίας $1-p=0,3=q$.

Το πλήθος των δοκιμών $n=4$.

Άρα, έστω η τ.μ. $X :=$ ο αριθμός των επιτυχιών στις n επαναλήψεις.

Τότε, $X \sim B(4,\ 0.7)$

<u>Υπενθύμιση:</u> <u>Διωνυμική κατανομή</u>

$X \sim B(n,\ p)$ όπου p η πιθανότητα "Επιτυχίας"

n: ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος.

Τότε $f_X(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$,

$x = 0, 1, \ldots, n.$

Άρα, εδώ $f_X(x) = P(X=x) = \binom{4}{x} 0{,}7^x \cdot 0{,}3^{4-x}$.

Οπότε $f_X(0) = P(X=0) = \binom{4}{0} 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^4 =$

$= \dfrac{4!}{0!\ 4!} 0{,}3^4 = 1 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}0081$ ή $0{,}81\%$.

■

__Άσκηση:__ Το καινούριο εμβόλιο, για την καταπολέμηση της πανδημίας, έχει 70% πιθανότητα ανοσοποιήσεως των ανθρώπων. Ένας μεγάλος πληθυσμός εμβολιάζεται και ορισμένοι άνθρωποι, απο αυτούς που εμβολιάστηκε, διαλέγονται τυχαία για εργαστηριακή παρακολούθηση.

i) Ποιά η πιθανότητα να βρούμε 3 ανοσοποιημένους όταν διαλέξουμε 10;

ii) Ποιά η πιθανότητα να χρειαστεί να διαλέξουμε 4 ανθρώπους μέχρι να βρούμε τον πρώτο ανοσοποιημένο;

__Λύση:__

i) Έστω $X :=$ μετράει το πλήθος των ανοσοποιημένων.

Τότε, $X \sim B(10, 0.7)$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^7$$

ii) Έστω τ.μ. $Y :=$ μετράει το πλήθος των αποτυχιών έως την 1η επιτυχία.

Τότε $Y \sim Ge(0{,}7)$

Υπενθύμιση: Γεωμετρική Κατανομή

Δοκιμές Bernoulli → p: πιθανότητα "επιτυχίας"
↳ 1-p: πιθανότητα "αποτυχίας"

$X :=$ αριθμός δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της $1^{ης}$ επιτυχίας.

Τότε $X \sim Ge(p)$.

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1} p \quad , \quad x = 0, 1, \dots$$

Οπότε, εδώ: $P(Y=4) = (1-0,7)^3 \cdot 0,7 \simeq 0,0189$. ■

__Άσκηση:__ Έστω μια οικογένεια 4 παιδιών. Υπολογίστε την πιθανότητα:

i) να έχει τουλάχιστον 1 αγόρι

ii) να έχει τουλάχιστον 1 αγόρι και τουλάχιστον 1 κορίτσι

(Υποθέτουμε ότι σε μία γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι)

__Λύση:__

Έστω $X :=$ ο αριθμός των αγοριών στην οικογένεια.

$$X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right), \qquad f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

i) • $P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} =$

Η πιθανότητα να έχω 1 αγόρι

$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$

• $P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{4}$

Η πιθανότητα να έχω 2 αγόρια

$= \frac{3}{8}$

• $P(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Η πιθανότητα να έχω 3 αγόρια

• $P(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{4!}{4!\,0!} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = \frac{1}{16}.$

Η πιθανότητα να έχω 4 αγόρια

Άρα, $P(\text{τουλάχ. } 1 \text{ αγόρι}) = P(X \geq 1) =$

$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

$\boxed{\text{β' τρόπος}}$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) \overset{(*)}{=} 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$

(*) όπου $P(X=0) \left(= P(\text{κανένα αγόρι})\right) =$

$$= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{0!\,4!} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

ii) $P(\text{τουλαχ. } 1 \text{ αγόρι } \& \text{ τουλάχ. } 1 \text{ κορίτσι}) =$

$$= 1 - P(\text{κανένα αγόρι}) - P(\text{κανένα κορίτσι}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}.$$

■