Πιθανότητες

Φροντιστήριο #3

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω B ενδεχόμενο ενός δ.χ. Ω, με $0 < P(B) < 1$. Τότε $\forall A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι:

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B') \cdot P(B')$$

Απόδειξη:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

Επειδή τα $A \cap B$ & $A \cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους, έχω:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \quad (*)$$

Όμως:

$$\left.\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \\ P(A/B') &= \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \Rightarrow P(A \cap B') = P(A/B') \cdot P(B') \end{aligned}\right\} (I)$$

Η $(*) \overset{(I)}{\Rightarrow} \quad P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B') \cdot P(B')$ ■.

Άσκηση: Έστω μία ασφαλιστική εταιρεία, όπου κάθε πελάτης ταξινομείται, ανάλογα με το ύψος των ετήσιων ζημιών που προκαλεί, σε 2 κατηγορίες: I (υψηλού κινδύνου) & II (χαμηλού κινδύνου). Ισχύει ότι το 25% των πελατών ανήκει στην I. και το 75% των πελατών στην II. Η πιθανότητα να προκαλέσει κάποιος ένα τουλάχιστον ατύχημα εντός του έτους είναι 0,6, αν ανήκει στην I κατηγορία και 0,3 αν ανήκει στη II κατηγορία. Ποιά η πιθανότητα να προκαλέσει ατύχημα εντός του έτους κάποιος νέος πελάτης;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : ο πελάτης προκαλεί ατύχημα εντός του πρώτου έτους.

B : ο πελάτης ανήκει στην κατηγορία I.

Από θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(A) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/B') \cdot P(B') \quad (*)$$

Από υπόθεση ισχύουν τα εξής:

$P(B) = 0,25$, $P(B') = 0,75$

$P(A/B) = 0,6$, $P(A/B') = 0,3$

Άρα, η (*) γίνεται: $P(A) = 0,6 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,75 = 0,375$

δηλ. 37,5 %. ■.

Γενικά ισχύει:

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

Έστω $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ μία διαμέριση(*) του Ω με $P(B_i) > 0, \forall i = 1, \ldots, n$.

Έστω $A \subseteq \Omega$. Τότε:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A/B_n) \cdot P(B_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

((*) διαμέριση: $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ και $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i,j = 1,\ldots,n, \ i \neq j$)

Πολλαπλασιαστικός Νόμος των Πιθανοτήτων

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_K$ ενδεχόμενα του $\underline{\Omega}$. Τότε:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_K/A_1 \cap \dots \cap A_{K-1})$$

π.χ. $\rightarrow$ Επιλέγω 3 χαρτιά χωρίς επανάθεση από μία τράπουλα 52 φύλλων. Ποιά η πιθανότητα να έχω 3 άσσους;

Λύση:

$A_i = \{ i$ χαρτί άσσος $\}$, $i = 1, 2, 3$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) =$$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}. \blacksquare$$

Άσκηση: Μετά από μία ένοπλη ληστεία η αστυνομία συλλαμβάνει 10 υπόπτους. Οι 4 απο τους 10 έχουν πράγματι συμμετάσχει στη ληστεία. Ο ανακριτής διαλέγει για ανάκριση ένα άτομο στη τύχη. Στη συνέχεια ένα δεύτερο και έπειτα ένα τρίτο άτομο. Ποιά η πιθανότητα τα 3 άτομα να είναι είτε και τα τρία ένοχα, είτε και τα τρία αθώα;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A_i : το i-άτομο που επιλέχθηκε είναι αθώο

E_i : — // — ένοχο $\quad i = 1, 2, 3$.

Τότε, ζητώ την πιθανότητα:

$$P\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3)\right).$$

Επειδή A_i και E_i ξένα μεταξύ τους, έχω:

$$P\Big((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3)\Big) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) + P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) \cdot P(E_3/E_1 \cap E_2) =$$

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{144}{720} = 20\% \ \blacksquare.$$

Διάφορες Ασκήσεις

<u>Άσκηση:</u> Ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες, 3 άσπρες, 9 μπλε σφαίρες. Βγάζουμε 3 σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα:

i) να είναι και οι 3 κόκκινες

ii) —//— 3 άσπρες

iii) —//— 2 κόκκινες και 1 μπλε

iv) —//— Τουλάχιστον 1 άσπρη

v) —//— μία από κάθε χρώμα

vi) να βγουν στη σειρά κόκκινη, άσπρη, μπλε.

<u>Λύση:</u>

i) Έστω K_i το ενδεχόμενο: "κόκκινη σφαίρα στο i-τράβηγμα", $i = 1, 2, 3$.

Τότε θέλω $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3) \xrightarrow[\text{πιθανοτήτων}]{\text{πολ/κος νόμος}} P(K_1) \cdot P(K_2/K_1) \cdot P(K_3/K_2 \cap K_1) =$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

Άλλος τρόπος για το (i):

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P = \frac{\text{πλήθος εκλογών 3 σφαιρών από 8 κόκκινες}}{\text{πλήθος εκλογών 3 σφαιρών από 20 σφαίρες}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{8!}{3!\,5!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} = \frac{\frac{6\cdot7\cdot8}{2\cdot3}}{\frac{18\cdot19\cdot20}{2\cdot3}} = \frac{56}{6\cdot19\cdot10} = \frac{14}{285}.$$

ii) $$P = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{3!}{3!\,0!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} = \frac{1}{\frac{18\cdot19\cdot20}{2\cdot3}} = \frac{1}{1140}.$$

iii) $$P = \frac{\binom{8}{2}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}}$$

iv) Θα υπολογίσω την πιθανότητα να έχω καμία άσπρη:

$$P = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{17!}{3!\,14!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} = \frac{\frac{15\cdot16\cdot17}{2\cdot3}}{\frac{18\cdot19\cdot20}{2\cdot3}} = \frac{34}{57}$$

Άρα, η πιθανότητα να έχω τουλάχιστον 1 άσπρη είναι:

$$P_1 = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$$

v) $$P = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}}$$

vi) $$P(K_1 \cap A_2 \cap M_3) = P(K_1)\cdot P(A_2/K_1)\cdot P(M_3/K_1\cap A_2) =$$

$$= \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{9}{18} = \frac{3}{95} \quad ■.$$

Άσκηση: Σ' ένα εργαστήριο προσπαθούν να χρωματίσουν πολλά κύτταρα. Τα νεαρά κύτταρα χρωματίζονται σωστά στο 90% των περιπτώσεων, ενώ τα πιο μεγάλα σε ηλικία χρωματίζονται σωστά στο 70% των περιπτώσεων.

i) Αν ένα 30% των κυττάρων είναι νεαρά, ποιά η πιθανότητα ένα κύτταρο να χρωματιστεί σωστά;

ii) Τυχαία επιλέγεται ένα κύτταρο, ποιά η πιθανότητα το κύτταρο να είναι νεαρό, αν είναι σωστά χρωματισμένο;

Λύση:

A: "νεαρό κύτταρο" , B: "σωστός χρωματισμός".

$P(A) = 0,3$, $P(A') = 0,7$, $P(B/A) = 0,9$, $P(B/A') = 0,7$

i) $P(B) \xlongequal[\text{Πιθανότητας}]{\text{Θεώρημα Ολικής}} P(B/A)\cdot P(A) + P(B/A')\cdot P(A') =$

$= 0,9 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,76$

ii) $P(A/B) \xlongequal{\text{Θεώρημα Bayes}} \dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)} = \dfrac{0,9 \cdot 0,3}{0,76} = 0,355$ ∎

Άσκηση: Το 20% των φυτών ενός πληθυσμού αναπτύσσεται σε έδαφος πλούσιο σε θρεπτικά συστατικά, ενώ το υπόλοιπο σε έδαφος φτωχό. Για τα φυτά που αναπτύσσονται σε πλούσιο έδαφος υπάρχει 20% πιθανότητα να μολυνθούν από κάποιο μύκητα, ενώ για τα φυτά που αναπτύσσονται σε φτωχό έδαφος αυτή η πιθανότητα είναι 60%.

i) Ποιό το ποσοστό του πληθυσμού μολύνεται από τον μύκητα;

ii) Δεδομένου ότι βρήκατε ένα φυτό μολυσμένο από τον μύκητα, ποιά η πιθανότητα να ~~βρίσκεται~~ σε πλούσιο έδαφος;

iii) Τι ποσοστό των μη-μολυσμένων φυτών αναπτύσσεται σε πλούσιο έδαφος;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

Π = { το φυτό αναπτύσσεται σε πλούσιο έδαφος }

Μ = { το φυτό μολύνεται από τον μύκητα }

Άρα, $P(\Pi) = 0,2$, $P(\Pi') = 0,8$

$P(M/\Pi) = 0,2$, $P(M/\Pi') = 0,6$.

Προκύπτει ότι: $P(M'/\Pi) = 1 - P(M/\Pi) = 0,8$.

i) $P(M) \xrightarrow[\text{πιθανότητας}]{\text{θεωρ. Ολικής}} P(M/\Pi) \cdot P(\Pi) + P(M/\Pi') \cdot P(\Pi') =$

$= 0,2 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,52$

Άρα, το 52% του πληθυσμού μολύνεται από τον μύκητα.

ii) $P(\Pi/M) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=\!=\!=} \dfrac{P(M/\Pi)\cdot P(\Pi)}{P(M)} = \dfrac{0,2\cdot 0,2}{0,52} = 0,077$

iii) $P(\Pi/M') \overset{\text{Θ. Bayes}}{=\!=\!=} \dfrac{P(M'/\Pi)\cdot P(\Pi)}{P(M')} = \dfrac{0,8\cdot 0,2}{0,48} = \dfrac{2\cdot 10^{-1}\cdot 8\cdot 10^{-1}}{6\cdot 8\cdot 10^{-2}} =$

$= \dfrac{1}{3}$

Το $\frac{1}{3}$ των μη μολυσμένων φυτών αναπτύσσεται σε πλούσιο έδαφος.

■.

Άσκηση: Έστω ότι ρίχνω ένα ζάρι και πληροφορούμαι ότι έφερα ζυγό αριθμό. Ποιά η πιθανότητα να έχω φέρει 2 ?

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα: $A = \{\text{έφερα } 2\}$, $B = \{\text{έφερα ζυγό}\}$.

$P(A/B) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=\!=\!=} \dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)} = \dfrac{1\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3}$

ή

$P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{1}{3}$

ή

Ο μειωμένος δ.χ. Ω έχει 3 στοιχεία : $\{2, 4, 6\}$ (← οι ζυγοί)

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι : $\frac{1}{3}$.