Πιθανότητες

Φροντιστήριο #4.

<u>Άσκηση:</u> Ένα είδος πουλιών υπάρχει σε 3 χρώματα: κόκκινο, μπλε, πράσινο. Το 20% είναι κόκκινα, το 30% είναι μπλε και το 50% πράσινα.

Έστω ότι τα θηλυκά πουλιά προτιμούν τα κόκκινα αρσενικά από τα μπλε και τα μπλε από τα πράσινα, αλλά ζευγαρώνουν με το πρώτο αρσενικό που θα βρουν.

i) Ποιά η πιθανότητα ένα θηλυκό να ζευγαρώσει με ένα κόκκινο αρσενικό; Με ένα μπλε; Με ένα πράσινο;

ii) Αν τα θηλυκά διαλέγουν το καλύτερο (με βάση τις προτιμήσεις τους στο χρώμα) από τα δύο πρώτα αρσενικά που συναντούν, ποιά η πιθανότητα να ζευγαρώσει ένα θηλυκό με ένα πράσινο αρσενικό;

<u>Λύση:</u>

Έστω τα ενδεχόμενα:

K: "Ζευγαρώνει με κόκκινο"

M: "Ζευγαρώνει με μπλε"

Π: "Ζευγαρώνει με πράσινο"

i) Τότε $P(K) = 0,2$, $P(M) = 0,3$, $P(\Pi) = 0,5$.

ii) Έστω τα ενδεχόμενα:

K_i : " Το αρσενικό που συναντάει την i-φορά είναι κόκκινο"
M_i : " —— " —— — // — μπλέ"
Π_i : " —— // —— — // — πράσινο"

$i = 1, 2$.

• Τότε $P(\Pi) = P$(το θηλυκό ζευγαρώνει με πράσινο).
Αυτό το ενδεχόμενο συμβαίνει μόνο αν και τα δύο πουλιά που θα συναντήσει είναι πράσινα.

Άρα, $P(\Pi) = P(\Pi_1 \cap \Pi_2) = P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

• Τότε $P(M) = P$(το θηλυκό ζευγαρώνει με μπλέ).
Αυτό το ενδεχόμενο συμβαίνει αν είτε το θηλυκό συναντήσει δύο μπλέ ή ένα μπλέ κι ένα πράσινο.

Άρα, $P(M) = P(M_1 \cap M_2) + P(\Pi_1 \cap M_2) + P(M_1 \cap \Pi_2) =$
$= 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}39$

• $P(K) = P$(το θηλυκό ζευγαρώνει με κόκκινο).
Αυτό το ενδεχόμενο συμβαίνει όταν: είτε συναντήσει δύο κόκκινα, είτε ένα κόκκινο και ένα μπλέ, είτε ένα κόκκινο και ένα πράσινο).

Άρα, $P(K) = P(K_1 \cap K_2) + P(K_1 \cap M_2) + P(K_2 \cap M_1) +$
$+ P(K_1 \cap \Pi_2) + P(\Pi_1 \cap K_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 +$
$+ 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}36$ ∎

Άσκηση: Όταν κάποιος χρησιμοποιεί τα μέσα μαζικής μεταφοράς το πρωί για να πάει στη δουλειά του, έχει βρεθεί ότι πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων. Όταν κάποιος πηγαίνει με το Ι.Χ. αυτοκίνητό του πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων.

Επίσης, το 80% του πληθυσμού προτιμά τα μέσα μαζικής μεταφοράς και το 20% το Ι.Χ. αυτοκίνητό τους.

i) Ποιά η πιθανότητα να πάει κανείς καθυστερημένος στη δουλειά του μία μέρα;

ii) Αν μια μέρα πήγε καθυστερημένος, ποιά η πιθανότητα να χρησιμοποίησε τα μέσα μαζικής μεταφοράς;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

K = "καθυστερημένος στη δουλειά του"

A = " χρησιμοποιεί το Ι.Χ. αυτοκίνητό του"

M = " —//— μέσα μαζικής μεταφοράς"

Τότε:

$$P(K/M) = 0{,}3$$
$$P(K/A) = 0{,}1$$
$$P(M) = 0{,}8$$
$$P(A) = 0{,}2.$$

i) $P(K) \overset{(*)}{=} P(K/M)\cdot P(M) + P(K/A)\cdot P(A) = 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}26$

ii) $P(M/K) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=} \dfrac{P(K/M)\cdot P(M)}{P(K)} = \dfrac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}26} = 0{,}92$ ∎

(*) Θ. Ολικής Πιθανότητας: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μία διαμέριση του Ω και $B \subseteq \Omega$:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n).$$

Τυχαίες Μεταβλητές

Random Variables

Κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος, ενδιαφερόμαστε συνήθως για κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος και όχι για το αποτέλεσμα αυτό καθ' αυτό.

π.χ. το πλήθος από επιτυχίες και όχι ποιές δοκιμές ήταν επιτυχίες...

π.χ. → Ρίψη 2 ζαριών.

$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$

$X(i,j) = i+j$

π.χ. → Ρίψη νομίσματος n φορές.

$X :=$ αριθμός εμφανιζόμενων κορώνων στις n ρίψεις.

<u>Ορισμός:</u> Έστω πείραμα. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία <u>τυχαία μεταβλητή</u> <u>(τ.μ.)</u> όταν η X είναι μια συνάρτηση, η οποία σε κάθε σημείο $\omega \in \Omega$ αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό με έναν προκαθορισμένο κανόνα αντιστοίχισης.

Ορισμός: Συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η συνάρτηση:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \quad \text{με τύπο:}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) \quad \text{ή} \quad F_X(x) = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τυχαίες Μεταβλητές
- → Διακριτές (όταν το πεδίο τιμών είναι διακριτό π.χ. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$)
- → Συνεχείς (όταν παίρνουν τιμές σ' ένα διάστημα του $\mathbb{R}$)

Ορισμός: Έστω X διακριτή τ.μ. Αντιστοιχίζω μια πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_i) = P(X = x_i)$.
Η f ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) ή συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) της X.

Ιδιότητες:

- $f(x_i) \geq 0 \quad , \forall i = 1, 2, \ldots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$ και $F_X(x) = \sum f(x_i)$.

Ορισμός: Έστω X συνεχής τ.μ. Η έκφραση "η πιθανότητα μεταβλητή X να πάρει μια ορισμένη τιμή x." αντικαθίσταται από την "η πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει τιμές σ' ένα διάστημα γύρω από το σημείο x.".
Οπότε, ορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.) ως εξής:

$$P(X \in B) = \int_B f_X(t)\,dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ιδιότητες:

- $f_X(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1.$ και $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$

π.χ. → Έστω X τ.μ. που καταγράφει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Το σύνολο τιμών της X είναι $S_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

και $P(X = x) = \frac{1}{6}$, $x \in S_X$.

Θα υπολογίσω τις ακόλουθες πιθανότητες:

α) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) =$

$= 1 - F(2) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$.

Διότε: $F(x) = \dfrac{\#\{i \leq x,\ i = 1, 2, \ldots, 6\}}{6}$

β) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

γ) $P(2 < X \leq 5) \overset{(*)}{=} F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(*) Διότι ισχύει ότι: $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.

<u>Απόδειξη:</u>

$(X \leq y) = (x < X \leq y) \cup (X \leq x) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X \leq y) = P(x < X \leq y) + P(X \leq x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(x < X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x).$$

δ) $P(2 \leq X \leq 5) = P(1 < X \leq 5) = F(5) - F(1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ε) $P(2 \leq X < 5) = P(1 < X \leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ∎

<u>Άλλο ένα παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής</u>

π.χ. Έστω μία οικογένεια με 3 παιδιά. Έστω η τ.μ. X που μετράει τον αριθμό των αγοριών.

$$\Omega = \{KKK, KKA, KAK, AKK, KAA, AKA, AAK, AAA\}$$

$X = \begin{cases} 0 = x_1 \\ 1 = x_2 \\ 2 = x_3 \\ 3 = x_4 \end{cases}$ και αν $w_i \in \Omega$, τότε $P(w_i) = \frac{1}{8}$, $\forall i = 1, \ldots, 8$.

$P(X=0) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

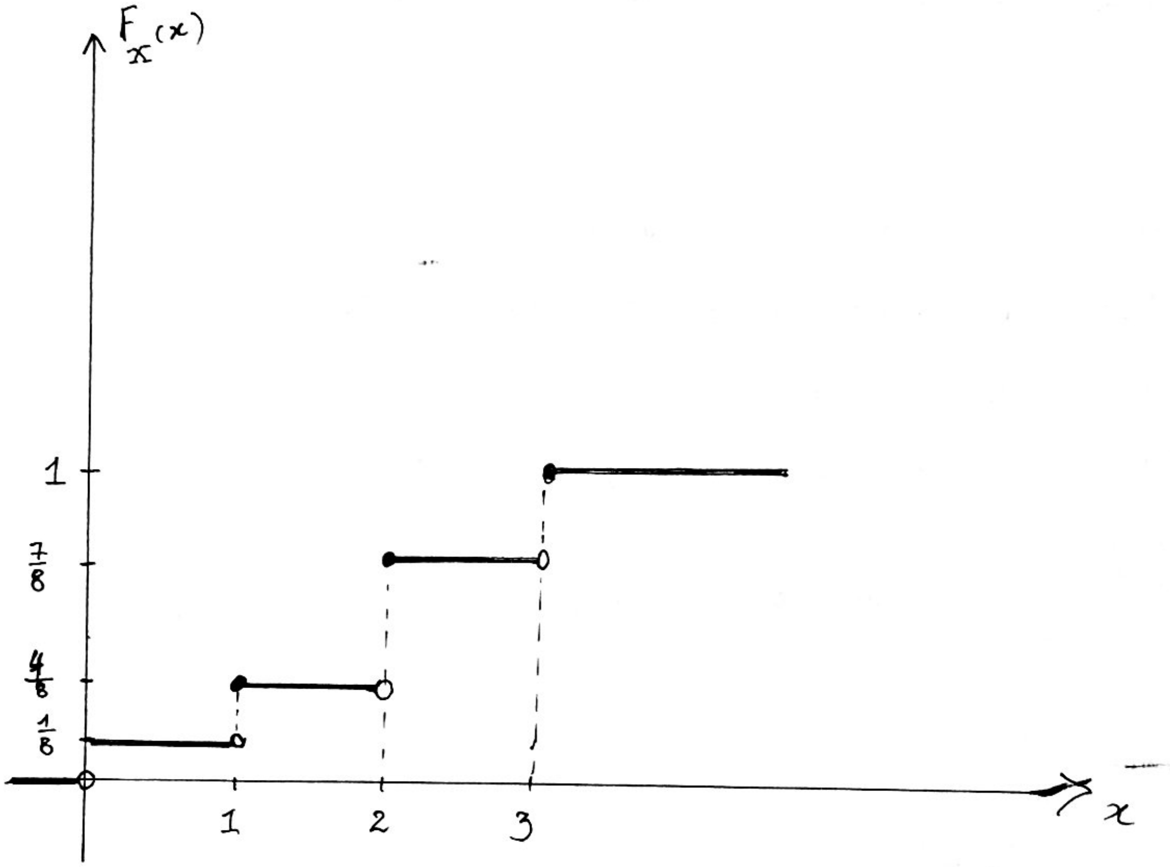
$P(X=3) = \frac{1}{8}$

Ισχύει λοιπόν ότι: $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1$

και $f_X(x) = P\{X = x\} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x=0 \\ \frac{3}{8}, & x=1,2 \\ \frac{1}{8}, & x=3 \end{cases}$

και

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8} & , \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & , \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$



Συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

π.χ. → Έστω συνεχής τ.μ. X με σ.π.π.:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & \forall x \in [0,1] \\ 0, & \forall x \notin [0,1] \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα:

i) $P(X \leq \frac{1}{3})$, ii) $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2})$

iii) $F_X(x) = ?$

<u>λύση:</u>

i) $P(X \leq \frac{1}{3}) = \int_0^{1/3} 4x^3\, dx = [x^4]_0^{1/3} = (\frac{1}{3})^4 - 0 = \frac{1}{81}$

ii) $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{3}}^{1/2} 4x^3\, dx = [x^4]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{3})^4 =$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{81}$

iii) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \overset{=0}{f(t)}\,dt + \int_0^x f(t)\,dt =$

$= \int_0^x 4t^3\, dt = [t^4 + c]_0^x = x^4$.

Άρα:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^4, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$