Πιθανότητες & Στατιστική

Φροντιστήριο #5

Τυχαίες Μεταβλητές (συνέχεια...)

Π.χ. Έστω το πείραμα της ρίψης 2 ζαριών.

Τότε $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$, $N(\Omega) = 36$

1ο ζάρι \ 2ο ζάρι	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)			
3						
4						
5						
6						(6,6)

- Έστω X η τ.μ. που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου στην ένδειξη του 2ου ζαριού. Δηλ:

$$X(\omega) = X(x,y) = y \in \{1, 2, \ldots, 6\}$$

- Έστω Y η τ.μ. που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου στο άθροισμα των 2 ενδείξεων.

Δηλ: $Y(\omega) = Y(x,y) = x+y \in \{2, 3, \ldots, 12\}$

- Έστω Z η τ.μ. που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου στη μικρότερη από τις 2 ενδείξεις.

Δηλ: $Z(\omega) = Z(x,y) = \min\{x, y\} \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, η τ.μ είναι μια διακριτή τ.μ.

Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας συνεχούς τ.μ. X:
<u>π.χ.</u> Έστω X η τ.μ. που καταμετρά τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στο ταμείο μιας τράπεζας. (σε min).
Εδώ η τ.μ. X παίρνει τιμές σ' ένα συνεχές διάστημα $[0, t]$.

Υπενθύμιση ...

<u>Διακριτή τ.μ. X</u>	<u>Συνεχής τ.μ. X</u>
• $0 \le f_X(\alpha_i) \le 1$	• $0 \le f_X(\alpha_i) \le 1$
• $\sum_{i=1}^{\infty} f_X(\alpha_i) = 1$	• $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\alpha_i) = 1$
• $F_X(x) = \sum f(x_i)$	• $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.

όπου: $f_X(x_i) = P(X = x_i)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

και: $F_X(x_i) = P(X \le x_i)$: συνάρτηση κατανομής π.χ. → Έστω X η τ.μ. που καταγράφει τον χρόνο αναμονής (σε min) ενός πελάτη στο ταμείο μιας τράπεζας. Έστω η συνάρτηση κατανομής της X να είναι:

$$F(t) = \begin{cases} 0 , & t<0 \\ \frac{t}{4} , & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{4} , & 1 \le t < 2 \\ \frac{t}{8} , & 2 \le t < 8 \\ 1 , & t \geq 8 \end{cases}$$

i) Ποιά η πιθανότητα να περιμένει κάποιος στο ταμείο το πολύ 3min ?

<u>Απάντηση:</u>

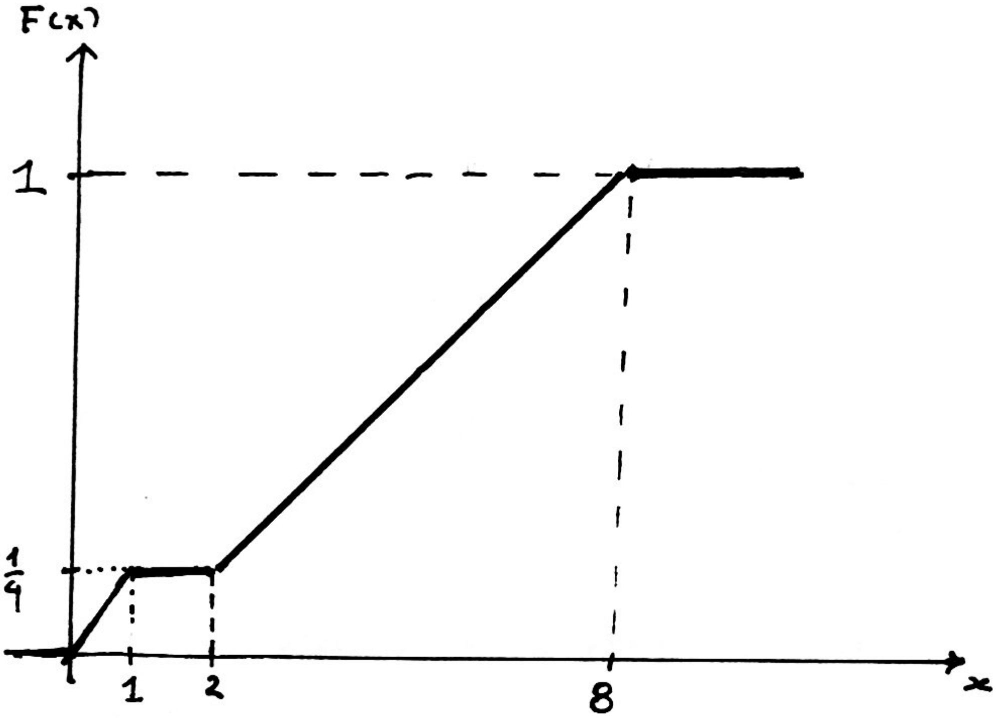
$$P(X \le 3) = F(3) = \frac{3}{8}$$

ii) Ποιά η πιθανότητα να περιμένει κανείς από 1 έως 4 min ?

<u>Απάντηση:</u>

$$P(1 \le X \le 4) \xlongequal{\text{επειδή η } F \text{ συνεχής(?)}} F(4) - F(1) =$$

$$= \frac{4}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



(Και μόνο με τη γραφική παράσταση, καταλαβαίνω ότι η F είναι συνεχής. Φυσικά δεν αποτελεί απόδειξη η γραφ. παράσταση)

iii) Αν κάποιος περιμένει 2,5 min, ποιά η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει το πολύ άλλα 3 min ?

Απάντηση:

$$P(X \leq 5,5 \,/\, X \geq 2,5) = \frac{P(X \leq 5,5 \wedge X \geq 2,5)}{P(X \geq 2,5)} =$$

$$= \frac{P(2,5 \leq X \leq 5,5)}{P(X \geq 2,5)} = \frac{F(5,5) - F(2,5)}{1 - F(2,5)} =$$

$$= \frac{\frac{5,5}{8} - \frac{2,5}{8}}{1 - \frac{2,5}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5,5}{8}} = \frac{3}{5,5} = \frac{6}{11}$$

Άσκηση: Ο αριθμός των βιβλίων που πουλάει ένα βιβλιοπωλείο σε μια εβδομάδα είναι τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x) \begin{cases} cx \quad , x=1,2,3,4,5 \\ c(10-x), \ x=6,7,8,9 \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

ii) Ποιά η πιθανότητα να πουληθούν σε μια εβδομάδα λιγότερα από 4 βιβλία?

iii) —//— περισσότερα από 5, γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3?

λύση:

i) η X είναι μια διακριτή τ.μ. Οπότε, γνωρίζω ότι:

$$\sum_{x=1}^{9} f(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c+2c+3c+4c+5c+4c+3c+2c+c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{25}$$

ii) Άρα, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} \quad , x=1,2,3,4,5 \\ \frac{10-x}{25}, \ x=6,7,8,9. \end{cases}$

Οπότε: $P(X<4) = \sum_{x=1}^{3} f(x) = \frac{1}{25} + \frac{2}{25} + \frac{3}{25} = \frac{6}{25}$

iii) Ζητώ την $P(X>5 / X\geq 3) = \frac{P(X>5, X\geq 3)}{P(X\geq 3)} =$

$$= \frac{P(X>5)}{P(X\geq 3)} = \frac{f(6)+f(7)+f(8)+f(9)}{1-f(1)-f(2)} = \frac{\frac{4}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}-\frac{2}{25}} = \frac{5}{11} \ \blacksquare.$$

<u>Άσκηση:</u> Ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα σε ώρες είναι μια τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(4-x^2) & , -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Να υπολογιστεί η σταθερά c.

<u>Λύση:</u>

η X είναι μία συνεχής τ.μ. Οπότε θα ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{2} c(4-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{2} 4c\,dx - \int_{-2}^{2} c x^2\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c\,[x]_{-2}^{2} - c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c\big(2-(-2)\big) - c\left(\frac{8}{3} - \frac{-8}{3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16c - \frac{16}{3}c = 1 \Rightarrow \frac{32}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{32} \quad \blacksquare$$

Μέτρα Θέσης και Διασποράς

π.χ. $\rightarrow$ Έστω μία τ.μ. X που παίρνει τιμές 0, 1 και 2 με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

Θα ήθελα να γνωρίζω γύρω από ποιά τιμή "κυμαίνεται" η τ.μ. X.

Ορισμός: Έστω X μία διακριτή τ.μ. και $f_X(x)$ η σ.π.

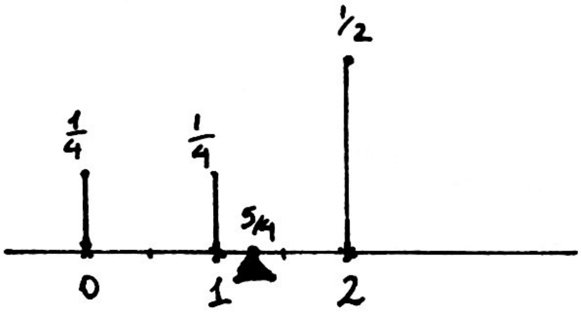
Τότε ορίζεται η $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_X(a_i)$

όπου a_i, $i = 1, 2, \ldots$ οι τιμές που παίρνει η τ.μ. X.

Η ποσότητα $E(X)$ ονομάζεται Μέση Τιμή της X.

Στο προηγούμενο π.χ. έχω:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$



<u>Ορισμός:</u> Έστω X μία συνεχής τ.μ. με σ.π. $f_X(x)$.

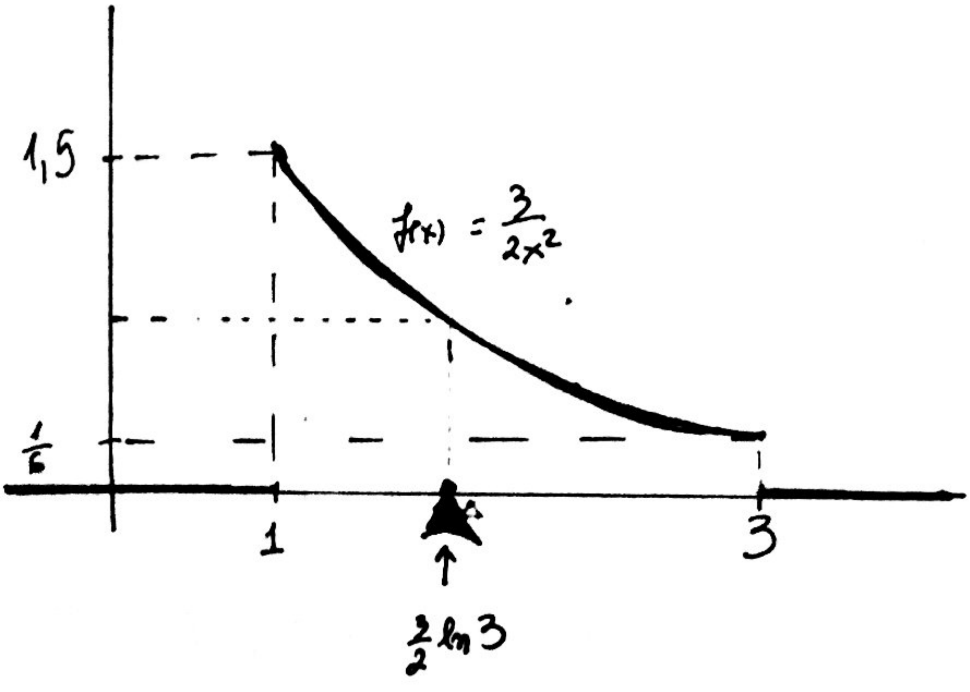
Τότε ορίζεται η <u>μέση τιμή της X</u> ως εξής:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx .$$

π.χ. Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = \dfrac{3}{2x^2}$, $x \in [1,3]$.

Τότε $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{1}^{3} x \frac{3}{2x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\, dx =$

$$= \frac{3}{2}\left[\ln x\right]_1^3 = \frac{3}{2}\left(\ln 3 - \ln 1\right) = \frac{3}{2}\ln 3 .$$



Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

1. Αν η X τ.μ. παίρνει μόνο μία σταθερή τιμή c τότε και $E(X) = c$.

2. $E(cX) = c\,E(X)$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

3. Αν X & Y είναι δύο τ.μ. τότε:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

4. Αν X & Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. τότε:

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y).$$

Οι 2 & 3 ιδιότητες δίνουν την:

$$E(\alpha X + \mu Y) = \alpha E(X) + \mu E(Y)$$

(γραμμικότητα...)

5. Αν $X \le Y$, τότε $E(X) \le E(Y)$

Άσκηση: Η τ.μ. X έχει την κατανομή:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,5	0,1	0,3	0,1

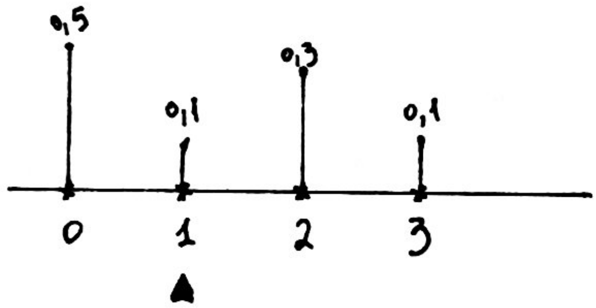
i) Να βρεθεί η $E(X)$

ii) Να βρεθεί η μέση τιμή των τ.μ. X^2, $5X+3$, $\sqrt{X}$.

Λύση:

i) $E(X) = \sum_{i=0}^{3} i\, P(X=i) = 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1$.



ii) $E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^2 P(X=i) = 0^2\cdot 0{,}5 + 1^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}1 + 1{,}2 + 0{,}9 = 2{,}2$

$E(5X+3) = 5E(X)+3 = 5\cdot 1 + 3 = 8$

$E(\sqrt{X}) = \sum_{i=0}^{3} \sqrt{i}\, P(X=i) = \sqrt{0}\cdot 0{,}5 + \sqrt{1}\cdot 0{,}1 + \sqrt{2}\cdot 0{,}3 + \sqrt{3}\cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}697$ ∎.

Π.χ. Έστω οι παρακάτω κατανομές:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0	1/2	0	1/2	0	0

y	-1	0	1	2	3	4	5
$f(y)$	0	1/4	0	1/2	0	1/4	0.

$$E(X) = -1\cdot 0 + 0 + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 4 + 0\cdot 5 = 2$$

$$E(Y) = -1\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 0 + 4\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot 0 = 2$$

Οι δύο αυτές κατανομές έχουν ίδια μέση τιμή, είναι όμως μεταξύ τους διαφορετικές.

<u>Ορισμός:</u> Έστω X τ.μ. Τότε:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[(X-\mu)^2]$$

ονομάζεται <u>διακύμανση</u> της τ.μ. X

<u>Διαφορετικά:</u> $V(X) = \sum_{x\in R_X} (x-\mu)^2 f(x)$

<u>Ορισμός:</u> <u>Τυπική Απόκλιση</u> μιας τ.μ. X (συμβ: σ_X) ορίζεται να είναι η ποσότητα:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

Πρόταση: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$

{εναλλακτικός τύπος υπολογισμού της διακύμανσης}

Παρατηρήσεις - Συμβολισμοί

- Η διακύμανση $V(X)$ ονομάζεται και διασπορά
- Η διασπορά ορίζεται ανν $E(X) < \infty$
- Η μέση τιμή συμβολίζεται με μ_X
- Η διασπορά συμβολίζεται με σ_X^2

π.χ. Έστω τ.μ. X με $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, $\lambda>0$

Τότε $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx =$

$$= \lambda \cdot \int_0^{\infty} x \cdot \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)' dx = \lambda\left[\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (x)'\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right) dx\right] =$$

$$= \dots = \frac{1}{\lambda}$$

Επίσης, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)' dx = \lambda\left[\left[x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\, dx\right] =$$

$$= \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2} .$$

Τελικά: $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \blacksquare.$$