Πιθανότητες και Στατιστική

Φροντιστήριο #7

<u>Άσκηση</u>: Η εβδομαδιαία κυκλοφορία εφημερίδας σε 1000-άδες φύλλα είναι τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) & , 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{αλλού}. \end{cases}$$

Ποιά είναι η μέση εβδομαδιαία κυκλοφορία της εφημερίδας και ποιά η διακύμανση;

<u>Λύση</u>:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^2 2x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^2 2x\,dx - 2\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \left[x^2\right]_1^2 - 2\left[\ln x\right]_1^2 = 3 - 2\ln 2$$

$$E[X^2] = \int_1^2 x^2 f(x)\,dx = \int_1^2 2x^2\,dx - \int_1^2 2\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 2\left[x\right]_1^2 = 2\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) - 2\left[2-1\right] =$$

$$= \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

Άρα, $\sigma^2 = E[X^2] - (E(X))^2 = \frac{8}{3} - (3 - 2\ln 2)$ ∎

Άσκηση: Μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές $0, 1, 2, k$. Ισχύει ότι $P(0) = 1/6$, $P(1) = 1/5$, $P(2) = 1/3$, $P(k) = \alpha$.

i) $\alpha = ;$

ii) Αν η μέση τιμή της X είναι $8/3$, ποιό είναι το k;

iii) Ποιά η διασπορά της X με βάση τις παραπάνω τιμές;

Λύση:

i) $\Sigma f(x_i) = 1 \Rightarrow P(0) + P(1) + P(2) + P(k) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{10}$$

ii) $\mu = E[X] = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + k \cdot P(k) =$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3k}{10} = \frac{6 + 20 + 9k}{30} = \frac{26 + 9k}{30}.$$

Όμως $\mu = \frac{8}{3}$. Άρα, $\frac{26 + 9k}{30} = \frac{8}{3} \Rightarrow k = 6$

iii) $E[X^2] = 0^2 \frac{1}{6} + 1^2 \frac{1}{5} + 2^2 \frac{1}{3} + 6^2 \frac{3}{10} =$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{108}{10} = \frac{6 + 40 + 324}{10} = \frac{370}{10} = 37$$

Άρα, $E[x^2] - E[x]^2 = 37 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \ldots$ ∎

Άσκηση: Μία βιομηχανία κατασκευάζει εξαρτήματα που αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση. Κάθε εξάρτημα έχει πιθανότητα 0,8 να αντέξει στην συγκεκριμένη καταπόνηση. Επιλέγω τυχαία 9 εξαρτήματα και τα υποβάλλω στην καταπόνηση αυτή.

i) Ποιά η πιθανότητα να αντέξουν το πολύ 2 εξαρτήματα;
ii) —— // —— περισσότερα από 7 εξαρτήματα;
iii) —— // —— τουλάχιστον 2 εξαρτήματα;
iv) —— // —— λιγότερα από 6 και τουλάχιστον 4.

Λύση:

$X :=$ αριθμός εξαρτημάτων που θα αντέξουν την καταπόνηση.

$X \sim B(9, 0.8)$, δηλ. $f_X(x) = P(X=x) = \binom{9}{x} 0{,}8^{x} (1-0{,}8)^{9-x}$

i) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$$= \binom{9}{0} 0{,}8^{0} (1-0{,}8)^{9-0} + \binom{9}{1} 0{,}8^{1} (1-0{,}8)^{8} + \binom{9}{2} 0{,}8^{2} (1-0{,}8)^{7} = \dots$$

ii) $P(X > 7) = P(X=8) + P(X=9) =$

$$= \binom{9}{8} \cdot 0{,}8^{8} \cdot 0{,}2^{1} + \binom{9}{9} 0{,}8^{9} \cdot 0{,}2^{0} = \dots$$

iii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$

$$= 1 - \binom{9}{0} 0{,}8^{0} \cdot 0{,}2^{9} - \binom{9}{1} 0{,}8^{1} \cdot 0{,}2^{8} = \dots$$

iv) $P(4 \leq X < 6) = P(X=4) + P(X=5) =$

$$= \binom{9}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^5 + \binom{9}{5} 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^4 = \ldots$$

<u>Άσκηση:</u> Μία αεροπορική εταιρεία γνωρίζει ότι το 5% των ατόμων που κάνουν κράτηση να ταξιδέψουν δεν εμφανίζεται.

Αν η εταιρεία κάνει κράτηση σε 52 άτομα σε μία πτήση για αεροπλάνο 50 θέσεων, ποιά η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμο κάθισμα για κάθε επιβάτη?

<u>Λύση:</u>

Έστω $X :=$ αριθμός ατόμων που θα εμφανιστούν στην πτήση.

Τότε, $X \sim B(52, 0.95)$

Δηλ. $f_X(x) = \binom{52}{x} \cdot 0{,}95^x \cdot (1-0{,}95)^{52-x}$

Ζητώ την πιθανότητα:

$$P(X \leq 50) = \sum_{x=0}^{50} \binom{52}{x} \cdot 0{,}95^x \cdot 0{,}05^{52-x} = \ldots$$

ή

$$P(X \leq 50) = 1 - P(X > 50) = 1 - P(X=51) - P(X=52)$$

$$= 1 - \binom{52}{51} \cdot 0{,}95^{51} \cdot 0{,}05^1 - \binom{52}{52} \cdot 0{,}95^{52} \cdot 0{,}05^0 \simeq 0{,}74 \text{ ή } 74\%$$

Άσκηση: Η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι 0,5.

i) Ποιά η πιθανότητα, μια οικογένεια 5 παιδιών να έχει το πολύ 3 αγόρια;

ii) Αν πάρουμε τυχαία 10 οικογένειες των 5 παιδιών, ποιά η πιθανότητα οι 7 οικογένειες να έχουν το πολύ 3 αγόρια η κάθε μία;

Λύση:

i) Έστω $X := \#$ αγοριών σε μία οικογένεια 5 παιδιών.

$X \sim B(5, 0{,}5)$.

Οπότε, $f_X(x) = \binom{5}{x} \cdot 0{,}5^{x} \cdot 0{,}5^{5-x}$.

Άρα, $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \binom{5}{x} \cdot 0{,}5^{x} \cdot 0{,}5^{5-x} =$

$= \binom{5}{0} 0{,}5^{0} \cdot 0{,}5^{5} + \binom{5}{1} \cdot 0{,}5^{1} \cdot 0{,}5^{4} + \binom{5}{2} 0{,}5^{2} \cdot 0{,}5^{3} + \binom{5}{3} 0{,}5^{3} \cdot 0{,}5^{2} =$

$= \cdots = 0{,}8125$.

ii) Έστω $Y :=$ αριθμός "επιτυχιών" στις 10 οικογένειες.
(όπου "επιτυχία" εδώ είναι: "η οικογένεια των 5 παιδιών έχει το πολύ 3 αγόρια").
Η πιθανότητα "επιτυχίας" της Y είναι 0,8125 (i)

Άρα, $Y \sim B(10,\ 0.8125)$.

Δηλ. $f_Y(y) = \binom{10}{y} \cdot 0{,}8125^y (1-0{,}8125)^{10-y}$.

Ζητώ $P(Y=7) = \binom{10}{7} 0{,}8125^7 (1-0{,}8125)^3 = \ldots$

■.

<u>Άσκηση:</u> Στις ΗΠΑ οι εκλογείς που δεν ψηφίζουν ούτε Δημοκρατικό, ούτε Ρεπουμπλικανικό κόμμα είναι οι Ανεξάρτητοι και αποτελούν το 10% του εκλογικού σώματος.
Επιλέγω τυχαία 25 εκλογείς. Ποιά η πιθανότητα:

i) κανείς από τους 25 να μην είναι Ανεξάρτητος

ii) λιγότεροι απο 5 να είναι Ανεξάρτητοι

iii) περισσότεροι απο 2 να είναι Ανεξάρτητοι

<u>Λύση:</u>
Έστω $X :=$ αριθμός των εκλογέων, απο τους 25, που είναι Ανεξάρτητοι.

Τότε, $X \sim B(25,\ 0.1)$

Άρα $f_X(x) = \binom{25}{x} \cdot 0{,}1^x \cdot (1-0{,}1)^{25-x}$.

i) $P(X=0) = \binom{25}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{25}$

ii) $P(X<5) = P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} \binom{25}{x} 0{,}1^{x} \, 0{,}9^{25-x}$

iii) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{25}{x} 0{,}1^{x} \cdot 0{,}9^{25-x}$ ∎

<u>Άσκηση</u>: Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά σελίδα ακολουθεί κατανομή Poisson. Ένα βιβλίο με 200 σελίδες έχει 40 τυπογραφικά λάθη.

i) Αν επιλέξουμε 10 σελίδες από το βιβλίο, ποιά η πιθανότητα να την έχουν τυπογραφικά λάθη;

ii) Αν διαλέξουμε, τυχαία, 8 διαφορετικά 10σέλιδα, ποιά η πιθανότητα τουλάχιστον 3 10σέλιδα να την έχουν τυπογραφικά λάθη;

iii) Ποιός θα είναι ο αναμενόμενος αριθμός 10σέλιδων από το βιβλίο, που δεν θα έχουν κανένα τυπογραφικό λάθος;

<u>Λύση</u>:

i) Έστω $X :=$ ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών ανά 10 σελίδες.

Γνωρίζουμε ότι η $X \sim P(\lambda)$, όπου λ ο Μ.Ο. των λαθών ανά 10 σελίδες.

Δηλ:

Στις 200 σελ. έχω 40 τυπογρ. λάθη
10 x;

$x = 40 \frac{10}{200} = 2$ λάθη

Άρα $\lambda = 2$ και $f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

Επομένως, $P(X=0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = e^{-2} \simeq 0,135$

ii) Έστω τ.μ. Y := τον αριθμό των 10 σελίδων που δεν έχουν κανένα τυπογρ. λάθος.
Διενεργείται έτσι διωνυμικό πείραμα με $n=8$ επαναλ. και πιθανότητα "επιτυχίας" $p = e^{-2} \simeq 0,135$.

Άρα, $Y \sim B(8, 0.135)$

Ζητώ, $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y<3) =$

$= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) =$

$= 1 - \binom{8}{0} 0,135^0 (1-0,135)^8 - \binom{8}{1} 0,135^1 (1-0,135)^7 - \binom{8}{2} 0,135^2 (1-0,135)^6 =$

$\simeq 0,083$

iii) Το βιβλίο εχει 200 σελίδες, αρα 20 10σελίδα, οπότε η Μ.Τ. θα ειναι.

$$np = 20 \cdot 0,135 = 2,7$$

<u>Άσκηση:</u> Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό ζουζουνιών στα φύλλα ενός δεντρου. Ο αριθμός αυτός ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 9$.

i) Ποιά η πιθανότητα να πάρει ένα φύλλο με 5 τουλάχιστον ζουζούνια;

ii) Ποιά η πιθανότητα να πάρει 10 φύλλα απο τα οποία τα 4 να εχουν τουλάχιστον 5 ζουζούνια;

<u>Λύση:</u>

i) $X :=$ αριθμός ζουζουνιων σε ένα φύλλο.

$X \sim P(9)$. Άρα, $f_X(x) = e^{-9} \frac{9^x}{x!}$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} e^{-9} \frac{9^x}{x!} = 0,945.$$

ii) $Y :=$ αριθμός φύλλων με τουλαχιστον 5 ζουζούνια στα 10 φύλλα.

Οπότε, $Y \sim B(10,\ 0{,}945)$

Άρα, $P(Y=4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}945^{4} (1-0{,}945)^{10-4} \simeq 0{,}464 \cdot 10^{-5}$ ∎

Άσκηση: Οι επισκέψεις σε μία ιστοσελίδα είναι σπάνιες και συμβαίνουν τυχαία και ανεξάρτητα με μέση συχνότητα 4 επισκέψεις ανά εβδομάδα. Ποιά η πιθανότητα:

i) να δεχθεί η ιστοσελίδα 10 ή περισσότερες επισκέψεις στη διάρκεια μιας εβδομάδας;

ii) να δεχθεί 20 ή περισσότερες επισκέψεις στη διάρκεια 2 εβδομάδων;

Λύση:

i) $X :=$ αριθμός επισκέψεων στην ιστοσελίδα / εβδομάδα.

$X \sim P(4)$

Ζητώ, $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) =$

$= 1 - \sum_{x=0}^{9} e^{-4} \frac{4^x}{x!} \simeq 0{,}0081$ ή $0{,}81\%$.

ii) Η πιθανότητα επιτυχίας σ' ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος.

Άρα, σε 2 εβδομάδες $\rightarrow \mu = 2 \cdot 4 = 8$ επισκέψεις.

Άρα, $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - \sum_{x=0}^{19} e^{-8} \frac{8^x}{x!} = \dots$

$\simeq 0,003$ ή $0,3\%$. ∎

<u>Άσκηση:</u> Το πλήθος των ατυχημάτων σε μια διασταύρωση είναι κατανομή Poisson με $\lambda = 3,5$ ατυχήματα / εβδομάδα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) Να μη συμβεί κανένα ατύχημα στη διάρκεια της εβδομάδας

ii) Να συμβούν 5 ή περισσότερα σε μια εβδομάδα

iii) Να μη συμβεί ατύχημα σήμερα.

<u>Λύση:</u>

- $X :=$ αριθμός ατυχημάτων ανά εβδομάδα.

i) $P(X = 0) = e^{-3,5} \frac{3,5^0}{0!} = e^{-3,5}$

ii) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$
$- P(X=3) - P(X=4) =$

$= 1 - e^{-3,5} \frac{3,5^0}{0!} - e^{-3,5} \frac{3,5^1}{1!} - e^{-3,5} \frac{3,5^2}{2!} - e^{-3,5} \frac{3,5^3}{3!} - e^{-3,5} \frac{3,5^4}{4!} = \dots$

iii) Σε 7 ημέρες έχουμε 3,5 ατυχήματα.

1 ημέρα x;

$$x = 3,5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2}$$

Άρα, τώρα $\lambda' = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, $P(X=1) = e^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}$ ■.

Γεωμετρική κατανομή

Έστω μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχία $p>0$ και αποτυχίας $1-p=q$

Έστω $X :=$ αριθμός των δοκιμών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας.

Τότε $X \in \{1, 2, \ldots\} = R_X$

και $f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} p \quad , \quad x = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{x \in R_X} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} \cdot p = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

λέμε ότι: $X \sim$ Γεωμετρική (p) ή $X \sim G(p)$

Επίσης, $E[X] = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = V[X] = \frac{q}{p^2}$, όπου $q = 1-p$

<u>παράδειγμα:</u> Ποιά η πιθανότητα στρίβοντας ένα αμερόληπτο νόμισμα να φέρουμε κορώνα στην τρίτη δοκιμή ?

<u>λύση:</u>

Έστω $X :=$ ο αριθμός των "αποτυχιών" έως την πρώτη "επιτυχία".

Θέλω να βρώ την πιθανότητα:

$P(X=3)$. και $X \sim$ Γεωμετρική $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Άρα, $P(X=3) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(!) Προσοχή στις ομοιότητες και διαφορές

της Διωνυμικής και Γεωμετρικής Κατανομής.

Ομοιότητες	Διαφορές
* Δοκιμές Bernoulli με 2 δυνατά αποτελέσματα την "Επιτυχία" και την "Αποτυχία"	* Στην Διωνυμική κατανομή ο αριθμός των δοκιμών είναι προκαθορισμένος και η τ.μ. X μετρά των αριθμό των "επιτυχιών" στις n δοκιμές.
* $P(E) = p > 0$ σταθερή	* Στην Γεωμετρική Κατανομή οι δοκιμές επαναλαμβάνονται έως ότου εμφανιστεί η πρώτη "επιτυχία". Η τ.μ. X μετρά το πλήθος των αποτυχιών έως την 1η επιτυχία.
* Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες.	

παράδειγμα: i) Σε οικογένεια με 4 παιδιά, ποιά η πιθανότητα τα 3 παιδιά να είναι κορίτσια;

ii) Σ' ένα ζευγάρι που θέλει να κάνει παιδιά, ποιά η πιθανότητα το πρώτο αγόρι να είναι το 4ο παιδί;

λύση:

i) Ζητώ την πιθανότητα 3 "επιτυχιών" σε 4 δοκιμές.
Άρα, έστω $X :=$ # κοριτσιών σε 4 παιδιά.
$X \sim B(4, \frac{1}{2})$.

Άρα, $P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-3} =$

$$= \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ii) Έστω $Y := \#$ "δοκιμών" έως ότου να έχω την 1η "επιτυχία".

Δηλαδή, $Y := \#$ γεννήσεων έως ότου να έχω το 1ο αγόρι.

Ζητώ $P(Y=4)$. $\quad Y \sim$ Γεωμετρική$\left(\frac{1}{2}\right)$.

Άρα, $P(Y=4) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ ■

<u>Άσκηση:</u> Ένας τοξοβόλος πετυχαίνει το κέντρο του στόχου με πιθανότητα $p = 75\%$. Να υπολογιστεί:

i) Η πιθανότητα να πετύχει το κέντρο του στόχου στην 3η προσπάθεια.

ii) Ποιός ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών που πρέπει να κάνει, ώστε να πετύχει το κέντρο του στόχου;

<u>Λύση:</u>

Έστω η τ.μ. $X :=$ ο αριθμός των "αποτυχιών" έως την πρώτη "επιτυχία".

Τότε $X \sim$ Γεωμετρική $(0,75)$

i) Οπότε λοιπόν:

$$P(X=3) = (1-0,75)^{3-1} \cdot 0,75 = 0,25^2 \cdot 0,75 \simeq 0,046$$

ii) $E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,75} \simeq 1,333$ ■

<u>Άσκηση:</u> Ένα ζάρι ρίχνεται συνεχώς μέχρις ότου εμφανιστεί άσσος. Ποιά η πιθανότητα να συμβεί αυτό

i) στην $10^{η}$ ρίψη;

ii) πριν από τη $10^{η}$ ρίψη;

iii) μετά τη $10^{η}$ ρίψη;

<u>Λύση:</u>

Έστω $X :=$ # ρίψεων έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά άσσος.

$X \sim G(\frac{1}{6})$. και $f_X(x) = P(X=x) = (1-\frac{1}{6})^{x-1} \cdot \frac{1}{6}$

i) $P(X=10) = (\frac{5}{6})^9 \cdot \frac{1}{6}$

ii) $P(X<10) = P(X \leq 9) =$

$= F(9) = 1-(\frac{5}{6})^9$

και

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-q^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

iii) $P(X>10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \left[1-(\frac{5}{6})^{10}\right] = (\frac{5}{6})^{10}$ ■

Άσκηση: Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών έως ότου φέρουμε για πρώτη φορά άσσο;

Λύση:

$X :=$ # δοκιμων εως οτι φερω για πρωτη φορα άσσο.

$X \sim G(\frac{1}{6})$.

$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ δοκιμές ∎.

H.W. ① Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών έως ότου φέρουμε για πρώτη φορά αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 4;

(Απάντηση: 3).

H.W. ② Ένα καινούριο εμβόλιο έχει πιθανότητα 70% ανοσοποιήσεως απο εναν συγκεκριμενο κορωνοϊό. Έστω οτι ενας πληθυσμός εμβολιάζεται και ορισμενοι απο τον πληθυσμο διαλέγονται για εργαστηριακή παρακολούθηση. Ποιά η πιθανότητα:

i) να βρουμε ακριβώς 3 ανοσοποιημένους ανθρώπους όταν διαλέξουμε 10;

ii) να χρειαστεί να διαλέξουμε 4 ανθρώπους εως οτου να βρούμε τον πρώτο ανοσοποιημένο;

(Απάντηση: i) 0,009, ii) 0,0189).