



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	15
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑ.....	15
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ - ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ.....	15
2.2 ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.....	23
2.3 Η ΜΟΝΑΔΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ: ΤΟ BIT.....	28
2.4 ΜΕΣΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ Η ΕΝΤΡΟΠΙΑ.....	28
2.4.1 Ιδιότητες της μέσης ποσότητας πληροφορίας ή εντροπίας.....	32
2.5 ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΕΝΤΡΟΠΙΑ, ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ.....	34
2.5.1 Από Κοινού Εντροπία.....	35
2.5.2 Υπό Συνθήκη Εντροπία.....	37
2.5.3 Αμοιβαία πληροφορία.....	42
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	49
ΠΗΓΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.....	49
3.1 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΜΝΗΜΗ.....	49
3.1.1 Εντροπία διακριτής πηγής χωρίς μνήμη.....	50
3.1.2 Ρυθμός παροχής εντροπίας.....	51
3.1.3 Επέκταση διακριτής πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη η τάξης.....	54
3.1.4 Ιδιότητα ασυμπτωτικής ισοκατανομής.....	56
3.2 ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΠΗΓΗΣ.....	58
3.2.1 Προθεματικοί κώδικες.....	69
3.2.2 Αλγόριθμοι Κωδικοποίησης.....	73
3.3 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΜΕ ΜΝΗΜΗ.....	81
3.3.1 Πηγές Markov.....	82
3.3.2 Εντροπία των πηγών Markoff.....	87
3.3.3 Ζητήματα κωδικοποίησης των Markov-βιανών πηγών.....	88
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	92
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	99
ΣΗΜΑΤΑ.....	99
4.1 ΕΙΔΗ/ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ.....	101
4.2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΗΜΑΤΑ.....	105
4.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΗΜΑΤΩΝ.....	110
4.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ.....	112
4.4.1 Η διαμόρφωση (modulation).....	113
4.4.2 Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion -A/D-).....	120
4.4.3 Η Πολυπλεξία.....	123
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....	127
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	129

ΘΟΡΥΒΟΣ	129
5.1 ΕΙΔΗ ΘΟΡΥΒΟΥ	129
5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΘΟΡΥΒΟΥ	130
5.2.1 Θεώρημα Shannon – Hartley.....	130
5.2.2 Απόδοση ισχύος και εύρος ζώνης	131
5.2.3 Σηματοθορυβικός λόγος	132
5.2.4 Φάσμα θορύβου	132
5.3 ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ	133
5.3.1 Προσθετικός Λευκός Γκαουσιανός Θόρυβος (<i>Additive White Gaussian Noise – AWGN</i>)	135
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	137
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	141
ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ	141
6.1 ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ (ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER)	144
6.2 ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ FOURIER	146
6.3 ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ) ΣΗΜΑΤΩΝ. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ) FOURIER	147
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	158
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	159
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	159
7.1 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	160
7.1.1 Συστήματα με ή χωρίς μνήμη	161
7.1.2 Αιτιοκρατικά συστήματα	162
7.1.3 Ευσταθή συστήματα	162
7.1.4 Χρονικά αμετάβλητα συστήματα	162
7.1.5 Γραμμικά Συστήματα	163
7.1.6 Διασύνδεση Συστημάτων.....	163
7.1.7 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα	164
7.2 ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ	164
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8	167
ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	167
8.1 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ	168
8.1.1 Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης.....	168
8.1.2 Διαδικασία δειγματοληψίας.....	169
8.1.3 Παράδειγμα	171
8.2 ΦΥΣΙΚΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ	177
8.3 ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ.....	177
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	179
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9	181
ΚΑΝΑΛΙ-ΣΥΣΤΗΜΑ	181
9.1 ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΚΑΝΑΛΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ.....	183
9.1.1 Χωρητικότητα καναλιού χωρίς μνήμη	189

9.1.2 Περιορισμός Της Χωρητικότητας Καναλιού Λόγω Θορύβου.....	190
9.1.3 Θεώρημα κωδικοποίησης.....	191
9.1.4 Διακριτά κανάλια με μνήμη.....	194
9.2 ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΝΑΛΙΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ	197
9.2.1 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού	198
9.2.2 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Χωρίς Μνήμη.....	199
9.2.3 Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για Τα Συνεχή Κανάλια	204
9.2.4 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Με Μνήμη.....	204
9.3 ΤΟ GAUSSIAN ΚΑΝΑΛΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ	206
9.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.....	212
9.5.1 Αθόρυβο Δυαδικό Κανάλι.....	212
9.5.2 Θορυβώδες Κανάλι Με Μη-Επικαλυπτόμενες Εξόδους	213
9.5.3 Θορυβώδης Γραφομηχανή	214
9.5.4 Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι	215
9.5.5 Δυαδικό Κανάλι Διαγραφής	216
9.5.6 Γενικευμένο Συμμετρικό Κανάλι.....	217
9.5.7 Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων.....	220
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	226
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10.	237
ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.....	237
10.1 ΓΙΑΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ Η ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΝΑΛΙΟΥ;	238
10.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	240
10.3 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΒΑΡΟΣ HAMMING.....	243
10.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΕΣ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	245
10.4.1 Automatic Repeat Request (ARQ) και Forward Error Correction (FEC)	247
10.4.2 Κώδικας ελέγχου απλής ισοτιμίας, κώδικας απλής επανάληψης και δισδιάστατος κώδικας ελέγχου ισοτιμίας.....	247
10.4.3 Επαναληπτικοί κώδικες	248
10.4.4 Αθροίσματα ελέγχου (check sums).....	249
10.4.5 Ορθογώνιοι και τριγωνικοί κώδικες	250
10.5 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΩΔΙΚΩΝ ΚΑΝΑΛΙΟΥ	252
10.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ (LINEAR CODES).....	253
10.7 ΚΩΔΙΚΕΣ ΔΟΜΗΣ (BLOCK CODES)	257
10.8 ΚΩΔΙΚΕΣ HAMMING.....	260
10.9 ΚΩΔΙΚΕΣ ΧΑΜΗΛΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ (LOW DENSITY PARITY CHECK CODES, LDPC)	265
10.10 ΚΥΚΛΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ.....	268
10.11 ΚΩΔΙΚΕΣ BCH (BOSE-CHAUDHURI-HOCQUENGHEM) ΚΑΙ RS (REED-SOLOMON)	270
10.12 ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΟΙ Η ΣΥΓΚΕΡΑΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ (CONVOLUTIONAL CODES)	271
10.13 ΚΩΔΙΚΕΣ TURBO	273
ΑΣΚΗΣΕΙΣ	277
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	280
ΑΓΓΛΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	280
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	280

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

ΕΙΚΟΝΑ 1. ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ	11
ΕΙΚΟΝΑ 2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ ΜΕ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	18
ΕΙΚΟΝΑ 3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΓΙΑ $b=2$	27
ΕΙΚΟΝΑ 4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ SHANNON	31
ΕΙΚΟΝΑ 5. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ VENN ΓΙΑ ΤΗ ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ .	44
ΕΙΚΟΝΑ 6. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΩΔΙΚΩΝ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΝ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ.	61
ΕΙΚΟΝΑ 7. ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΠΗΓΗΣ.	64
ΕΙΚΟΝΑ 8. ΔΥΑΔΙΚΗ ΔΕΝΔΡΙΚΗ ΔΟΜΗ.....	66
ΕΙΚΟΝΑ 9. ΔΕΝΤΡΟ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΩΔΙΚΑ 2.	71
ΕΙΚΟΝΑ 10. ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ ΤΡΙΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ	84
ΕΙΚΟΝΑ 11. ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ ΔΥΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ	86
ΕΙΚΟΝΑ 12. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	101
ΕΙΚΟΝΑ 13. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΤΙΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	103
ΕΙΚΟΝΑ 14. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	103
ΕΙΚΟΝΑ 15. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	104
ΕΙΚΟΝΑ 16. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	104
ΕΙΚΟΝΑ 17. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΒΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	105
ΕΙΚΟΝΑ 18. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	105
ΕΙΚΟΝΑ 19. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΑΝΑΡΡΙΧΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	106
ΕΙΚΟΝΑ 20. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΗΜΙΑΝΟΡΘΩΜΕΝΟΥ ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ	106
ΕΙΚΟΝΑ 21. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΟΡΘΩΜΕΝΟΥ ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ.....	107
ΕΙΚΟΝΑ 22. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΜΕ s ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ.....	107
ΕΙΚΟΝΑ 23. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΜΕ s ΘΕΤΙΚΟ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ	108
ΕΙΚΟΝΑ 24. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΣ	108
ΕΙΚΟΝΑ 25. ΘΕΤΙΚΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΠΑΛΜΟΣ	109
ΕΙΚΟΝΑ 26. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ.....	110
ΕΙΚΟΝΑ 27. ΠΡΙΟΝΩΤΟ ΣΗΜΑ.....	110
ΕΙΚΟΝΑ 28. ΣΧΗΜΑΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΙΑΜΟΣΦΩΣΗΣ ΣΗΜΑΤΩΝ	114
ΕΙΚΟΝΑ 29. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ.....	115
ΕΙΚΟΝΑ 30. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ AM	116
ΕΙΚΟΝΑ 31. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ FM	117
ΕΙΚΟΝΑ 32. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΦΑΣΗΣ	120
ΕΙΚΟΝΑ 33. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ.....	122
ΕΙΚΟΝΑ 34. ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑ	124
ΕΙΚΟΝΑ 35. FDM	125
ΕΙΚΟΝΑ 36. TDM	126
ΕΙΚΟΝΑ 37. ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΙΣΧΥΟΣ	132
ΕΙΚΟΝΑ 38. ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΙΣΧΥΟΣ ΤΟΥ ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ	134
ΕΙΚΟΝΑ 39. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΤΟΥ ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ	135
ΕΙΚΟΝΑ 40. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ $m(t)$, ΠΕΡΙΟΔΟΥ T ΩΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ (ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER)	143
ΕΙΚΟΝΑ 41. ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ	144
ΕΙΚΟΝΑ 42. ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	160
ΕΙΚΟΝΑ 43. ΣΕΙΡΙΑΚΗ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΔΥΟ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.....	163
ΕΙΚΟΝΑ 44. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΙΑΣΥΝΔΕΣΗ ΔΥΟ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	164
ΕΙΚΟΝΑ 45. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ	167
ΕΙΚΟΝΑ 46. ΡΟΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ	168

ΕΙΚΟΝΑ 47. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ FS ΣΕ ΣΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ FB.....	170
ΕΙΚΟΝΑ 48. ΣΥΣΤΗΜΑ ΙΔΑΝΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ.....	171
ΕΙΚΟΝΑ 49. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ.....	177
ΕΙΚΟΝΑ 50. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΜΕ ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ.....	178
ΕΙΚΟΝΑ 51. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ.....	182
ΕΙΚΟΝΑ 52. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ ΚΑΝΑΛΙΑ ΜΕ ΜΝΗΜΗ.....	195
ΕΙΚΟΝΑ 53. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ.....	208
ΕΙΚΟΝΑ 54. ΑΘΟΡΥΒΟ ΔΥΑΔΙΚΟ ΚΑΝΑΛΙ.....	212
ΕΙΚΟΝΑ 55. ΘΟΡΥΒΩΔΕΣ ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΜΗ-ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΕΣ ΕΞΟΔΟΥΣ.....	213
ΕΙΚΟΝΑ 56. ΘΟΡΥΒΩΔΗΣ ΓΡΑΦΟΜΗΧΑΝΗ.....	215
ΕΙΚΟΝΑ 57. ΔΥΑΔΙΚΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΚΑΝΑΛΙ.....	215
ΕΙΚΟΝΑ 58. ΔΥΑΔΙΚΟ ΚΑΝΑΛΙ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ.....	216
ΕΙΚΟΝΑ 59. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΚΑΝΑΛΙΑ ΜΕ ΘΟΡΥΒΟ.....	218
ΕΙΚΟΝΑ 60. ΚΑΝΑΛΙ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ.....	222
ΕΙΚΟΝΑ 61. ΚΑΝΑΛΙ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΣΗΜΑΤΟΣ.....	222
ΕΙΚΟΝΑ 62. ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΟ ΔΙΚΤΥΟ.....	223
ΕΙΚΟΝΑ 63. ΔΙΚΤΥΟ ΣΩΛΗΝΩΣΕΩΝ.....	224
ΕΙΚΟΝΑ 64. ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΣΟΤΙΜΙΑΣ.....	248
ΕΙΚΟΝΑ 65. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΔΙΚΑ.....	251
ΕΙΚΟΝΑ 66. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΚΩΔΙΚΑ.....	251
ΕΙΚΟΝΑ 67. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΩΔΙΚΩΝ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.....	253
ΕΙΚΟΝΑ 68. HAMMING ΚΩΔΙΚΑΣ ΓΙΑ $r=3$	262
ΕΙΚΟΝΑ 69. ΤΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ ΜΕ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΤΙΜΗΘΗΚΕ Ο HAMMING ΑΠΟ ΤΟ ΙΕΕΕ.....	263
ΕΙΚΟΝΑ 70. ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΤΗΣ.....	271
ΕΙΚΟΝΑ 71. ΣΥΝΕΛΙΚΤΙΚΟΣ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΤΗΣ ΜΕ $(N, K, K) = (2, 1, 3)$	272
ΕΙΚΟΝΑ 72. ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ TURBO.....	275
ΕΙΚΟΝΑ 73. ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ TURBO.....	276

Κεφάλαιο 1.

Εισαγωγή

Στις μέρες μας υπάρχει ραγδαία ανάπτυξη των μέσων καταγραφής, αποθήκευσης, επεξεργασίας και μετάδοσης των δεδομένων, καθώς επίσης και των συναφών τεχνολογιών επικοινωνίας, όπως το τηλέφωνο, η τηλεόραση και τα δίκτυα υπολογιστών. Κοινός τόπος όλων αυτών των τεχνολογικών επιτευγμάτων είναι η ακριβής, ταχεία, ασφαλής και οικονομική αποθήκευση και μετάδοση της πληροφορίας.

Όλη αυτή η ανάπτυξη έδωσε περισσότερους καρπούς μετά τη μαθηματική θεμελίωση της έννοιας της πληροφορίας. Πριν τα μέσα του εικοστού αιώνα, η έννοια της πληροφορίας ήταν κατά βάση αφηρημένη και ποιοτική. Επομένως, οποιαδήποτε προσπάθεια εξαγωγής νόμων που διέπουν την πληροφορία και την επικοινωνία ήταν αρχικά αδύνατη. Αυτή η αδυναμία ποσοτικοποίησης της έννοιας της πληροφορίας αντιμετωπίστηκε αρχικά από τον **Hartley** και στη συνέχεια από τον **Shannon**.

Πρώτος ο Hartley το 1928 όρισε την «**ποσότητα πληροφορίας**». Είπε πως η «πληροφορία» προκύπτει από τη διαδοχική επιλογή συμβόλων ή λέξεων από ένα δοσμένο «αλφάβητο» ή λεξιλόγιο, προκειμένου να οικοδομηθεί ένα μήνυμα (κείμενο) με κάποιο νόημα (τάξη, λογική). Ένα χρόνο αργότερα, το 1929, ο **Szillard** συνέδεσε την πληροφορία και τη θερμοδυναμική εντροπία.

Το 1948, με την δημοσίευση της εργασίας του C. E. Shannon με τίτλο «A

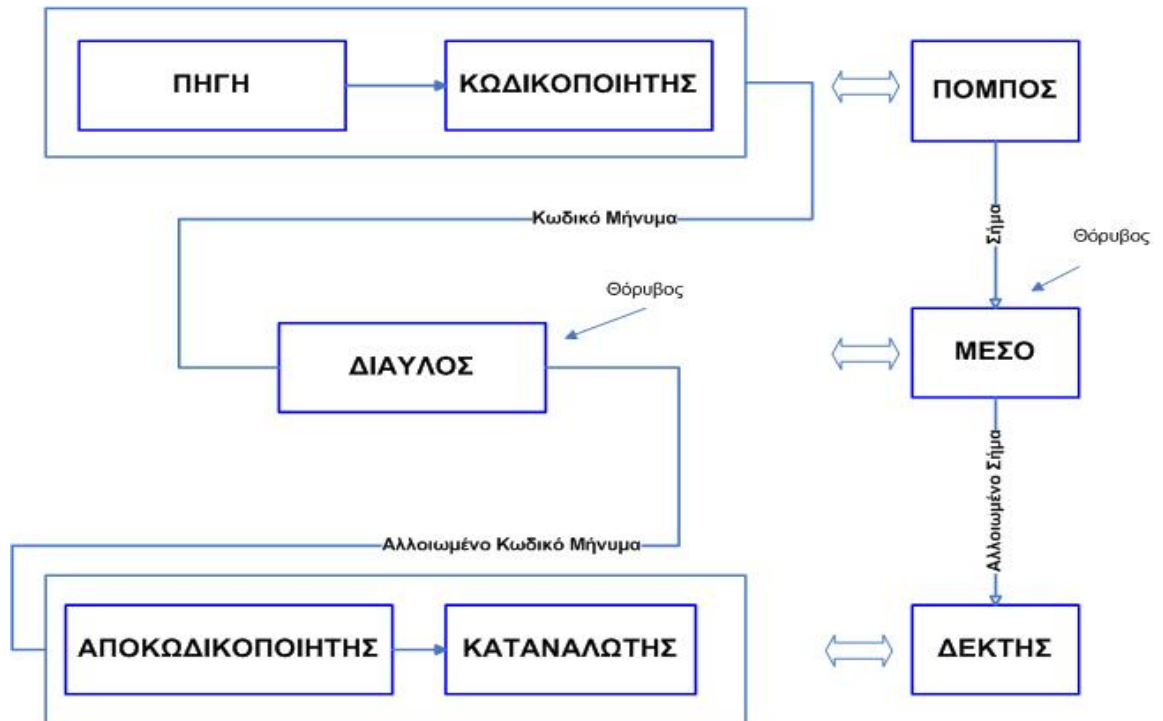
Mathematical Theory of Communication», γεννήθηκε μια νέα επιστημονική περιοχή, η **Θεωρία της Πληροφορίας ή Θεωρία Πληροφοριών**. Στόχος της είναι η θεμελίωση εννοιών και θεωρημάτων που επιτρέπουν τη μαθηματική περιγραφή της διαδικασίας της επικοινωνίας. Με αυτό το τρόπο, η μετάδοση πληροφοριών μπορεί να αναλυθεί με μαθηματική αυστηρότητα και ακρίβεια, ενώ σε ένα επόμενο βήμα είναι δυνατόν να σχεδιαστούν καλύτερα συστήματα επικοινωνιών. Η νέα θεωρία βασισμένη στη στατιστική, τη θεωρία πιθανοτήτων και την άλγεβρα μπορεί να απαντήσει με μαθηματική ακρίβεια σε ερωτήματα που σχετίζονται με τη βέλτιστη συμπίεση των δεδομένων, την περιγραφή των διαύλων επικοινωνίας, την κωδικοποίηση των μηνυμάτων πληροφορίας, το ρυθμό μετάδοσης των πληροφοριών σε περιβάλλον θορύβου, την κρυπτογράφηση κ.α..

Αν και αρχικά η θεωρία της πληροφορίας αποτέλεσε τμήμα της επιστήμης των επικοινωνιών, σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα αναπτύχθηκε σε ανεξάρτητη επιστήμη με συμβολή σε επιστήμες και θέματα πέρα από τις παραδοσιακές περιοχές των τηλεπικοινωνιών και των μαθηματικών. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τη Στατιστική Φυσική (Θερμοδυναμική), την Επιστήμη υπολογιστών (αλγοριθμική πολυπλοκότητα), τη Στατιστική, τη Βιολογία (Γενετική τεχνολογία), τη γλωσσολογία, τη σχεδίαση υπολογιστικών συστημάτων κ.α.. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι στις μέρες μας, η θεωρία της πληροφορίας, λόγω της μαθηματικής της ακρίβειας και των γενικευμένων συμπερασμάτων της, αποτελεί χωριστό κλάδο των μαθηματικών.

Μέχρι το 1948 κάθε τηλεπικοινωνιακός μηχανικός θα υποστήριζε σθεναρά την άποψη ότι, για να βελτιστοποιηθεί η αξιοπιστία της επικοινωνίας, είναι απαραίτητο να ελαττωθεί ο ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας ή αντίστροφα, ότι το πλήθος των σφαλμάτων αυξάνει το ρυθμό μετάδοσης του μηνύματος. Ο Shannon απέδειξε ότι είναι δυνατόν να μείνει σταθερός (μικρότερος της χωρητικότητας του διαύλου) ο ρυθμός μετάδοσης της πληροφορίας και παρόλα αυτά η πιθανότητα σφάλματος να παραμείνει εξαιρετικά μικρή. Η χωρητικότητα του διαύλου μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα χαρακτηριστικά θορύβου του διαύλου. Οι ιδέες του Shannon

αξιοποιήθηκαν από πλήθος ερευνητών, τόσο τηλεπικοινωνιακών μηχανικών όσο και μαθηματικών, με αποτέλεσμα να αναπτύξουν σε σχετικά λίγα χρόνια τη νέα επιστήμη της θεωρίας της πληροφορίας.

Ένα σύστημα επικοινωνίας, στα πλαίσια της θεωρίας της πληροφορίας, αντιστοιχεί στο κλασικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα πομπού, διαύλου και δέκτη, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 1).



Εικόνα 1. Γενικό διάγραμμα συστήματος τηλεπικοινωνίας

Ο πομπός αποτελείται από την πηγή πληροφορίας και τον κωδικοποιητή. Η πληροφορία παράγεται στην πηγή (πληροφορίας) και οργανώνεται σε μηνύματα πληροφορίας, τα οποία στη συνέχεια μετατρέπονται σε κωδικά μηνύματα. Ο δίαυλος πληροφορίας, ο οποίος είναι στην ουσία το μέσο που παρεμβάλλεται μεταξύ του πομπού και του δέκτη, διοχετεύει την κωδικοποιημένη πληροφορία στο σημείο προορισμού. Όταν η πληροφορία διαπερνά το δίαυλο, είναι δυνατόν να αλλοιωθεί λόγω της παρουσίας θορύβου. Η πληροφορία λαμβάνεται από το δέκτη, όπου αρχικά αποκωδικοποιείται και στη συνέχεια παρουσιάζεται στον

προορισμό της.

Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι έννοιες του συστήματος επικοινωνίας από την άποψη των τηλεπικοινωνιών.

Επικοινωνία είναι κάθε διαδικασία μεταφοράς πληροφορίας μεταξύ δύο σημείων του χώρου – χρόνου (π.χ. τηλεφωνική συνδιάλεξη).

Πηγή πληροφορίας είναι το τμήμα του συστήματος επικοινωνίας που παράγει πληροφορία με τη μορφή συμβόλων (π.χ. δελτίο καιρού). Η πληροφορία προσαρτάται στα σύμβολα με κριτήριο την πιθανότητα εμφάνισης τους στην έξοδο της πηγής πληροφορίας.

Αλφάβητο είναι το σύνολο των συμβόλων που χρησιμοποιεί η πηγή πληροφορίας (π.χ. αριθμοί, γράμματα, διαγράμματα, χάρτες).

Λέξη Πληροφορίας είναι η βραχεία διάταξη συμβόλων πληροφορίας (π.χ. λέξη αποτελούμενη από γράμματα, όπως σταθμός).

Μήνυμα Πληροφορίας είναι η διάταξη των λέξεων πληροφορίας (π.χ. μια πρόταση αποτελούμενη από λέξεις, όπως ο σιδηροδρομικός σταθμός είναι συνέχεια ανοικτός).

Κωδικοποίηση είναι η αντικατάσταση των συμβόλων πληροφορίας από άλλα (κωδικά) σύμβολα με αντικειμενικό σκοπό τη βελτιστοποίηση της επικοινωνίας (π.χ. αντικατάσταση γραμμάτων από τελείες και παύλες κατά τον κώδικα Morse). Η κωδικοποιημένη πληροφορία οργανώνεται επίσης σε επιμέρους κωδικές λέξεις και κωδικά μηνύματα.

Κώδικας είναι κάθε τεχνική κωδικοποίησης. Το σύνολο των κωδικών συμβόλων είναι το αλφάβητο του κώδικα. Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση συμβόλων, λέξεων και μηνυμάτων πληροφορίας σε κωδικά σύμβολα, κωδικές λέξεις και κωδικά μηνύματα είναι το κλειδί του κώδικα. Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε το κωδικό αλφάβητο $\Gamma = \{0,1\}$. Η δυαδική κωδικοποίηση είναι η συνηθέστερη επιλογή στα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας. Με βάση αυτό το κωδικό αλφάβητο, ας υποθέσουμε ότι για την πηγή πληροφορίας με αλφάβητο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ υπάρχουν οι τρεις παρακάτω δυαδικοί κώδικες:

$\alpha_1 \rightarrow 0$	$\alpha_1 \rightarrow 00$	$\alpha_1 \rightarrow 0$
$\alpha_2 \rightarrow 1$	$\alpha_2 \rightarrow 01$	$\alpha_2 \rightarrow 11$
$\alpha_3 \rightarrow 1$	$\alpha_3 \rightarrow 10$	$\alpha_3 \rightarrow 10$
I	II	III

Ο κώδικας I είναι απεικόνιση του A στο Γ , ο κώδικας II είναι απεικόνιση του A στο Γ^2 ενώ ο κώδικας III είναι απεικόνιση του A στο $\Gamma \cup \Gamma^2$. Οι δύο πρώτοι κώδικες έχουν σταθερό αριθμό δυαδικών συμβόλων (ισομήκεις), ενώ ο τρίτος μεταβλητό (δεν είναι ισομήκης).

Απαραίτητο στοιχείο του πομπού είναι ο **μεταλλάκτης**, που μετατρέπει το κωδικοποιημένο μήνυμα σε σήμα, δηλαδή μορφή κατάλληλη για μετάδοση (π.χ. σειρά ηλεκτρικών παλμών). Το σήμα αποτελεί τον υλικό φορέα της πληροφορίας.

Δίαυλος Πληροφορίας ή κανάλι είναι αλυσίδα μέσων και συσκευών (π.χ. καλώδια, κυματοδηγοί, οπτικές ίνες), που μεταδίδουν το σήμα με την αποτυπωμένη σε αυτό πληροφορία.

Χωρητικότητα διαύλου πληροφορίας είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας (π.χ. το τηλέτυπο μεταδίδει 10 λέξεις / sec). Καθορίζει το χρόνο και το κόστος που απαιτούνται για τη μετάδοση μηνύματος ή το πλήθος των μηνυμάτων που είναι δυνατό να διοχετεύει ταυτόχρονα ο δίαυλος πληροφορίας.

Θόρυβος είναι κάθε ανεξέλεγκτη παρεμβολή του περιβάλλοντος του διαύλου, που προκαλεί αλλοίωση του σήματος και συνεπώς σφάλματα μετάδοσης (απώλεια πληροφορίας). Συνήθως, στα κανάλια επικοινωνίας υπάρχουν διάφορων ειδών θόρυβοι, όπως ο θερμικός θόρυβος, ο κρουστικός θόρυβος, ο θόρυβος περιβάλλοντος ή η παρεμβολή ομιλίας από άλλες γραμμές (κανάλια). Μέχρι το 1948 ο τηλεπικοινωνιακός μηχανικός επιδίωκε την προστασία του σήματος από τον θόρυβο, δηλαδή την πιστή αναπαραγωγή του σήματος στο δέκτη. Με την ωρίμανση της θεωρίας της πληροφορίας, το ενδιαφέρον μετατοπίστηκε στην πιστή αναπαραγωγή του μηνύματος πληροφορίας που είναι αποτυπωμένο το σήμα. Σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά συστήματα εξασφαλίζουν αξιόπιστη

ροή πληροφορίας με σήμα βαθιά θαμμένο σε θόρυβο.

Αποκωδικοποιητής αντιπροσωπεύει την επεξεργασία που γίνεται στο σήμα, που προκύπτει στην έξοδο του καναλιού, προκειμένου να αναπαραχθεί ένα όσο το δυνατόν πιστότερο αντίγραφο του σήματος στην έξοδο της πηγής πληροφορίας

Καταναλωτής της πληροφορίας είναι το τελευταίο τμήμα του συστήματος επικοινωνίας, όπου αναδομείται το αρχικό μήνυμα πληροφορίας. Έπεται του μεταλλάκτη, που μετατρέπει το σήμα σε κωδικό μήνυμα και του αποκωδικοποιητή, που μετατρέπει το κωδικό μήνυμα στο αρχικό μήνυμα πληροφορίας, αφού αποκαλύψει και διορθώσει σφάλματα μετάδοσης. Η πληροφορία αποτυπώνεται σε κείμενο, ήχο, εικόνα ή άλλη μορφή, με αποτέλεσμα ο χρήστης να αυξάνει τη γνώση του ή να αποθηκεύει την ανωτέρω πληροφορία για μελλοντική χρήση.

Κεφάλαιο 2.

Πληροφορία και Εντροπία

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να εξοικειωθούμε με τις βασικές αρχές και έννοιες της θεωρίας της πληροφορίας, μέσα στο πλαίσιο ενός μοντέλου επικοινωνίας, με τη βοήθεια της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Αρχικά, θα εξετάσουμε, θα περιγράψουμε και θα επεξηγήσουμε το μέτρο ποσότητας πληροφορίας και τις ιδιότητες του. Στη συνέχεια θα ερευνήσουμε πώς ορίζεται η εντροπία για μια ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές. Τέλος, θα δούμε τις διάφορες μορφές εντροπίας που υπάρχουν (π.χ. υπό συνθήκη, σχετική) και τις ιδιότητες που διέπουν την εντροπία ως μέτρο πληροφορίας.

2.1 Βασικές έννοιες - αξιώματα Πιθανοτήτων

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να επαναφέρουμε στη μνήμη μας βασικές έννοιες - αξιώματα πιθανοτήτων που απαιτούνται στους ορισμούς των μέτρων ποσότητας πληροφορίας και στη μελέτη ζητημάτων της Θεωρίας Πληροφορίας.

Το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος, παραδείγματος χάριν της ρίψης ενός ζαριού ή κέρματος, δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο.

Εκβάσεις ή ενδεχόμενα ή δειγματικά σημεία (elementary event)

λέγονται τα ατομικά αδιαίρετα αποτελέσματα $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ενός πειράματος, όπως στην περίπτωση του ζαριού τα 1,2,3,4,5,6. Με τον ίδιο τρόπο η επιλογή από την πηγή πληροφορίας των συμβόλων ενός μηνύματος είναι ένα τυχαίο πείραμα και τα σύμβολα τα δειγματικά σημεία.

Δειγματικός χώρος (sample space) λέγεται το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$) (δείγματα) ενός τυχαίου πειράματος, δηλαδή ενός πειράματος το οποίο, εάν επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες, το αποτέλεσμα του θα διαφέρει κατά τρόπο απρόβλεπτο. Στην περίπτωση της ρίψης του ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και στην περίπτωση επιλογής ενός συμβόλου κατά το σχηματισμό μηνύματος από πηγή πληροφορίας είναι το αλφάβητο που χρησιμοποιείται.

Γεγονός (event) λέγεται κάθε υποσύνολο A του δειγματικού χώρου, δηλαδή μια συλλογή εκβάσεων ή απλών ενδεχομένων ή δειγματικών σημείων. Στην περίπτωση του ζαριού το $\Omega_1 = \{1, 4\}$ και στην περίπτωση της πηγής μία λέξη.

Επίσης, ορίζεται ως **βέβαιο γεγονός (certain event)** το σύνολο του δειγματοχώρου, αφού θα συμβαίνει πάντα, και ως **μηδενικό γεγονός (null event)** το σύνολο που δεν περιέχει κανένα αποτέλεσμα και συνεπώς δεν θα συμβεί ποτέ.

Αν θεωρηθεί ότι ένα γεγονός A αποτελείται από v δειγματικά σημεία και ότι όλα τα σημεία του δειγματικού χώρου είναι N και ισοπίθανα, τότε ορίζεται ως πιθανότητα του A ο λόγος v/N . Η **πιθανότητα** $P(A)$ ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα της θεωρίας πιθανοτήτων:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ για κάθε γεγονός } A \in \Omega$$

$$P(\Omega) = 1 \text{ για το δειγματοχώρο } \Omega$$

Για κάθε δύο αποκλειστικά αμοιβαία (mutually exclusive) γεγονότα A_1 και A_2 (δηλαδή $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) ισχύει: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Επακόλουθα των παραπάνω αξιωμάτων είναι και τα ακόλουθα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Αν $A \subset B$, τότε θα είναι $P(A) \leq P(B)$

Αν A_1, A_2, \dots, A_N είναι γεγονότα ανά δύο αποκλειστικά αμοιβαία τότε ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N P(A_k) \text{ για } N \geq 2$$

$P(\emptyset) = 0$, όπου \emptyset το κενό σύνολο

$P(A^c) = 1 - P(A)$, όπου A^c είναι το συμπλήρωμα του συνόλου A .

Παράδειγμα 2.1

Πείραμα ρίψης τίμιου ζαριού: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν όλα τα γεγονότα (οι εκβάσεις δηλαδή που προκύπτουν με τη ρίψη του ζαριού) είναι ισοπίθανα, υπολογίστε τις επιμέρους πιθανότητες, καθώς και τις $P\{2, 5\}$, $P\{3, 6\}$, $P\{1, 4\}$, $P\{1, 3, 5\}$ και $P\{2, 4, 6\}$.

Λύση:

Αφού τα γεγονότα είναι ισοπίθανα, ισχύει $P\{1\} = P\{2\} = \dots = P\{6\} = 1/6$.

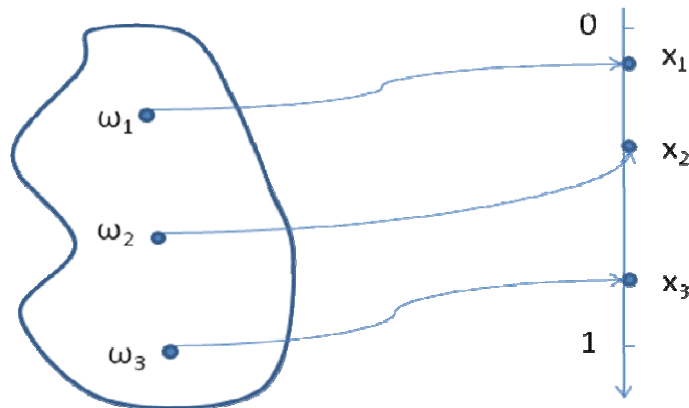
Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων πιθανοτήτων, μιας και τα γεγονότα είναι αποκλειστικά αμοιβαία μεταξύ τους, ισχύουν τα ακόλουθα

$$P\{2, 5\} = P(2) + P(5) = 1/6 + 1/6 = 1/3 .$$

Όμοια $P\{3, 6\} = 1/3$ και $P\{1, 4\} = 1/3$

$$P\{1, 3, 5\} = 1/2 \text{ και } P\{2, 4, 6\} = 1/2$$

Τυχαία μεταβλητή είναι μια μονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα δειγματικό χώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο ορισμός της τυχαίας μεταβλητής ως αντιστοίχιση στοιχειωδών γεγονότων ενός δειγματοχώρου με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 2):



Εικόνα 2. Αντιστοίχιση στοιχειωδών γεγονότων με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών

Μία τυχαία μεταβλητή λέγεται **διακριτή** αν το σύνολο των τιμών της είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο (απείρως αριθμήσιμο σημαίνει πως το σύνολο των δυνατών τιμών της μεταβλητής μπορεί να τεθεί σε μία προς μία αντιστοιχία με το σύνολο των ακέραιων αριθμών). Οι **συνεχείς τυχαίες μεταβλητές** αντιστοιχούν σε συνεχείς δειγματικούς χώρους.

Παράδειγμα 2.2

Σε τρεις διαδοχικές ρίψεις κέρματος ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X . Να βρεθεί πόσες φορές ήρθε κεφαλή στις τρεις διαδοχικές ρίψεις.

Λύση:

Δειγματοχώρος: $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$$X(\Omega) = \{3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0\}$$

Εύρος τιμών TM: $S_x = \{0, 1, 2, 3\}$

Έστω ένα τυχαίο πείραμα Ω με δειγματοχώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και η διακριτή τυχαία μεταβλητή X με πεδίο τιμών $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Κάθε γεγονός ω_i μπορεί να συμβεί με πιθανότητα $P(\Omega = \omega_i) = P(X = x_i) = p_i$.
Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) λέγεται η

$P(X = x_i) = p_i$ και το σύνολο των πιθανοτήτων αυτών είναι $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$p(x_i) \geq 0, \text{ για κάθε } i$$

$$\sum_i^n p(x_i) = 1$$

Η **συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας (cumulative distribution function)** μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$F(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i), \text{ για κάθε } x \in (-\infty, \infty)$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$F(X \leq x) = P[X \in (-\infty, x)] = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, \infty)$$

Η μη αρνητική συνάρτηση $f(x)$ καλείται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X** . Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\int_B f(x) dx = P(X \in B)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι οι ακόλουθες:

$$0 \leq F(X \leq x) \leq 1, \text{ για κάθε } x$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι μη φθίνουσα, δηλαδή αν $x_i \leq x_k$ τότε:

$$F(X \leq x_i) \leq F(X \leq x_k)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(X \leq x) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(X \leq x) = 0$$

Μερικές φορές συνδυάζουμε δύο πειράματα ή τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτή

τη περίπτωση έχουμε δύο δειγματικούς χώρους, έστω X και Y , όπου ο δειγματικός χώρος Y αναφέρεται στο αντίστοιχο πείραμα ή στην αντίστοιχη διακριτή τυχαία μεταβλητή $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y είναι $P(Y) = \{p(y_1), p(y_2), \dots, p(y_m)\}$, δηλαδή $p(y_j) = P(Y = y_j)$.

Ας εξετάσουμε τώρα το πείραμα (X, Y) με δειγματικό χώρο το σύνολο των συνδυασμών (x, y) . Ορίζουμε ως **συνάρτηση συνδυασμένης πιθανότητας μάζας** την $p(x_i, y_j) = p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, που δίνει την πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$. Από τη συνάρτηση συνδυασμένης πιθανότητας μάζας p_{ij} μπορούν να υπολογιστούν οι **συναρτήσεις ακραίας πιθανότητας μάζας** $p(x_i)$ και $p(y_j)$:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij} \text{ και } p(y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

Παράδειγμα 2.3

Έστω ότι οι X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και ότι η συνάρτηση συνδυασμένης πιθανότητας μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$p_{ij} = \frac{x_i y_j}{27}, \text{ για } X = \{1, 2\} \text{ και } Y = \{2, 3, 4\}$$

Ποιες είναι οι συναρτήσεις ακραίας πιθανότητας μάζας.

Λύση:

Οι συναρτήσεις ακραίας πιθανότητας μάζας υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$p(x_i) = \sum_{y=2}^4 \frac{x_i y}{27}, \text{ για } x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ και } p(y_j) = \sum_{x=1}^2 \frac{x y_j}{27}, \text{ για } y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4 \bullet$$

Η **υπό συνθήκη πιθανότητα** είναι ένας άλλος τύπος πιθανότητας, που προκύπτει, όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος Y αποτελεί τη συνθήκη για ένα άλλο πείραμα X . Ας εξετάσουμε ως παράδειγμα το εξής ερώτημα: Ποια η πιθανότητα της εμφάνισης του συμβόλου “α” κατά τη λήψη

μηνύματος στην ελληνική γλώσσα, όταν ο παραλήπτης έλαβε ήδη το τμήμα “θάλασσ”. Η πιθανότητα εμφάνισης είναι πολύ υψηλή, αφού το επόμενο γράμμα μπορεί να είναι “α” ή “ε” (θάλασσα ή θάλασσες). Η εμφάνιση γραμμάτων σε λέξεις συνήθως εξαρτάται από τα γράμματα που ήδη έχουν εμφανιστεί. Έτσι, υπάρχει μικρή πιθανότητα το γράμμα “κ” να ακολουθείται από το “β”. Αντιθέτως, είναι υψηλή η πιθανότητα το “κ” να ακολουθείται από “α”.

Η **συνάρτηση υπό συνθήκη πιθανότητας μάζας** $p(x_i / y_j)$, που δίνει την πιθανότητα $X = x_i$ δεδομένου του $Y = y_j$, ορίζεται ως ακολούθως:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \text{ εφόσον } p(y_j) > 0$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση υπό συνθήκη πιθανότητας μάζας $p(y_j / x_i)$, που δίνει την πιθανότητα $Y = y_j$ δεδομένου του $X = x_i$, δίνεται από παρακάτω σχέση

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \text{ εφόσον } p(x_i) > 0$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει η **συνάρτηση συνδυασμένης πιθανότητας μάζας**:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i / y_j)p(y_j) = p(y_j / x_i)p(x_i)$$

Όσον αφορά στην υπό συνθήκη πιθανότητα μάζας, ισχύει και η σχέση

$$\sum_{i=1}^n p(x_i / y_j) = 1$$

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη αν ισχύει η σχέση $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$

Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει ακόμη $p(x_i / y_j) = p(x_i)$ και $p(y_j / x_i) = p(y_j)$

Όταν δίνεται η υπό συνθήκη πιθανότητα μάζας $p(y_j / x_i)$ και η $p(x_i)$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε την $p(x_i / y_j)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το **θεώρημα του Bayes**. Όπως είδαμε προηγουμένως,

ισχύει:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i / y_j)p(y_j) = p(y_j / x_i)p(x_i)$$

Αν είναι $p(y_j) > 0$, τότε η ακόλουθη σχέση επιτρέπει τον προσδιορισμό της

$p(x_i / y_j)$:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j / x_i)p(x_i)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j / x_i)p(x_i)}{\sum_{i=1}^n p(y_j, x_i)} = \frac{p(y_j / x_i)p(x_i)}{\sum_{i=1}^n p(y_j / x_i)p(x_i)}$$

Είναι, δηλαδή, δυνατός ο υπολογισμός της υπό συνθήκη πιθανότητας $P(A|B)$ χωρίς αναφορά στη συνδυασμένη πιθανότητα $P(A, B)$, οπότε και ισχύει ο γενικός τύπος

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \text{ γνωστός και ως θεώρημα του Bayes.}$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes, όπως αλλιώς είναι γνωστός, προκειμένου να αναθεωρήσουμε μια αρχική υπόθεση A υπό το πρίσμα ενός νέου γεγονότος B . Συγκεκριμένα, η μεταγενέστερη υπόθεση $P(A|B)$ υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την προγενέστερη υπόθεση $P(A)$ με την πιθανότητα $P(B|A)$, όπου το B προκύπτει εάν το A αληθεύει. Η χρησιμότητα του θεωρήματος του Bayes έγκειται στο γεγονός ότι, σε πολλές περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A|B)$ και είναι δύσκολο να το κάνουμε απευθείας, μπορούμε να πάρουμε την πληροφορία που θέλουμε, εφόσον γνωρίζουμε την πιθανότητα $P(B|A)$.

Για παράδειγμα, υποθέτουμε πως θέλουμε να μελετήσουμε τους ασθενείς μιας πνευμονολογικής κλινικής με διάγνωση καρκίνου. Έστω A το γεγονός «το άτομο έχει καρκίνο» και B το γεγονός «το άτομο είναι καπνιστής». Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε την πιθανότητα του προγενέστερου γεγονότος $P(A) = 0,1$, βασιζόμενοι σε παρελθοντικά στοιχεία (10% των ασθενών που επισκέπτονται την κλινική αποδεικνύεται πως έχουν καρκίνο). Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του μεταγενέστερου γεγονότος $P(A|B)$, δηλαδή πόσα άτομα, από αυτά που είναι καπνιστές, έχουν καρκίνο. Αυτό είναι δύσκολο να υπολογιστεί απευθείας. Ωστόσο, μπορούμε να

γνωρίζουμε την πιθανότητα $P(B)$ υπολογίζοντας το ποσοστό των ασθενών που καπνίζουν, έστω $P(B)=0,5$. Επίσης, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την ποσότητα $P(B|A)$ ελέγχοντας τα αρχεία για το ποσοστό των καπνιστών σε σχέση με αυτούς που έχουν διαγνωσθεί, έστω $P(B|A)=0,8$.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, έχουμε

$$P(A|B) = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,5} = 0,16$$

Έτσι, με τη θεώρηση ότι ένα άτομο είναι καπνιστής, η αρχική, προγενέστερη πιθανότητα 0,1 μετατρέπεται στη μεταγενέστερη πιθανότητα 0,16, που αποτελεί σημαντική αύξηση.

Ο παρονομαστής $P(B)$ στον τύπο του θεωρήματος μπορεί να γραφεί και ως $P(B) = \sum_i P(B, A_i) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$, οπότε ο κανόνας του Bayes παίρνει

τη μορφή, που αναφέρθηκε παραπάνω,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

2.2 Μέτρο της Πληροφορίας

Κεντρικό ρόλο στη θεωρία της πληροφορίας παίζει η ίδια η έννοια της πληροφορίας. Σύμφωνα με τη θεωρία, η πληροφορία έχει ποσοτικό χαρακτήρα και συνεπώς διαφέρει σημαντικά από το εννοιολογικό περιεχόμενο που της αποδίδουμε στην καθημερινή μας ζωή. Το πρόβλημα της ποσοτικοποίησης της έννοιας της πληροφορίας και ο ορισμός ενός κατάλληλου μέτρου για τον υπολογισμό της απασχόλησε τον Hartley το 1928. Ο Hartley, κατά τη μελέτη των τηλεγραφικών επικοινωνιών, διαπίστωσε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος τόσο πιο μικρή είναι η αβεβαιότητα για το αν θα συμβεί το γεγονός. Στην περίπτωση που το γεγονός συμβεί, η πληροφορία που θα λάβουμε θα είναι μικρή. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι συνηθισμένα γεγονότα, όπως για παράδειγμα «Σήμερα ο ήλιος ανέτειλε» συνοδεύονται από μικρή ποσότητα πληροφορίας, ενώ σπάνια

γεγονότα, όπως παραδείγματος χάρη «Σήμερα έγινε ολική έκλειψη ηλίου» συνοδεύονται από μεγάλη ποσότητα πληροφορίας. Αυτό συμβαίνει, επειδή το δεύτερο γεγονός έχει μικρή πιθανότητα να συμβεί σε σχέση με το πρώτο, που είναι βέβαιο.

Επομένως, αν A είναι ένα τυχαίο γεγονός με πιθανότητα $p(A)$ και $I(A)$ είναι η **συνάρτηση του μέτρου της πληροφορίας** του A , τότε η $I(A)$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Όταν η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός είναι μονάδα, τότε η ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι δε χρειάζεται η διαβίβαση του μηνύματος, αφού το γεγονός είναι σίγουρο ότι θα συμβεί, δηλαδή:

$$I_A = 0, \quad \text{όταν} \quad P_A = 1 \quad (2.1)$$

Είναι γεγονός ότι η πληροφορία ενός γεγονότος είναι ένα μη αρνητικό μέγεθος, αφού ισχύει $0 \leq P_A \leq 1$, δηλαδή:

$$I_A \geq 0, \quad \text{όταν} \quad 0 \leq P_A \leq 1 \quad (2.2)$$

Όσο πιο απίθανο είναι να συμβεί ένα γεγονός, τόσο περισσότερη πληροφορία λαμβάνουμε από την πραγματοποίησή του, δηλαδή:

$$I_A \geq I_B \quad \text{όταν} \quad P_A \leq P_B \quad (2.3)$$

Τέλος, αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα με αντίστοιχες πιθανότητες P_A, P_B , τότε το μέτρο της πληροφορίας του γεγονότος εμφάνισης και των δύο επιμέρους γεγονότων είναι ίσο με το άθροισμα των δύο επιμέρους μέτρων πληροφορίας, δηλαδή:

$$I_{AB} = I_A + I_B, \quad \text{όταν} \quad P_{AB} = P_A \cdot P_B \quad (2.4)$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται εύκολα παρακάτω:

$$I_{AB} = -\log_b (P_A P_B) \Rightarrow$$

$$I_{AB} = -\log_b (P_A) - \log_b (P_B) \Rightarrow$$

$$I_{AB} = I_A + I_B$$

Έτσι, υιοθετούμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός Πληροφορίας. Η πληροφορία I_A , την οποία αποκτούμε από την πραγματοποίηση ενός γεγονότος A , το οποίο έχει πιθανότητα P_A , δίνεται από τον τύπο

$$I_A = -\log_b P_A \equiv \log_b \left(\frac{1}{P_A}\right), \text{ όπου } b > 1 \quad (2.5)$$

Απόδειξη: Έστω, η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) : [0,1] \rightarrow R_+ \quad (2.6)$$

Η συνεχής συνάρτηση (2.6) έχει εξ' ορισμού τις τρεις πρώτες ιδιότητες (2.1), (2.2) και (2.3). Θεωρούμε ότι η $I(x)$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f\left[\frac{x}{m} \cdot \left(m + \frac{m\delta}{x}\right)\right] - f\left(\frac{x}{m}\right)}{\delta} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x}{m}\right) + f\left(m + \frac{m\delta}{x}\right) - f\left(\frac{x}{m}\right) - f(m)}{\delta} = \frac{m}{x} \lim_{m\delta/x \rightarrow 0} \frac{f\left(m + \frac{m\delta}{x}\right) - f(m)}{\frac{m\delta}{x}} = \\ &= \frac{m}{x} f'(m) = \frac{c}{x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

όπου m είναι ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο στο διάστημα $(0,1)$ και c σταθερά. Στην παραπάνω ανάλυση έγινε χρήση της ιδιότητας $f(\alpha b) = f(\alpha) + f(b)$. Για να είναι η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα, θα πρέπει σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σχέσης (2.7) να ισχύει $c < 0$. Επίσης από την σχέση (2.7) προκύπτει ότι

$$f(x) = c \ln(x), \quad c < 0 \quad (2.8)$$

Αν ορίσουμε τη σταθερά $b = e^{-1/c}$, τότε η σχέση (2.8) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$f(x) = -\frac{\ln(x)}{\ln(b)} = -\log_b(x) \quad (2.9)$$

Επειδή $c < 0$, θα έχουμε $b > 1$. Έτσι καταλήξαμε στον προσδιορισμό της συνάρτησης του μέτρου πληροφορίας

$$I(A) = f(x) = -\log_b(p(A)), \text{ όπου } b > 1$$

■

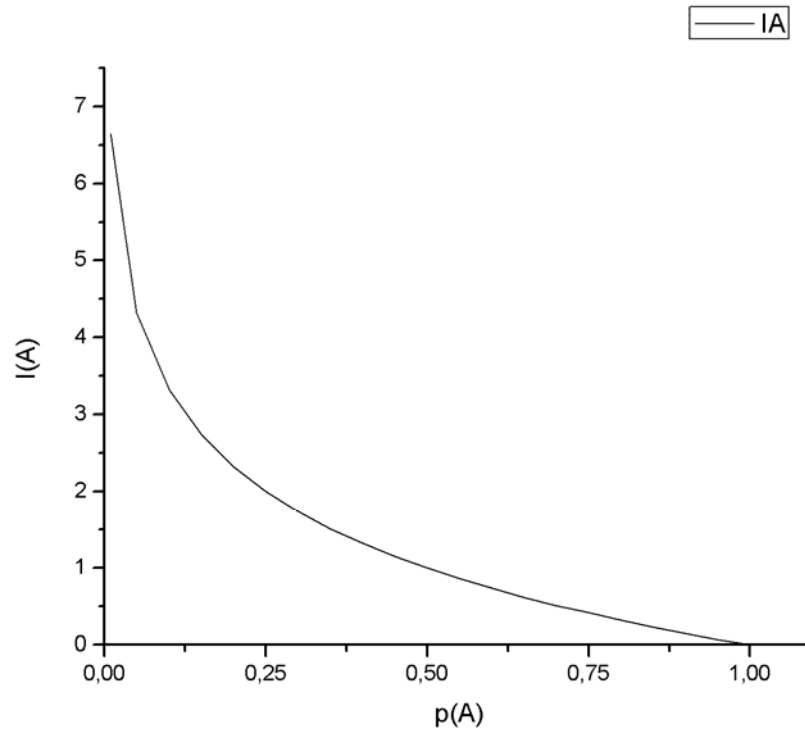
Όπως φαίνεται από την σχέση (2.5), η πληροφορία είναι ένα αδιάστατο μέγεθος, ενώ η βάση b του λογαρίθμου μπορεί να επιλεγεί ελεύθερα, αρκεί $b > 1$.

Η μονάδα μέτρησης της πληροφορίας καθορίζεται ανάλογα με τη βάση υπολογισμού του λογαρίθμου. Έτσι, όταν χρησιμοποιείται ο φυσικός λογάριθμος (natural), τότε η μονάδα είναι το **nat**, ενώ, όταν χρησιμοποιείται ο δεκαδικός λογάριθμος, η μονάδα είναι το **Hartley** ή **decit**. Η επικρατέστερη μονάδα μέτρησης της πληροφορίας είναι το **bit**. Ο λόγος που επικράτησε έναντι των έταιρων μονάδων είναι η χρησιμοποίηση του δυαδικού συστήματος αρίθμησης στους υπολογιστές. Είναι εύκολο να μετασχηματίσουμε από τη μία λογαριθμική βάση στην άλλη μέσω της σχέσης

$$\log_b x = \log_a x / \log_a b \quad (2.10)$$

Για την περίπτωση του λογαρίθμου με βάση το 2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης και η σχέση $\log_2 X = \ln X / \ln 2$, όπου \ln ο λογάριθμος με βάση e . Εφόσον το $\ln 2 = 0.693$, μπορούμε να γράψουμε $\log_2 x = \ln x / 0.693$

Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 3) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του μέτρου πληροφορίας για $b = 2$, συναρτήσει της πιθανότητας.



Εικόνα 3. Γραφική παράσταση της συνάρτησης του μέτρου της πληροφορίας για $b=2$

Παράδειγμα 2.4

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα αλφάβητο αποτελούμενο από 32 σύμβολα. Από αυτό το αλφάβητο σχηματίζουμε μηνύματα μήκους 2 συμβόλων. Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των μηνυμάτων σε μονάδες decit και bit.

Λύση:

Με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου γνωρίζουμε ότι:

$$I = \log_{10} (N^k) = k \log_{10} N$$

όπου:

k : το μήκος μηνύματος συμβόλων από ένα αλφάβητο

N : τα σύμβολα

Εφαρμόζουμε τον τύπο, αρχικά για τον υπολογισμό της ποσότητας πληροφορίας σε decit

$$I = k \log_{10} N = 2 \cdot \log_{10} 32 = 2 \cdot 1,505 = 3,01 \text{ decit}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον τύπο για τον υπολογισμό της ποσότητας πληροφορίας σε bit

$$I = k \log_2 N = 2 \log_2 32 = 2 \cdot \frac{\ln 32}{\ln 2} = 10 \text{ bit}$$

2.3 Η μονάδα ποσότητας πληροφορίας: το bit

Το Bit είναι η συντομογραφία των λέξεων binary digit και είναι η μικρότερη μονάδα αποθήκευσης πληροφορίας στα υπολογιστικά συστήματα. Ένα bit είναι ένα και μόνο ψηφίο σε έναν δυαδικό αριθμό και είναι είτε 1 είτε 0, αποκαλούμενο συχνά και ως "on" ή "off". Η αντιστοιχία μεταξύ των μονάδων, αναφορικά με το ευρύτατα διαδεδομένο σύστημα μέτρησης που χρησιμοποιείται και που θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ, είναι το bit, εκτός και αν αναφερθούμε κάπου πιο ειδικευμένα σε κάποια άλλη μονάδα:

$$1 \text{ hartley} = 3.32 \text{ bits} , 1 \text{ nat} = 1.44 \text{ bits}$$

Σε πολλές περιπτώσεις το **byte** λαμβάνεται ως αναφορά, όπου ένα byte ισούται με οκτώ bits.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι πρώτα από όλα μας ενδιαφέρουν οι πληροφορίες που παράγονται από τον άνθρωπο. Αυτές οι πληροφορίες είναι αποθηκευμένες, παραπτοιημένες, μεταφερόμενες και αφομοιωμένες από το ανθρώπινο μυαλό. Η Θεωρία της Πληροφορίας μάς βοηθά να το κάνουμε αυτό αποτελεσματικά.

2.4 Μέση Πληροφορία ή Εντροπία

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε σε τυχαία γεγονότα, για τα οποία ορίσαμε το μέτρο πληροφορίας. Δεδομένου ότι η εμφάνιση ενός συμβόλου της πηγής αποτελεί ένα τυχαίο γεγονός, ορίζουμε την πληροφορία συμβόλου και κατ' επέκταση την πληροφορία λέξεων ή μηνυμάτων.

Θεωρούμε μια πηγή πληροφορίας με αλφάβητο $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$.

Κάθε ένα σύμβολο α_n , όπου $n = 1, 2, \dots, N$, έχει πιθανότητα εμφάνισης p_n . Επομένως από τον ορισμό της πληροφορίας προκύπτει:

$I(\alpha_n) = -\log(p_n)$. Ως γνωστόν από τη θεωρία των πιθανοτήτων ισχύει:

$$p_n \in [0,1] \text{ και } \sum_{n=1}^N p_n = 1 \quad (2.11)$$

Η κατανομή των πιθανοτήτων των συμβόλων του αλφαβήτου A περιγράφεται από το σύνολο $P_A = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$. Έτσι, η πηγή πληροφορίας περιγράφεται και αναπαρίσταται από το ζεύγος (A, P_A) .

Θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε, εκτός από την πληροφορία του κάθε συμβόλου χωριστά, τη μέση πληροφορία ανά σύμβολο που μας παρέχει η έξοδος της πηγής. Με άλλα λόγια, ζητάμε ένα μέγεθος πληροφορίας που να σχετίζεται με την πηγή συνολικά, συνεπώς και με το αλφάβητο της. Για το λόγο αυτό εισάγεται η έννοια της **εντροπίας πηγής**. Η εντροπία είναι θεμελιώδης έννοια για τη θεωρία της πληροφορίας, που προτάθηκε από τον Shannon το 1948.

Ορισμός Εντροπίας ή μέσης πληροφορίας ανά σύμβολο πληροφορίας. Για μια πηγή πληροφορίας με αλφάβητο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, η εντροπία ή μέση πληροφορία του A , όπως αλλιώς ονομάζεται, είναι ο μέσος όρος της αυτοπληροφορίας των συμβόλων στην έξοδο και ορίζεται ως:

$$H(A) = H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = -\sum_{i=1}^n p(\alpha_i) \log p(\alpha_i) \quad (2.12)$$

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την ορολογία των πιθανοτήτων, για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με δειγματοχώρο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(x_n)$, η μέση ποσότητα πληροφορίας (ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο), που κερδίζουμε ανά σύμβολο, ή η συνάρτηση αβεβαιότητας του X ή η εντροπία, όπως αλλιώς ονομάζεται, είναι

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) \quad (2.13) 1$$

Οι μονάδες μέτρησης της εντροπίας εξαρτώνται από τη βάση του λογαρίθμου που χρησιμοποιείται στον ορισμό. Αν η βάση του λογαρίθμου είναι το 2, τότε οι μονάδες λέγονται bits. Αν η βάση του λογαρίθμου είναι το 10, τότε λέγονται digits. Αν η βάση του λογαρίθμου είναι το e, τότε λέγονται nats και συνήθως τις χρησιμοποιούμε για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Συνήθως προτιμάται το 2 για βάση του λογαρίθμου.

Η συνάρτηση που περιγράφει την εντροπία έχει τις παρακάτω βασικές ιδιότητες:

Η εντροπία είναι το μέτρο της μέσης αβεβαιότητας μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ορίζει τον μέσο αριθμό bits που απαιτούνται για να περιγράψουν την τυχαία μεταβλητή.

Η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής εξαρτάται μόνο από τις πιθανότητες που χαρακτηρίζουν την τυχαία μεταβλητή και όχι από τις πιθανές τιμές της τυχαίας μεταβλητής.

Θεωρούμε ότι $0 \log(0) = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) \rightarrow 0$. Επομένως, δεν αλλάζουν την εντροπία οι όροι με μηδενική πιθανότητα.

Η εντροπία σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής. Αυτή η διαπίστωση μας οδηγεί σε έναν δεύτερο ορισμό της εντροπίας, ο οποίος είναι ο παρακάτω:

Ο ορισμός της αναμενόμενης τιμής της συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής

1 . Μια πρόχειρη απόδειξη της σχέσης (2.13) είναι η ακόλουθη: Σε ένα μεγάλο κείμενο με N γράμματα, αναμένεται ότι το σύμβολο a_1 θα εμφανιστεί $N \cdot P(a_1)$, το σύμβολο a_2 , $N \cdot P(a_2)$ φορές κοκ. Προσθέτοντας την πληροφορία που προσφέρουν τα a_1 με εκείνη των a_2 κ.τ.λ. και διαιρώντας με όλο το πλήθος N, βρίσκουμε τη μέση ποσότητα πληροφορίας:

$$\begin{aligned} H &= - \frac{1}{N} [N P(a_1) \log P(a_1) + N P(a_2) \log P(a_2) + \dots] \\ &= -P(a_1) \log P(a_1) - P(a_2) \log P(a_2) - \dots = - \sum_N P_i \log P_i \end{aligned}$$

$F(x) = \log \frac{1}{p(x)}$ είναι $E[F(x)] = \sum_i F(a_i) p(x = a_i)$. Επομένως ο δεύτερος

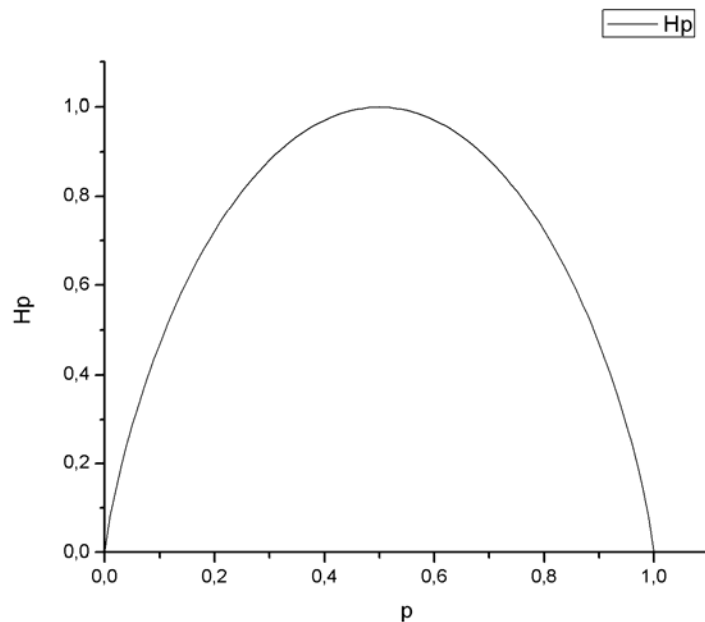
ορισμός της εντροπίας που προκύπτει δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$H(x) = E\left\{\log \frac{1}{p(x)}\right\}$$

Συχνά, στη θεωρία της πληροφορίας εμφανίζεται η εντροπία δυαδικής πηγής. Η δυαδική πηγή πληροφορίας έχει αλφάβητο που αποτελείται από δύο μόνο σύμβολα π.χ. το 0 και το 1. Προφανώς, αν p είναι η πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου 0, τότε η πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου 1 θα είναι ίση με $(1 - p)$. Συνεπώς η εντροπία της δυαδικής πηγής, η οποία συμβολίζεται με $H_b(p)$, θα είναι ίση με:

$$H_b(p) = -p \log(p) - (1 - p) \log(1 - p) \quad (2.14)$$

Η **εντροπία δυαδικής πηγής** $H_b(p)$ είναι συνάρτηση μόνο της πιθανότητας p του ενός συμβόλου και λέγεται **συνάρτηση Shannon**. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα (Εικόνα 4), η συνάρτηση Shannon είναι συμμετρική και παίρνει τη μέγιστη τιμή της (1 bit/symbol), όταν τα δύο σύμβολα είναι ισοπίθανα ($p = 0.5$).



Εικόνα 4. Γραφική παράσταση της συνάρτησης Shannon

Από την παραπάνω σχέση και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης παρατηρούμε τα εξής:

Πρόκειται για μια κοίλη συνάρτηση της πιθανότητας.

Όταν $p = 0$, είναι $H(X) = 0$. Αυτό προκύπτει από τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x = 0$$

Για την τιμή αυτή της πιθανότητας, η μεταβλητή παύει να είναι τυχαία και η αβεβαιότητα μηδενίζεται.

Όταν $p = 1$, είναι $H(X) = 0$.

Για την τιμή αυτή της πιθανότητας, η μεταβλητή παύει να είναι τυχαία και η αβεβαιότητα μηδενίζεται.

Η εντροπία $H(X)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $H_{\max} = 1 \text{ bit}$, όταν

$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, δηλαδή όταν τα σύμβολα 1 και 0 είναι ισοπίθανα.

Υπάρχει συμμετρία γύρω από το $p = 0.5$.

Παράδειγμα 2.5

Έστω μία πηγή X με τέσσερα σύμβολα $X = \{ A, B, \Gamma, \Delta \}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P(X) = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \}$. Να βρεθεί η μέση πληροφορία ή εντροπία της πηγής αυτής.

Λύση:

Η εντροπία της πηγής δίνεται από τον τύπο

$$H(x) = - \sum_{n=1}^N p(x_n) \log p(x_n)$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο η εντροπία της πηγής ισούται με

$$H(X) = - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} = \frac{7}{4} \text{ bits} \quad \bullet$$

2.4.1 Ιδιότητες της μέσης ποσότητας πληροφορίας ή εντροπίας

Οι ιδιότητες της μέσης πληροφορίας ή εντροπίας, οι οποίες αποτελούν και απαιτήσεις για την εύρεση της κατάλληλης συνάρτησης κατά τον

ορισμό της, είναι οι παρακάτω:

1. Η μέση πληροφορία $H(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση των πιθανοτήτων $p(x_n)$, όπου $n = 1, 2, \dots, N$, όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση της προηγούμενης ενότητας (Εικόνα 4).

2. Η μέση πληροφορία $H(x)$ είναι συμμετρική συνάρτηση των πιθανοτήτων $p(x_n)$, όπου $n = 1, 2, \dots$. Έτσι, διαφορετικές τυχαίες μεταβλητές, με κατανομές πιθανοτήτων που προέρχονται από μεταθέσεις της ίδιας κατανομής πιθανοτήτων, έχουν ίση εντροπία. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμα και διαφορετικές κατανομές πιθανοτήτων οδηγούν στην ίδια μέση ποσότητα πληροφορίας.

3. Η εντροπία $H(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή, η οποία είναι $H(x) = \log n$, όταν όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, δηλαδή όταν

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_N) = \frac{1}{N}.$$

Τότε η αβεβαιότητα είναι η μέγιστη δυνατή και, κατά συνέπεια, η επιλογή ενός μηνύματος προσφέρει τη μέγιστη δυνατή μέση πληροφορία.

4. Αν θεωρήσουμε ότι b και a είναι δύο διαφορετικές βάσεις στο λογάριθμο του ορισμού της εντροπίας, τότε θα ισχύει $H_b(x) = (\log_b a)H_a(x)$. Δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας με τον κατάλληλο παράγοντα, μπορεί να αλλάξει η βάση της εντροπίας. Αυτό ισχύει λόγω της ιδιότητας των λογαρίθμων, σύμφωνα με την οποία $\log_b p = \log_b a \log_a p$.

5. Η εντροπία $H(x)$ είναι μια μη αρνητική ποσότητα, δηλαδή $H(x) \geq 0$. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε αν λάβουμε υπόψη ότι η πιθανότητα $p(x_n)$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$. Επομένως, δεν μπορεί να είναι αρνητική. Επίσης, ο λογάριθμος της είναι μικρότερος ή ίσος του μηδενός. Άρα, το γινόμενο $p(x_n)\log_e p(x_n)$ είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός. Επομένως η εντροπία είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

6. Για μια τυχαία μεταβλητή x , ισχύει $H(x) \leq \log N$. Η ισότητα ισχύει, όπως είδαμε στην ιδιότητα 3, αν και μόνο αν $p(x_i) = \frac{1}{N}$ για όλα τα $i \neq 1$. Ας αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα.

Απόδειξη: Για κάθε θετικό αριθμό γνωρίζουμε ότι ισχύει $\ln x \leq x-1$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα, μπορούμε να έχουμε τη σχέση:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 2} \leq (x-1) \frac{\ln e}{\ln 2} = (x-1) \log e$$

Όσον αφορά στη μέση ποσότητα πληροφορίας, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} H(X) - \log n &= -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i - \log n = -\sum_{i=1}^n p_i (\log p_i + \log n) \\ &= -\sum_{i=1}^n p_i \log(np_i) = \sum_{i=1}^n p_i \log\left(\frac{1}{np_i}\right) \end{aligned}$$

Βάσει της ανωτέρω ανισότητας μπορούμε να γράψουμε

$$H(X) - \log n \leq \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{1}{np_i} - 1\right) \log e = \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{np_i} - \sum_{i=1}^n p_i\right) \log e = \left(n \frac{1}{n} - 1\right) \log e = 0$$

οπότε και ισχύει η ζητούμενη σχέση $H(x) \leq \log N$

Η ισότητα ισχύει για $\frac{1}{np_i} = 1 \Rightarrow p_i = \frac{1}{n}$, αφού $\ln x = x-1$, αν $x=1$ ■

7. Ισχύει η αρχή της προσθετικότητας

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (2.15)$$

Με τον όρο προσθετικότητα εννοούμε ότι αν έχουμε δύο ανεξάρτητα γεγονότα, που το πρώτο συμβαίνει με πιθανότητα p_x και το δεύτερο με πιθανότητα p_y , τότε η συνολική πληροφορία που μας δίνουν τα δύο γεγονότα είναι το άθροισμα των επιμέρους πληροφοριών.

Η σχέση $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ αποδεικνύεται παρακάτω με τη βοήθεια του ορισμού της μέσης πληροφορίας.

2.5 Από Κοινού Εντροπία, Υπό Συνθήκη Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία

Η εντροπία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον ορισμό άλλων

μετρήσεων πληροφορίας, οι οποίες αναδεικνύουν τις σχέσεις μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y . Έχουμε λοιπόν:

- Την από κοινού ή συνδυασμένη ή συνδετική εντροπία (joint entropy), η οποία μετράει τη συνολική πληροφορία των X και Y .
- Την υπό συνθήκη εντροπία (conditional entropy), η οποία μετράει την πληροφορία του X , όταν η Y είναι γνωστή και αντίστροφα.
- Την αμοιβαία εντροπία (mutual entropy), η οποία μετράει τη σχέση των X και Y , υπό την έννοια ότι μας δείχνει πόσο μειώνεται η πληροφορία του X όταν μαθαίνουμε το Y και αντιστρόφως.

2.5.1 Από Κοινού Εντροπία

Θεωρούμε δύο πηγές πληροφορίας, την (X, P_x) με αλφάβητο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P_x = \{p_{x1}, p_{x2}, \dots, p_{xN}\}$ και την (Y, P_y) με αλφάβητο $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P_y = \{p_{y1}, p_{y2}, \dots, p_{yM}\}$, αντίστοιχα. Οι δύο πηγές συνθέτουν μια σύνθετη πηγή (XY, P_{XY}) , της οποίας το αλφάβητο προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο $XY = X \times Y = \{(x_i, y_j) : x_i \in X, y_j \in Y\}$. Επομένως, η **συνδετική ή συνδυασμένη εντροπία ή η από κοινού εντροπία** των δύο πηγών είναι η εντροπία της σύνθετης πηγής (XY, P_{XY}) . Έτσι, η από κοινού εντροπία της σύνθετης πηγής (XY, P_{XY}) δίνεται από τη σχέση:

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log(p(x_i, y_j)) \quad (2.16)$$

η οποία μπορεί επίσης να εκφραστεί με τη βοήθεια της αναμενόμενης τιμής ως $H(X, Y) = -E \log p(X, Y)$.

Η σχέση (2.16) επεξηγείται ως εξής: η αβεβαιότητα που έχουμε για την τιμή των μεταβλητών x και y είναι ίση με το άθροισμα της αβεβαιότητας για το x συν την αβεβαιότητα για το y , αν και μόνο αν οι μεταβλητές x και y είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Αν οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες τότε από τη συνδυασμένη πιθανότητα έχουμε $p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.12), έχουμε

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) \\
&= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i) p(y_j) [\log p(x_i) + \log p(y_j)] \\
&= -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) \sum_{j=1}^M p(y_j) - \sum_{j=1}^M p(y_j) \log p(y_j) \sum_{i=1}^N p(x_i) \\
&= H(X) + H(Y)
\end{aligned}$$

Μια βασική ιδιότητα της συνδυετικής εντροπίας δύο πηγών είναι ότι δεν μπορεί να υπερβεί το άθροισμα των εντροπιών των δύο επιμέρους πηγών. Επομένως, η μέση πληροφορία της σύνθετης πηγής είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το άθροισμα των μέσων πληροφοριών των απλών πηγών πληροφορίας, δηλαδή :

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (2.17)$$

Οι έννοιες της σύνθετης πηγής και συνδυετικής εντροπίας μπορούν να επεκταθούν και για περισσότερες από δύο πηγές. Έτσι, αν έχουμε K απλές πηγές πληροφορίας $(X_1, P_{X_1}), (X_2, P_{X_2}), \dots, (X_K, P_{X_K})$, τότε η συνδυετική εντροπία δίνεται από τη σχέση:

$$H(X_1 X_2 \dots X_K) = -\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=2}^{N_2} \dots \sum_{i_K=1}^{N_K} p(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_K}) \log(p(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_K})) \quad (2.18)$$

Στην παραπάνω σχέση (2.18) με N_k ($k=1, 2, \dots, K$) δηλώνεται το πλήθος των συμβόλων του αλφάβητου X_k .

Καθώς ισχύει

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p(x_i) p(y_j) [\log p(x_i) + \log p(y_j)]$$

η σχέση (2.17) μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση K απλών πηγών, δηλαδή:

$$H(X_1 X_2 \dots X_K) < H(X_1) + H(X_2) + \dots + H(X_K) \quad (2.19)$$

Λόγου χάριν, για μια σύνθετη πηγή τριών τυχαίων μεταβλητών (X, Y, Z) με συνδυασμένες πιθανότητες $p(x_i, y_j, z_k)$, η συνδυασμένη πιθανότητα πληροφορίας δίνεται από τη σχέση

$$H(X, Y, Z) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l p(x_i, y_j, z_k) \log p(x_i, y_j, z_k)$$

Κατ'ανάλογο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε πως όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των τριών τυχαίων μεταβλητών αποτελούν τα ενδεχόμενα v του τρισδιάστατου πειράματος και συνεπώς το πλήθος αυτών είναι ίσο με lmn . Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι $p(v_1), p(v_2), \dots, p(v_{lmn})$ και η από κοινού πληροφορία δίνεται από τη σχέση

$$H(X, Y, Z) = -\sum_{i=1}^{lmn} p(v_i) \log p(v_i)$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με το άθροισμα που προκύπτει από τον προηγούμενο τύπο, καθώς κάθε $p(v_h)$ ισούται με κάποια $p(x_i, y_j, z_k)$.

Παράδειγμα 2.6

Ένα τυχαίο πείραμα τεσσάρων διαστάσεων συνίσταται στη ρίψη, ταυτόχρονα, τεσσάρων κερμάτων. Πώς υπολογίζεται η συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας της ταυτόχρονης ρίψης των τεσσάρων κερμάτων;

Λύση:

Τα δυνατά αποτελέσματα της ρίψης κάθε κέρματος είναι δύο, κεφαλή ή γράμμα, οπότε οι δυνατοί συνδυασμοί είναι δεκάξι. Με δεδομένο ότι κατά τη ρίψη ενός κέρματος το κάθε αποτέλεσμα έχει ίση πιθανότητα να λάβει χώρα, η πιθανότητα για κάθε συνδυασμό είναι $1/16$ και η από κοινού ποσότητα πληροφορίας υπολογίζεται ως

$$H(X, Y, Z, W) = -\sum_{i=1}^{16} p(v_i) \log p(v_i) = -\sum_{i=1}^{16} \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} = 4 \text{ bits} \quad \square$$

2.5.2 Υπό Συνθήκη Εντροπία

Θεωρούμε δύο πηγές πληροφορίας, την (X, P_x) με αλφάβητο

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P_X = \{p_{x_1}, p_{x_2}, \dots, p_{x_n}\}$ και την (Y, P_Y) με αλφάβητο $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ και κατανομή πιθανοτήτων $P_Y = \{p_{y_1}, p_{y_2}, \dots, p_{y_m}\}$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων πως η πηγή (Y, P_Y) παράγει το σύμβολο y_j . Με αυτή την προϋπόθεση η πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου x_i στην έξοδο της πηγής (X, P_X) δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \quad (2.20)$$

Η $p(x_i / y_j)$ εκφράζει την πιθανότητα εμφάνισης του ζεύγους (x_i, y_j) στην έξοδο της σύνθετης πηγής (XY, P_{XY}) δεδομένου ότι η απλή πηγή (Y, P_Y) παράγει το σύμβολο y_j .

Η μέση τιμή της υπό συνθήκη ποσότητας πληροφορίας της τυχαίας μεταβλητής X , δεδομένου του αποτελέσματος y_j , δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(X | y_j) = -\sum_{i=1}^n p(x_i / y_j) \log(p(x_i / y_j)) \quad (2.21)$$

Η μέση τιμή της υπό συνθήκη ποσότητας πληροφορίας της X , λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δυνατά αποτελέσματα της Y , λέγεται υπό συνθήκη εντροπία της σύνθετης πηγής (XY, P_{XY}) , όταν είναι γνωστή η έξοδος της απλής πηγής (Y, P_Y) , και υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} H(X | Y) &= -\sum_{j=1}^m p(y_j) H(X | y_j) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i / y_j) \log(p(x_i / y_j)) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(y_j) p(x_i / y_j) \log p(x_i / y_j) \end{aligned}$$

η οποία, βάσει της (2.20), γράφεται ως ακολούθως

$$H(X | Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i / y_j)$$

και αποτελεί τον ορισμό της **υπό συνθήκη ποσότητας πληροφορίας (ή υπό συνθήκη πληροφορία)** του πειράματος X , δεδομένου του αποτελέσματος του πειράματος Y .

Η υπό συνθήκη εντροπία της σύνθετης πηγής, όταν είναι γνωστή η έξοδος της απλής πηγής (X, P_x) , δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^n H(Y|x_i)p(x_i) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log(p(y_j|x_i)) \quad (2.23)$$

Η συνδυασμένη και η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας είναι μη αρνητική. Επίσης, η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας είναι μικρότερη ή ίση της εντροπίας του X , δηλαδή $H(X/Y) \leq H(X)$. Η ισότητα ισχύει αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Παρακάτω θα δούμε ότι η από κοινού και η υπό συνθήκη εντροπία συνδέονται μεταξύ τους. Το θεώρημα που μας δίνει αυτή τη σύνδεση λέγεται **κανόνας της αλυσίδας** και δίνεται από τη σχέση:

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (2.24)$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό της $H(X, Y)$, ισχύει:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log(p(x_i, y_j)) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(y_j) p(x_i/y_j) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(y_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) \\ &= -\sum_{j=1}^m p(y_j) \log p(y_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) \\ &= H(Y) + H(X/Y) \Rightarrow \quad (2.24) \end{aligned}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η σχέση

$$H(Y/X) = H(X, Y) - H(X) \quad (2.25) \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 2.7

Θεωρούμε δύο δυαδικές πηγές πληροφορίας $X = \{A, B\}$ και $y = \{\Gamma, \Delta\}$ αντίστοιχα. Δίνονται οι τιμές των πιθανοτήτων $p(A) = 0.2$,

$p(A, \Delta) = 0.15$ και $p(\Gamma) = 0.3$. Να βρεθούν οι τιμές:

α) της εντροπίας της κάθε πηγής χωριστά.

β) της εντροπίας της σύνθετης πηγής XY .

γ) των υπό συνθήκη εντροπιών $H(X/Y)$ και $H(Y/X)$.

Λύση:

Αρχικά, υπολογίζουμε τις τιμές όλων των περιθωριακών πιθανοτήτων των συμβόλων των δύο πηγών. Αυτές προκύπτουν βάσει της ιδιότητας ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των συμβόλων μιας πηγής είναι ίσο με τη μονάδα. Έχουμε:

$$p(A) + p(B) = 1 \Rightarrow p(B) = 1 - 0.2 \Rightarrow p(B) = 0.8$$

$$p(\Gamma) + p(\Delta) = 1 \Rightarrow p(\Delta) = 1 - 0.3 \Rightarrow p(\Delta) = 0.7$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις από κοινού πιθανότητες χρησιμοποιώντας περιθωριακές. Έχουμε:

$$p(A, \Delta) + p(A, \Gamma) = p(A) \Rightarrow p(A, \Gamma) = 0.2 - 0.15 \Rightarrow p(A, \Gamma) = 0.05$$

$$p(A, \Gamma) + p(B, \Gamma) = p(\Gamma) \Rightarrow p(B, \Gamma) = 0.3 - 0.05 \Rightarrow p(B, \Gamma) = 0.25$$

$$p(A, \Delta) + p(B, \Delta) = p(\Delta) \Rightarrow p(B, \Delta) = 0.7 - 0.15 \Rightarrow p(B, \Delta) = 0.55$$

Οι παραπάνω τιμές των κοινών πιθανοτήτων συνθέτουν τον πίνακα

$$P_{XY} = \begin{bmatrix} p(A, \Gamma) & p(A, \Delta) \\ p(B, \Gamma) & p(B, \Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 \\ 0.25 & 0.55 \end{bmatrix}$$

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το άθροισμα ανά στήλη ή γραμμή δίνουν τις περιθωριακές πιθανότητες των συμβόλων. Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες βάσει της γνωστής σχέσης $p(a/b) = p(a,b) / p(b)$.

Συνεπώς, οι υπό συνθήκη πιθανότητες είναι:

$$p(A/\Gamma) = p(A, \Gamma) / p(\Gamma) = 0,05 / 0,3 = 0,1667$$

$$p(A/\Delta) = p(A, \Delta) / p(\Delta) = 0,15 / 0,7 = 0,2143$$

$$p(B/\Gamma) = p(B, \Gamma) / p(\Gamma) = 0,25 / 0,3 = 0,8333$$

$$p(B/\Delta) = p(B,\Delta) / p(\Delta) = 0,55 / 0,7 = 0,7857$$

$$p(\Gamma/A) = p(A,\Gamma) / p(A) = 0,05 / 0,2 = 0,25$$

$$p(\Gamma/B) = p(B,\Gamma) / p(B) = 0,25 / 0,8 = 0,3125$$

$$p(\Delta/A) = p(A,\Delta) / p(A) = 0,15 / 0,2 = 0,75$$

$$p(\Delta/B) = p(B,\Delta) / p(B) = 0,55 / 0,8 = 0,6875$$

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες συνθέτουν τους πίνακες:

$$P_{X/Y} = \begin{bmatrix} p(A/\Gamma) & p(B/\Gamma) \\ p(A/\Delta) & p(B/\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.8333 \\ 0.2143 & 0.7857 \end{bmatrix}$$

$$P_{Y/X} = \begin{bmatrix} p(\Gamma/A) & p(\Delta/A) \\ p(\Gamma/B) & p(\Delta/B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.3125 & 0.6875 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι στους δύο παραπάνω πίνακες τα αθροίσματα των στοιχείων τους ανά γραμμή είναι πάντα ίσα με τη μονάδα.

Η εντροπία καθεμιάς απλής πηγής υπολογίζεται, σύμφωνα με τη παρακάτω σχέση, ως εξής:

$$H(X) = - \sum_{x \in \{A,B\}} p(x) \log(p(x)) = -0.2 \log(0.2) - 0.8 \log(0.8) = 0.722 \text{ bits / symbol}$$

$$H(Y) = - \sum_{y \in \{\Gamma,\Delta\}} p(y) \log(p(y)) = -0.3 \log(0.3) - 0.7 \log(0.7) = 0.881 \text{ bits / symbol}$$

Η εντροπία της σύνθετης πηγής XY υπολογίζεται από τη σχέση της συνδυαστικής εντροπίας, δηλαδή:

$$\begin{aligned} H(XY) &= - \sum_{x \in \{A,B\}} \sum_{y \in \{\Gamma,\Delta\}} p(x,y) \log(p(x,y)) = \\ &= p(A,\Gamma) \log p(A,\Gamma) - p(A,\Delta) \log p(A,\Delta) - p(B,\Gamma) \log p(B,\Gamma) - p(B,\Delta) \log p(B,\Delta) \\ &= -0.05 \log(0.05) - 0.15 \log(0.15) - 0.25 \log(0.25) - 0.55 \log(0.55) \\ &= 1.601 \text{ bits / symbol} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι ισχύει η ταυτοανισότητα:

$$H(XY) \leq H(X) + H(Y) \Rightarrow 1.601 \leq 0.722 + 0.881$$

Τέλος, υπολογίζουμε τις υπό συνθήκη εντροπίες:

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= - \sum_{x \in \{A,B\}} \sum_{y \in \{\Gamma,\Delta\}} p(x,y) \log(p(x/y)) = \\ &= -p(A,\Gamma) \log p(A/\Gamma) - p(A,\Delta) \log p(A/\Delta) - p(B,\Gamma) \log p(B/\Gamma) - p(B,\Delta) \log p(B/\Delta) \\ &= -0.05 \log(0.1667) - 0.15 \log(0.2143) - 0.25 \log(0.8333) - \\ &\quad -0.55 \log(0.7857) = 0.720 \text{ bits / symbol} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= - \sum_{x \in \{A,B\}} \sum_{y \in \{\Gamma,\Delta\}} p(x,y) \log(p(y/x)) = \\ &= -p(A,\Gamma) \log p(\Gamma/A) - p(A,\Delta) \log p(\Delta/A) - p(B,\Gamma) \log p(\Gamma/B) - p(B,\Delta) \log p(\Delta/B) \\ &= -0.05 \log(0.25) - 0.15 \log(0.75) - 0.25 \log(0.3125) - \\ &\quad -0.55 \log(0.6875) = 0.879 \text{ bits / symbol} \end{aligned}$$

Φυσικά θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα συντομότερα, χωρίς να απαιτηθεί ο υπολογισμός των υπό συνθήκη πιθανοτήτων, αν χρησιμοποιούσαμε απευθείας τις σχέσεις. •

2.5.3 Αμοιβαία πληροφορία

Ένα σημαντικό μέγεθος, που ορίζεται στα πλαίσια της θεωρίας της πληροφορίας, είναι η **αμοιβαία πληροφορία** δύο τυχαίων μεταβλητών X , Y . Αποτελεί ένα μέτρο της ποσότητας πληροφορίας που μια τυχαία μεταβλητή περιέχει για μια άλλη τυχαία μεταβλητή ή ένα μέτρο της εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών. Αν $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ και $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ είναι δύο πηγές, με κατανομές πιθανοτήτων P_X και P_Y αντίστοιχα, τότε η αμοιβαία πληροφορία των δύο πηγών δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad (2.26)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της $I(X; Y)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i / y_j)}{p(x_i)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log(p(x_i / y_j)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log(p(x_i)) \\
 &= -\sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \log(p(x_i)) - (-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log(p(x_i / y_j))) \\
 &= H(X) - H(X | Y)
 \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η αμοιβαία πληροφορία $I(X; Y)$ δίνει τη μείωση της αβεβαιότητας του X εξαιτίας της γνώσης για το Y .

Λόγω συμμετρίας ισχύει και $I(Y; X) = H(Y) - H(Y | X)$.

Η συνάρτηση της αμοιβαίας πληροφορίας έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι συμμετρική ως προς X και Y , δηλαδή:

$$I(X; Y) = I(Y; X) \quad (2.27)$$

Για να αποδείξουμε την παραπάνω ιδιότητα αρκεί να αντικαταστήσουμε στον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας την υπό συνθήκη εντροπία.

Απόδειξη: $I(X; Y) = H(X) - H(X | Y) = H(X) - (H(XY) - H(Y))$

$$= H(X) + H(Y) - H(XY) \quad (2.28)$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι η αμοιβαία πληροφορία είναι συμμετρική $I(X; Y) = I(Y; X)$.

- Είναι μη αρνητική, δηλαδή: $I(X; Y) \geq 0$ (2.29)

- Η αμοιβαία πληροφορία μιας τυχαίας μεταβλητής με τον εαυτό της είναι η εντροπία της τυχαίας μεταβλητής. Γι' αυτό το λόγο, η εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής συχνά λέγεται και **αυτοπληροφορία**.

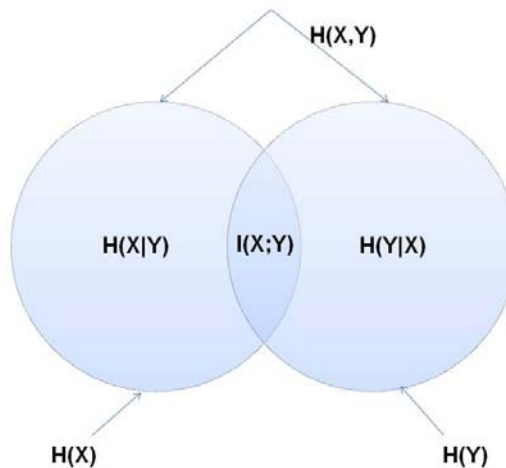
$$I(X; X) = H(X) - H(X | X) = H(X) \quad (2.30)$$

- Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας δύο ανεξάρτητων τυχαίων

μεταβλητών είναι $I(X;Y) = 0$

- Αν η X είναι πλήρως εξαρτημένη από την Y , δηλαδή $H(X|Y) = 0$, τότε $I(X;Y) = H(X) = H(Y)$

Εναλλακτικά, η σχέση της αμοιβαίας πληροφορίας με τις από κοινού και υπό συνθήκη εντροπίες θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με το διάγραμμα Venn του σχήματος (Εικόνα 5):



Εικόνα 5. Διάγραμμα Venn για τη σχέση μεταξύ εντροπίας και αμοιβαίας πληροφορίας.

Παράδειγμα 2.8

Να υπολογιστεί η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ των πηγών X και Y του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση:

Από τον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας γνωρίζουμε ότι:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.722 - 0.720 = 0.002 \text{ bits/symbol}$$

ή ισοδύναμα:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0.881 - 0.879 = 0.002 \text{ bits/symbol} \quad \bullet$$

Ασκήσεις

1. Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο $S = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$. Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι $1/32, 1/16, 1/8, 1/8, 1/8, 1/2$ και $1/32$ αντίστοιχα.

1. Να προσδιορίσετε το σύμβολο της πηγής με το πιο χαμηλό πληροφοριακό περιεχόμενο.

2. Τα σύμβολα της πηγής με το πιο υψηλό πληροφοριακό περιεχόμενο.

2. Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο $S = \{\tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \omega\}$. Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι $1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/8$ και $1/8$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε το πληροφορικό περιεχόμενο του συμβόλου 'τ' και το πληροφορικό περιεχόμενο του συμβόλου 'ω'.

3. Θεωρούμε μια δυαδική πηγή με δύο σύμβολα το 0 και το 1. Η πιθανότητα εκπομπής του 0 είναι ίση με 0.7. Να βρεθεί η πληροφορία του κάθε συμβόλου εκπομπής καθώς και η εντροπία της πηγής.

4. Πόση πληροφορία περιέχεται στον αριθμό κυκλοφορίας αυτοκινήτου της μορφής ΓΓΓαααα, όπου Γ είναι κεφαλαίο γράμμα και α ο αριθμός; (Θεωρούμε ελληνικές πινακίδες κυκλοφορίας)

5. Σ' ένα κανάλι στέλνουμε σήματα 0 ή 1 με ίσες πιθανότητες αποστολής του 0 ή 1. Ποια είναι η μέση πληροφορία ή εντροπία του ενός των ψηφίων λ.χ. του 1.

6. Έστω ότι έχουμε το αλφάβητο με τις αντίστοιχες πιθανότητες $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(\Gamma) = 0.1$

Ποια είναι η μέτρηση της πληροφορίας στο δέκτη όταν παίρνουμε την πληροφορία (AAB). Ποια είναι η μέση πληροφορία της πηγής;

Δίνεται η πληροφορία υπάρξεως αυτής της πληροφορίας είναι $P(AAB) = P(A) P(A) P(\Gamma) = 0.1$

7. Θεωρούμε πηγή που εκπέμπει έξι σύμβολα με τις παρακάτω πιθανότητες

$P(A) = 1/2, P(B) = 1/4, P(\Gamma) = 1/8, P(\Delta) = 1/16, P(E) = 1/32, P(\Xi) = 1/32$

Να βρεθεί η μέση πληροφορία ή εντροπία της πηγής

8. Έστω ένα σήμα με δυαδικά ψηφία "0" και "1", με πιθανότητες $p(0) = 1/8$ και $p(1) = 7/8$. Να βρεθεί η ποσότητα πληροφορίας του κάθε ψηφίου.

9. Έστω ότι υπάρχουν M ισοπίθανα και ανεξάρτητα μηνύματα και N είναι ακέραιος τέτοιος ώστε $M = 2^N$. Να βρεθεί η πληροφορία κάθε μηνύματος

10. Έστω τα μηνύματα A, B, Γ, Δ με αντίστοιχες πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/8, 1/8$. Να βρεθεί η πληροφορία του μηνύματος $X = B\Delta A$, θεωρώντας ότι τα μηνύματα είναι ανεξάρτητα.

11. Έστω τα μηνύματα A, B, Γ, Δ με αντίστοιχες πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/8, 1/8$. Να υπολογιστεί η εντροπία H για τον τετραδικό κώδικα καθώς και η εντροπία στην περίπτωση, που τα τέσσερα μηνύματα είναι ισοπίθανα.

12. Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ με πιθανότητες $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα:

Ποιο γράμμα (σύμβολο) μεταφέρει τη μεγαλύτερη ποσότητα πληροφορίας και ποια τη μικρότερη;

Αν σκεφτώ μια λέξη που πρέπει να μαντέψετε και σας πω το πρώτο γράμμα της, ποιο θα είναι μεγαλύτερης χρησιμότητας το B ή το Z;

13. Έστω δύο δυαδικές πηγές A και B . Υποθέτουμε ότι $0 < p_A(0) < p_B(0) < 0.5$. Ποια δυαδική πηγή έχει τη μεγαλύτερη εντροπία;

(η άσκηση μπορεί να λυθεί είτε υπολογιστικά είτε απλούστερα μέσω γραφικής παράστασης γνωστής συνάρτησης)

14. 1) Έστω μια τριαδική πηγή $A = \{0, 1, 2\}$. Υπολογίστε τις πιθανότητες $p(0)$, $p(1)$ και $p(2)$, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η εντροπία της πηγής A .

2) Έστω μια πηγή X με εντροπία $H(X) = 1.52$. Υπολογίστε την εντροπία της τρίτης επέκτασης της.

15. Ένα ισοπίθανο κέρμα ρίπτεται μέχρι το πρώτο "κεφάλι" εμφανιστεί. Έστω X συμβολίζει τον αριθμό των ρίψεων που χρειάστηκαν. Οι ακόλουθες εκφράσεις ίσως να φανούν χρήσιμες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

α) Βρείτε την εντροπία του $H(X)$ σε bits

β) Η τυχαία μεταβλητή X έστω ότι ακολουθεί την προηγούμενη κατανομή. Βρείτε μια σειρά από ερωτήσεις με **ναι** και **όχι** της μορφής : ' Το X ανήκει στο σύμβολο S ; '. Να συγκριθεί η εντροπία $H(X)$ με τον αριθμό των ερωτήσεων που απαιτούνται προκειμένου να οριστεί το X .

16. Έστω ένα παιχνίδι που μεταξύ δύο ομάδων νικήτρια είναι εκείνη η ομάδα που συμπληρώνει 4 νίκες. Άρα μπορεί να γίνουν το πολύ 7 παιχνίδια μέχρι να βγει νικητής. Έστω X είναι η μεταβλητή που αναπαριστά τη πιθανή διαδοχή των παιχνιδιών. Δηλ. Αν A και B είναι οι ομάδες τότε πιθανές τιμές των ομάδων είναι **AAAABABABAB** κοκ. Επίσης έστω Y ο αριθμός των παιχνιδιών με εύρος παιχνιδιών 4 και 7. Αν οι ομάδες A και B έχουν την ίδια πιθανότητα νίκης και τα παιχνίδια είναι ανεξάρτητα βρείτε:

α) $H(X)$, $H(Y)$

β) $H(X,Y)$, $H(Y,X)$

Κεφάλαιο 3.

Πηγές Πληροφορίας

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να περιγραφούν οι διακριτές πηγές πληροφορίας με και χωρίς μνήμη, καθώς επίσης και οι τεχνικές κωδικοποίησης των πηγών αυτών για την όσο το δυνατόν πιο συμπυκνωμένη αναπαράσταση της πληροφορίας.

3.1 Διακριτές πηγές πληροφορίας χωρίς μνήμη

Με τον όρο **διακριτή πηγή πληροφορίας** εννοούμε το τμήμα του συστήματος επικοινωνίας που παράγει πληροφορία με τη μορφή συμβόλων ή γραμμάτων. Το σύνολο των συμβόλων που χρησιμοποιεί η πηγή (π.χ. γράμματα, αριθμοί, διαγράμματα, χάρτες) ονομάζεται **αλφάβητο πηγής**. Τα σύμβολα δημιουργούνται από την πηγή σε διακριτές χρονικές στιγμές. Για τον παραπάνω λόγο και λόγω του πεπερασμένου πλήθους των συμβόλων η πηγή ονομάζεται διακριτή. Μια διατεταγμένη ακολουθία συμβόλων ονομάζεται **λέξη**, ενώ μια διατεταγμένη ακολουθία λέξεων ονομάζεται **μήνυμα**.

Κατά τη δημιουργία μηνυμάτων από τη πηγή επιλέγονται σύμβολα με κάποια πιθανότητα. Αυτές οι πιθανότητες επιλογής των συμβόλων θεωρούμε πως παραμένουν αμετάβλητες με το πέρασμα του χρόνου, καθώς επίσης και πως η επιλογή ενός συμβόλου δεν εξαρτάται από τα

σύμβολα του μηνύματος που επιλέγησαν πριν από αυτό. Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα λέμε πως μία **διακριτή πηγή πληροφορίας δεν έχει μνήμη**, όταν τα σύμβολα που εκπέμπει είναι ανεξάρτητα, δηλαδή όταν η πιθανότητα εκπομπής ενός συμβόλου δεν εξαρτάται από ποιά σύμβολα εξέπεμψε προηγουμένως.

Μια τέτοια πηγή περιγράφεται τέλεια από το πλήθος n των διακριτών συμβόλων που μπορεί να εκπέμψει (αλφάβητο), από την πιθανότητα p_i που έχει το καθένα από τα σύμβολα αυτά να εκπεμφθεί και από τη διάρκεια t_i του καθενός (αφού δεν είναι απαραίτητο ούτε να είναι ισοπίθανα ούτε να έχουν την ίδια διάρκεια).

3.1.1 Εντροπία διακριτής πηγής χωρίς μνήμη

Τα μηνύματα που παράγονται από τις πηγές πληροφορίας αποτελούνται από ακολουθίες συμβόλων. Αν και τα μηνύματα είναι αυτά που ενδιαφέρουν τόσο τους αποστολείς όσο και τους τελικούς παραλήπτες, τα επικοινωνιακά συστήματα ασχολούνται με το καθένα από τα σύμβολα που απαρτίζουν τα μηνύματα. Για παράδειγμα, αν στέλνουμε ένα μήνυμα με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο, ο παραλήπτης ενδιαφέρεται κυρίως για τις λέξεις και τις προτάσεις, ενώ το σύστημα επικοινωνίας έχει να κάνει με το καθένα από τα σύμβολα (γράμματα) που το αποτελούν. Επομένως, από τη σκοπιά των επικοινωνιακών συστημάτων υπάρχει ενδιαφέρον για την ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων που παράγει η πηγή.

Ορισμός εντροπίας ή μέσης ποσότητας πληροφορίας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη. Η μέση ποσότητα πληροφορίας, η οποία παράγεται από μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, όπου n το πλήθος των συμβόλων του αλφαβήτου και p_i η πιθανότητα επιλογής του συμβόλου s_i , δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$H(S) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad \text{bits / symbol} \quad (3.1)$$

Από τον ορισμό διαπιστώνουμε ότι η τιμή της εντροπίας εξαρτάται αποκλειστικά από τις πιθανότητες p_i των συμβόλων της πηγής.

Στην περίπτωση που μια διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη είναι δυνατό να έχει όλα τα σύμβολα της ισοπίθανα, τότε η πηγή παρουσιάζει μέγιστη τιμή της εντροπίας $\max H(S)$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\max H(S) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n \quad \text{bits / symbol} \quad (3.2)$$

Ο πλεονασμός μιας πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη εκφράζει το ποσό της «άχρηστης» πληροφορίας που μεταφέρει η έξοδος μιας πηγής και ουσιαστικά μας δίνει τη διαφορά της τρέχουσας κατάστασης από την ιδανική περίπτωση, στην οποία τα σύμβολα της πηγής χρησιμοποιούνται ισοπίθανα (μέγιστη εντροπία). Ο πλεονασμός ορίζεται ως:

$$\text{Πλεονασμός} = \frac{\max H(S) - H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log n} \quad (3.3)$$

και δίνεται συνήθως σε ποσοστό επί τοις εκατό. Ο πλεονασμός της πηγής λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, εφόσον η εντροπία είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης εντροπίας μιας πηγής.

Ο πλεονασμός μιας πηγής πληροφορίας οφείλεται στους παρακάτω λόγους:

- Στο γεγονός ότι τα σύμβολα της πηγής είναι μη ισοπίθανα.
- Στην πιθανότητα να παρουσιάζει μνήμη η πηγή πληροφορίας.

Δηλαδή η ελάττωση της εντροπίας μιας πηγής σε σχέση με τη μέγιστη τιμή οφείλεται στο ότι τα σύμβολά της είναι μη ισοπίθανα και στο ότι κατά την εκπομπή των συμβόλων παρουσιάζεται προτίμηση στην εκπομπή ορισμένων συμβόλων της πηγής.

3.1.2 Ρυθμός παροχής εντροπίας

Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της πηγής είναι ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει πληροφορία η πηγή. Είναι φανερό ότι αν έχουμε δύο πηγές που έχουν την ίδια εντροπία H , αλλά διαφορετικούς ρυθμούς παροχής, η ταχύτερη πηγή θα εκπέμψει περισσότερα σύμβολα μέσα σε δοσμένο χρόνο και άρα περισσότερη πληροφορία. Επομένως, στις επιδόσεις της πηγής, εκτός από την εντροπία, πρέπει να προστεθεί και το μέγεθος R

του ρυθμού παροχής πληροφορίας.

Ορισμός ρυθμού πληροφορίας. Αν μια πηγή πληροφορίας εκπέμπει σύμβολα με ρυθμό παροχής συμβόλων r_s (σε σύμβολα / sec) και η πηγή παρουσιάζει εντροπία H (σε bits / σύμβολο), τότε ο ρυθμός παροχής πληροφορίας από την πηγή R (σε bits / sec) βρίσκεται άμεσα από τη σχέση:

$$R = r_s \cdot H \text{ bits / sec} \quad (3.4)$$

Όσον αφορά στο r_s , αν t_i η διάρκεια του συμβόλου i , τότε η μέση διάρκεια κατά σύμβολο είναι $\bar{t} = \sum_{i=1}^q p_i t_i$ και η μέση ταχύτητα παροχής συμβόλων ορίζεται ως $r = \frac{1}{\bar{t}}$.

Παράδειγμα 3.1

Μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη εκπέμπει ένα από τα πέντε μηνύματα κάθε 1 msec. Αν οι πιθανότητες των μηνυμάτων είναι $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ και $\frac{1}{16}$, βρείτε την εντροπία της πηγής, τη μέγιστη μέση ποσότητα πληροφορίας, το πλεονασμό της πηγής και το μέσο ρυθμό πληροφορίας.

Λύση:

Η εντροπία, για μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη, δίνεται από τον τύπο:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^5 p_i \log p_i = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} = 1,875 \text{ bit / symbol}$$

Η μέγιστη ποσότητα πληροφορίας, δίνεται από τον τύπο:

$$\max H(S) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\max H(S) = \log 5 = 2,321 \text{ bit / symbol}$$

Ο πλεονασμός της πηγής, δίνεται από τον τύπο

$$\text{Πλεονασμός} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log n}$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$\text{Πλεονασμός} = 1 - \frac{1,875}{2,321} = 0,192 \text{ ή } 19,2\%$$

Τέλος, ο μέσος ρυθμός πληροφορίας δίνεται από τον τύπο:

$$R = r_s H$$

Αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο έχουμε:

$$R = 10^{-3} \cdot 1,875 = 1,875 \text{ bits / sec}$$

Σε συνέχεια των ανωτέρω και με ανάλογο τρόπο, μπορεί να οριστεί το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων της πηγής. Θεωρούμε σαν $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ το σύνολο των μηνυμάτων που μπορεί να εκπέμψει η πηγή, q το πλήθος των δυνατών μηνυμάτων της πηγής – όπου $q = n^l$, με n το πλήθος των συμβόλων του αλφαβήτου και l το πλήθος των συμβόλων που αποτελούν το μήνυμα – και $P = \{p(m_1), p(m_2), \dots, p(m_q)\}$ την κατανομή πιθανοτήτων, οπότε ισχύει

$$H(M) = - \sum_{i=1}^q p(m_i) \log p(m_i) \text{ bits/message}$$

Παράδειγμα 3.2

Μια δυαδική πηγή χωρίς μνήμη εκπέμπει τα σύμβολα 0 και 1 σε στατιστικά ανεξάρτητες ακολουθίες μηνυμάτων των δύο συμβόλων με πιθανότητες 0,75 και 0,25, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής.

Λύση: Τα δυνατά μηνύματα που εκπέμπονται είναι τέσσερα, $M = \{(00), (01), (10), (11)\}$. Η πιθανότητα εκπομπής για κάθε ένα από τα μηνύματα είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων των συμβόλων από τα οποία αποτελείται, αφού οι ακολουθίες συμβόλων (μηνύματα) που

παράγει η πηγή είναι στατιστικά ανεξάρτητες (πηγή χωρίς μνήμη). Επομένως, $P = \{(9/16), (3/16), (3/16), (1/16)\}$. Ο υπολογισμός του μέσου πληροφοριακού περιεχομένου μηνυμάτων της πηγής υπολογίζεται βάσει του τύπου

$$H(M) = -\sum_{i=1}^4 p(m_i) \log p(m_i) \\ = -\frac{9}{16} \log \frac{9}{16} - \frac{3}{16} \log \frac{3}{16} - \frac{3}{16} \log \frac{3}{16} - \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} = 1,63 \text{ bits/message}$$

Στην περίπτωση που ίσχυαν όλα τα δεδομένα του παραδείγματος, αλλά η πηγή παράγαγε τα δύο σύμβολα 0 και 1 μεμονωμένα, το αλφάβητό της θα ήταν $S = \{0,1\}$, οι αντίστοιχες πιθανότητες συμβόλων θα παρέμεναν οι ίδιες $3/4$ και $1/4$ και η εντροπία αυτής θα ήταν

$$H(S) = -\sum_{i=1}^2 p_i \log p_i = -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 0,81 \text{ bits/symbol} \quad \bullet$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο της πηγής στην περίπτωση εκπομπής μηνυμάτων είναι διπλάσιο σε σχέση με την παραγωγή συμβόλων, κάτι που είναι αναμενόμενο, μιας και τα μηνύματα αποτελούνται από δύο σύμβολα. Γενικότερα, λοιπόν, για μηνύματα αποτελούμενα από q σύμβολα ισχύει

$$H(M) = qH(S) .$$

3.1.3 Επέκταση διακριτής πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη n τάξης

Στη θεωρία πληροφορίας, βολεύει συχνά να θεωρούμε ομάδες συμβόλων παρά μεμονωμένα σύμβολα. Ως ομάδα συμβόλων θεωρούμε n σύμβολα, τα οποία εκπέμπονται από μια διακριτή πηγή σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Οι ομάδες συμβόλων μπορούμε να θεωρήσουμε πως αποτελούν σύμβολα μιας νέας διακριτής πηγής, η οποία έχει το αλφάβητο S^n που αποτελείται από K^n σύμβολα, όπου K το πλήθος των συμβόλων του αλφαβήτου S της αρχικής πηγής.

Στην περίπτωση που η αρχική πηγή είναι μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη,

τα σύμβολα στην έξοδό της είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητα. Έτσι, η πιθανότητα εμφάνισης ενός συμβόλου από το αλφάβητο S^n είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων των n επιμέρους συμβόλων που το αποτελούν από το αλφάβητο S της αρχικής πηγής. Με βάση την παρατήρηση αυτή, μπορεί να αποδειχθεί πως η εντροπία μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη και η εντροπία της αντίστοιχης n τάξης επέκτασής της σχετίζονται με τον τύπο:

$$H(S^n) = nH(S) \quad (3.5)$$

Παράδειγμα 3.2

Θεωρήστε μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ και πιθανότητες εμφάνισης συμβόλων

$$p(s_1) = p_1 = \frac{1}{4}, \quad p(s_2) = p_2 = \frac{1}{4}, \quad p(s_3) = p_3 = \frac{1}{2}$$

Να υπολογιστεί η εντροπία της πηγής και η εντροπία της δεύτερης τάξης επέκτασής της.

Λύση:

Η εντροπία της αρχικής πηγής είναι:

$$\begin{aligned} H(S) &= -\sum_{i=1}^3 p_i \log p_i \\ &= -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ bits} \end{aligned}$$

Η δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής που εξετάζουμε θα είναι μια νέα διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο

$$\begin{aligned} S^2 &= \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\} \\ &= \{s_1s_1, s_1s_2, s_1s_3, s_2s_1, s_2s_2, s_2s_3, s_3s_1, s_3s_2, s_3s_3\} \end{aligned}$$

θα αποτελείται δηλαδή από $3^2 = 9$ σύμβολα. Θα υπολογίσουμε τώρα τις αντίστοιχες πιθανότητες των συμβόλων $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_8$ ως q_0, q_1, \dots, q_8 . Οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται ως γινόμενα των πιθανοτήτων των επιμέρους συμβόλων του S που αποτελούν τα σύμβολα του S^2

q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

και έτσι η εντροπία της πηγής θα είναι:

$$H(S^2) = -\sum_{i=1}^8 q_i \log q_i = -4 \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - 4 \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 3 \text{bits}$$

Ακόμη ευκολότερα μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας στον τύπο

$$H(S^n) = nH(S) \rightarrow H(S^2) = 2 \frac{3}{2} = 3 \text{bits} \quad \bullet$$

3.1.4 Ιδιότητα ασυμπτωτικής ισοκατανομής

Στη Θεωρία Πληροφορίας, η Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοκατανομής είναι κάτι ανάλογο του νόμου των μεγάλων αριθμών, σύμφωνα με τον οποίο για

ανεξάρτητες ισοκατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, η ποσότητα $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

είναι κοντά στην αναμενόμενη τιμή EX για μεγάλες τιμές του n . Η Ιδιότητα

Ασυμπτωτικής Ισοκατανομής θεωρεί ότι η ποσότητα $\frac{1}{n} \log \frac{1}{p(X_1, X_2, \dots, X_n)}$

πλησιάζει την τιμή της εντροπίας $H(X)$, όπου $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ η πιθανότητα εμφάνισης των ενδεχομένων.

Σε ακολουθίες εξόδων μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη μήκους l , κάθε σύμβολο X_i έχει μεγάλη πιθανότητα να επαναληφθεί (που φθάνει το 1 καθώς $l \rightarrow \infty$) περίπου lp_i φορές. Δηλαδή, ασυμπτωτικά «σχεδόν όλες οι ακολουθίες είναι περίπου ισοπίθανες». Οι ακολουθίες x που έχουν την παραπάνω δομή ονομάζονται τυπικές ακολουθίες. Η πιθανότητα μιας τυπικής ακολουθίας είναι:

$$P(X = x) \approx \prod_{i=1}^n p_i^{lp_i} = \prod_{i=1}^n 2^{lp_i \log p_i} = 2^{l \sum_{i=1}^n p_i \log p_i} = 2^{-lH(X)}$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλο l σχεδόν όλες οι ακολουθίες εξόδου μήκους l της πηγής (τυπικές ακολουθίες) είναι ισοπίθανες με πιθανότητα περίπου $2^{-lH(X)}$. Επίσης, ο συνολικός αριθμός των τυπικών ακολουθιών είναι σχεδόν $2^{lH(X)}$ και η πιθανότητα του συνόλου των μη τυπικών ακολουθιών είναι αμελητέα.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να χωρίσουμε όλες τις ακολουθίες σε δύο σύνολα, το σύνολο των τυπικών ακολουθιών, το οποίο και κυρίως μας αφορά, και των μη-τυπικών ακολουθιών. Όλες οι ιδιότητες, που χαρακτηρίζουν τις τυπικές ακολουθίες, στη συνέχεια θα αληθεύουν με μεγάλη πιθανότητα και για ένα μεγάλο δείγμα των ακολουθιών.

Συνοψίζοντας, το **θεώρημα της ιδιότητας ασυμπτωτικής κατανομής** μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Για ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή X με τιμές X_1, X_2, \dots, X_n , που έχουν ίσες πιθανότητες εμφάνισης $p(x)$, η ποσότητα $-\frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ πλησιάζει την τιμή της εντροπίας $H(X)$.

Απόδειξη: Οι συναρτήσεις ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Οπότε, αφού οι X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, το ίδιο ισχύει και για την $\log p(X_i)$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το νόμο των μεγάλων αριθμών ισχύει

$$-\frac{1}{n} \log p(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p(X_i)$$

$$\rightarrow E \log p(X) = H(X)$$

που αποδεικνύει το θεώρημα. ■

Η ιδιότητα της ασυμπτωτικής ισοκατανομής βρίσκει εφαρμογή στη συμπίεση των δεδομένων. Παρατηρούμε ότι, παρ'όλο που μια πηγή με

μέγεθος αλφαβήτου n μπορεί να παράγει n^l ακολουθίες μήκους l , μπορούμε να λάβουμε υπόψη το σύνολο των τυπικών ακολουθιών και να αμελήσουμε τις άλλες εξόδους και η πιθανότητα να έχουμε χάσει κάτι πλησιάζει στο μηδέν, καθώς το l τείνει στο άπειρο. Αυτή είναι η ουσία της συμπίεσης δεδομένων, δηλαδή η πρακτική της αναπαράστασης της εξόδου της πηγής με έναν αριθμό ακολουθιών μικρότερο από εκείνο που η πηγή παράγει στην πραγματικότητα.

Επειδή ο συνολικός αριθμός των τυπικών ακολουθιών με μήκος l είναι περίπου $2^{lH(X)}$, χρειαζόμαστε $lH(X)$ bits, για να τις αναπαραστήσουμε. Παρατηρούμε ότι κατά μέσο όρο κάθε έξοδος της πηγής απαιτεί $H(X)$ bits για μία ουσιαστικά χωρίς σφάλματα αναπαράσταση. Για μια πηγή, της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας μάζας είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη, έχουμε $H(X) = \log n$. Κι έτσι το πλήθος των τυπικών ακολουθιών είναι $2^{lH(X)} = 2^{l \log n} = n^l$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των τυπικών ακολουθιών της πηγής μήκους l είναι ίσος με το συνολικό αριθμό των εξόδων της πηγής και καμιά συμπίεση δεν είναι δυνατή στην περίπτωση αυτή των ισοπίθανων εξόδων της πηγής.

3.2 Κωδικοποίηση Πηγής

Ένα σημαντικό πρόβλημα, το οποίο συναντάται στις τηλεπικοινωνίες, είναι η αποδοτική αναπαράσταση της πληροφορίας, η οποία παράγεται από μια διακριτή πηγή δεδομένων. Για το λόγο αυτό, επιδιώκεται η όσο το δυνατόν πιο συμπτυκνωμένη αναπαράσταση των μηνυμάτων, η οποία επιτυγχάνεται με την αφαίρεση του πλεονασμού, που εμπεριέχεται σε αυτά.

Η διαδικασία μετατροπής των ακολουθιών συμβόλων, που παράγει η πηγή, σε ακολουθίες συμβόλων κάποιου κώδικα (συνήθως δυαδικές ακολουθίες), έτσι ώστε να αφαιρείται ο πλεονασμός και να προκύπτει συμπιεσμένη αναπαράσταση των μηνυμάτων, ονομάζεται **κωδικοποίηση πηγής**. Ένας άλλος όρος, που χρησιμοποιείται συχνά στη βιβλιογραφία, είναι ο όρος **συμπίεση** αντί του όρου κωδικοποίηση πηγής. Η διάταξη, η οποία επιτελεί την εργασία αυτή, ονομάζεται **κωδικοποιητής πηγής**.

Επειδή εξετάζουμε πηγές χωρίς μνήμη, δηλαδή ανεξάρτητες ακολουθίες συμβόλων, το ενδιαφέρον μας ως προς την κωδικοποίηση μετατοπίζεται από τα μηνύματα στα σύμβολα. Όπως θα πετύχουμε στη συνέχεια τη μετατροπή συμβόλων πηγής σε ακολουθίες κωδικών συμβόλων, θα μπορούσαμε να πετύχουμε και τη μετατροπή μηνυμάτων της πηγής σε ακολουθίες κωδικών συμβόλων. Για να μπορέσει ένας κωδικοποιητής πηγής να αναπαραστήσει αποδοτικά τα δεδομένα μιας διακριτής πηγής είναι απαραίτητο να γνωρίζει ορισμένες στατιστικές ιδιότητες για την πηγή αυτή. Παραδείγματος χάρη, αν ένα σύμβολο της πηγής εμφανίζεται με μεγάλη πιθανότητα, τότε θα επιθυμούσαμε να αναπαραστήσουμε το σύμβολο αυτό με κάποιο απλό και σύντομο τρόπο. Αντίθετα, τα σύμβολα τα οποία εμφανίζονται σπάνια και επομένως έχουν μικρές πιθανότητες δεν μας ενοχλεί ιδιαίτερα να τα κωδικοποιήσουμε με κάποια πιο πολύπλοκη και μακροσκελή αναπαράσταση.

Οι αναπαραστάσεις των συμβόλων που προκύπτουν στην έξοδο ενός κωδικοποιητή πηγής ονομάζονται **κωδικές λέξεις** και το σύνολο των κωδικών λέξεων που χρησιμοποιεί ένας κωδικοποιητής πηγής με σκοπό να αναπαραστήσει όλα τα σύμβολα μιας διακριτής πηγής ονομάζεται **κώδικας πηγής**.

Βασικό χαρακτηριστικό κάθε κώδικα είναι ο αριθμός των bits που χρησιμοποιεί για να παραστήσει το κάθε σύμβολο. Αν ένας κώδικας χρησιμοποιεί μ αριθμό bits, ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών, δηλαδή των συμβόλων που μπορεί να περιγράψει με αυτά, θα είναι ίσος με 2^μ . Αν ένας κώδικας έχει ως στόχο την κωδικοποίηση N διαφορετικών συμβόλων, τότε ο αριθμός μ των bits που θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δίνεται από τη σχέση:

$$2^{\mu-1} \leq N \leq 2^\mu \quad (3.6)$$

Όσο λιγότερα bits χρησιμοποιεί ένας κώδικας, τόσο πιο αποδοτικός είναι ως προς την ταχύτητα μετάδοσης συμβόλων.

Ανάλογα με το μήκος των κωδικών λέξεων οι κώδικες διακρίνονται σε **σταθερού μήκους** και **μεταβλητού μήκους**.

Στους **κώδικες σταθερού μήκους** το μήκος των κωδικών λέξεων είναι σταθερό για κάθε σύμβολο πηγής. Ένας κώδικας σταθερού μήκους είναι ο ASCII (American Standard Code for Information Interchange), όπου κάθε χαρακτήρας κωδικοποιείται με μια ακολουθία 7 δυαδικών ψηφίων κι έχει δυνατότητα κωδικοποίησης 128 χαρακτήρων.

Στην περίπτωση της συμπίεσης, το ενδιαφέρον εστιάζεται σε **κώδικες μεταβλητού μήκους**. Τα σύμβολα της πηγής που έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης αντιστοιχίζονται σε μικρότερες κωδικές λέξεις και αντιστρόφως. Με αυτόν τον τρόπο το συνολικό μήκος του κωδικού μηνύματος μπορεί να προκύψει μικρότερο από το αρχικό μήνυμα. Ας δούμε για παράδειγμα τον κώδικα Morse, ο οποίος είναι ο πιο γνωστός κώδικας με μη ισομήκεις λέξεις. Έχει κωδικό αλφάβητο τεσσάρων συμβόλων (τελεία, παύλα, κενό γράμματος, κενό λέξης). Γράμματα με μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης εμφανίζονται με βραχείες κωδικές λέξεις (π.χ. το λατινικό γράμμα e αναπαρίσταται με μια τελεία '.'), ενώ τα λιγότερα συχνά με κωδικές λέξεις μεγαλύτερου μήκους (π.χ. το γράμμα Q αναπαρίσταται με παύλα, παύλα, τελεία, παύλα '--.').

Ένα βασικό χαρακτηριστικό ενός κώδικα συμπίεσης, για να χαρακτηριστεί επιτυχής, είναι το κατά πόσο είναι δυνατή κι εύκολη η αποκωδικοποίηση ενός κωδικού μηνύματος από το δέκτη. Θεωρούμε βέβαια ότι κατά την αναπαραγωγή του αρχικού μηνύματος από το δέκτη ο κώδικας είναι γνωστός. Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι κώδικες ταξινομούνται στις εξής κατηγορίες:

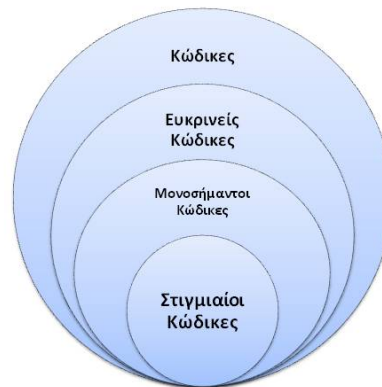
Ευκρινείς κώδικες (μη ιδιάζοντες - non-singular): Ευκρινής κώδικας είναι εκείνος που χρησιμοποιεί διαφορετική κωδική λέξη για κάθε σύμβολο ή λέξη πληροφορίας. Η ευκρίνεια του κώδικα είναι η πρώτη προϋπόθεση για να υπάρχει δυνατότητα αποκωδικοποίησης.

Μονοσήμαντοι κώδικες (μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι - uniquely decodable): Ένας κώδικας θεωρείται μονοσήμαντος αν κάθε κωδική λέξη αναγνωρίζεται μέσα σε μακρά διαδοχή κωδικών συμβόλων. Δύο οποιαδήποτε μηνύματα πληροφορίας αντιστοιχίζονται με μονοσήμαντο κώδικα σε δύο διαφορετικά κωδικά μηνύματα. Για να είναι ο κώδικας

μονοσήμαντος, πρέπει να διαθέτει την προθεματική ιδιότητα, δηλαδή καμία κωδική λέξη να μην είναι πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης.

Στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμοι κώδικες (άμεσοι - instantaneous code): Στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας είναι κάθε μονοσήμαντος κώδικας (uniquely decodable), ο οποίος επιτρέπει αποκωδικοποίηση των μηνυμάτων λέξη προς λέξη, χωρίς να απαιτείται εξέταση επόμενων κωδικών συμβόλων.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την ταξινόμηση των κωδίκων με κριτήριο την αποκωδικοποίηση.



Εικόνα 6. Ταξινόμηση των κωδικών με κριτήριο την αποκωδικοποίηση.

Από το παραπάνω σχήμα (Εικόνα 6) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Κάθε στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας είναι και μονοσήμαντος, δεν ισχύει όμως το αντίστροφο.
- Κάθε μονοσήμαντος κώδικας είναι και ευκρινής, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.
- Κάθε ευκρινής κώδικας σταθερού μήκους είναι και στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος.

Παράδειγμα 3.3

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι πιθανότητες των συμβόλων μιας

πηγής, καθώς και τέσσερεις διαφορετικοί κώδικες που χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση των συμβόλων. Να ταξινομηθούν οι κώδικες σε κατηγορίες (ευκρινής, μονοσήμαντος, στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος)

x_i	p_i	κώδικας 1	κώδικας 2	κώδικας 3	κώδικας 4
A	0.5	0	110	000	01
B	0.3	01	01	010	011
Γ	0.15	11	00	101	0111
Δ	0.05	10	10	111	0

Λύση:

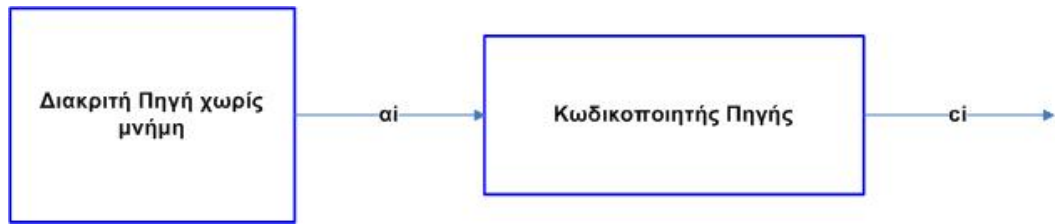
Προφανώς όλοι οι κώδικες είναι ευκρινείς, αφού ο καθένας από αυτούς αποτελείται από διαφορετικές κωδικές λέξεις. Όσον αφορά στον κώδικα 1, δεν είναι μονοσήμαντος, διότι η ακολουθία συμβόλων 0110 μπορεί να αποκωδικοποιηθεί ως ΑΓΑ ή ως ΒΔ. Αντίθετα, οι υπόλοιποι κώδικες είναι μονοσήμαντοι, δηλαδή όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί κωδικών λέξεων είναι διαφορετικοί. Λόγου χάριν, ο κώδικας 3 γιατί οι λέξεις του έχουν το ίδιο μήκος (3 κωδικά σύμβολα), ενώ στον κώδικα 4 κάθε κωδική λέξη αρχίζει πάντα με το σύμβολο 0, ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα της κωδικής λέξης μπορούν να είναι μόνο 1, οπότε κάθε κωδική λέξη μπορεί να αναγνωριστεί μέσα σε οποιοδήποτε κωδικό μήνυμα. Επιπλέον, οι κώδικες 2 και 3 είναι στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμοι. Ο κώδικας 2, γιατί οι κωδικές του λέξεις διαθέτουν την προθεματική ιδιότητα, δηλαδή καμία κωδική λέξη δεν είναι πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης. Ο κώδικας 3, γιατί κάθε κωδικοποιημένο σύμβολο πηγής αναπαρίσταται από τρία δυαδικά σύμβολα, που μόλις ληφθούν στον προορισμό μπορούν άμεσα να αποκωδικοποιηθούν στο αντίστοιχο σύμβολο. Αντίθετα, ο κώδικας 4 δεν είναι στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος, γιατί δεν έχει την προθεματική ιδιότητα, αφού για παράδειγμα η κωδική λέξη 01 αποτελεί πρόθεμα της κωδικής λέξης 011. Έτσι, για την αποκωδικοποίηση μιας κωδικής λέξης δεν αρκεί να ληφθεί και το τελευταίο ψηφίο αυτής, αλλά θα πρέπει να ληφθεί και το πρώτο ψηφίο της επόμενης κωδικής λέξης που αρχίζει με το 0, αφού μόνο τότε

αναγνωρίζεται ότι ολοκληρώθηκε προηγουμένως η λήψη μιας κωδικής λέξης στον προορισμό και επομένως, μόνο τότε είναι δυνατή η αποκωδικοποίησή της, και όχι άμεσα με τη λήψη του τελευταίου ψηφίου.

Όσον αφορά στην προθεματική ιδιότητα, ένας κώδικας του οποίου οι κωδικές λέξεις αποτελούν προθέματα άλλων κωδικών λέξεων, δεν είναι δυνατό να είναι στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος, αφού η ολοκλήρωση της λήψης τους στον προορισμό δεν μπορεί να αναγνωριστεί, με αποτέλεσμα η αποκωδικοποίηση να μην μπορεί να επιτευχθεί άμεσα. Ο κώδικας 4 έχει τις κωδικές λέξεις 01, 011, 0111, 0. Όταν ληφθεί το σύμβολο 0, ο παραλήπτης δε γνωρίζει εάν πρόκειται για την τελευταία κωδική λέξη ή για το πρώτο ψηφίο των υπόλοιπων κωδικών λέξεων. Το ίδιο ισχύει και με την ακολουθία 01, καθώς με τη λήψη αυτής ο παραλήπτης δεν είναι σε θέση να καταλάβει αν πρόκειται για την πρώτη κωδική λέξη ή τα δύο πρώτα ψηφία της δεύτερης και τρίτης κωδικής λέξης. Συνεπώς, δεν είναι δυνατή η άμεση αποκωδικοποίηση των λέξεων, αφού, για να γίνει αυτό, θα πρέπει να ολοκληρωθεί η λήψη της κωδικής λέξης, κάτι που επιτυγχάνεται με τη λήψη του πρώτου ψηφίου της επόμενης κωδικής λέξης. •

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να έχουμε πολύ μικρές κωδικές λέξεις για όλα τα σύμβολα της πηγής και ο κώδικας να είναι στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος, μιας και αναπόφευκτα κάποιες θα είναι προθέματα άλλων. Φυσικά, στόχος είναι να κατασκευάζουμε άμεσους κώδικες με το ελάχιστο δυνατό μήκος λέξεων, ώστε να γίνεται συμπιεσμένη αναπαράσταση των συμβόλων της πηγής. Η ανισότητα Kraft, που αναλύεται παρακάτω, περιορίζει το σύνολο των δυνατών μηκών των κωδικών λέξεων, για να είναι ένας κώδικας στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος.

Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 7) βλέπουμε την κωδικοποίηση της πηγής, όπου η έξοδος a_i (σύμβολο) μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη οδηγείται σε έναν κωδικοποιητή πηγής, ο οποίος δίνει στην έξοδο του μια ακολουθία c_i από 0 και 1 (κωδική λέξη).



Εικόνα 7. Κωδικοποίηση πηγής.

Ορισμός μέσου μήκους κώδικα \bar{L} : Έστω ότι η πηγή έχει $A = (a_1, a_2, \dots, a_M)$ διακριτά σύμβολα με πιθανότητες εμφάνισης $p_i = p(X = i)$ αντίστοιχα. Επίσης, υποθέτουμε ότι η κωδική λέξη $C = (c_1, c_2, \dots, c_M)$ που αντιστοιχεί στο σύμβολο a_i έχει μήκος l_i . Επομένως, ορίζουμε το μέσο μήκος κώδικα \bar{L} ως:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^M p_i l_i \quad (3.7)$$

Το μέσο μήκος κώδικα \bar{L} εκφράζει το μέσο πλήθος δυαδικών ψηφίων ανά σύμβολο πηγής, τα οποία χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της κωδικοποίησης.

Η ανισότητα του Kraft

Επιθυμούμε να κατασκευάζουμε στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμους κώδικες ελάχιστου δυνατού μήκους για την κωδικοποίηση μιας δεδομένης πηγής. Είναι προφανές πως δεν μπορούμε να αντιστοιχίζουμε σύντομες κωδικές λέξεις σε όλα τα σύμβολα της πηγής και ταυτόχρονα ο κώδικας που χρησιμοποιούμε να είναι προθεματικός, μιας και κάποιες από τις λέξεις αναπόφευκτα θα αποτελούν πρόθεμα άλλων. Τα μήκη των κωδικών λέξεων, που απαρτίζουν στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμους κώδικες, περιορίζονται από την ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα (Ανισότητα) Kraft

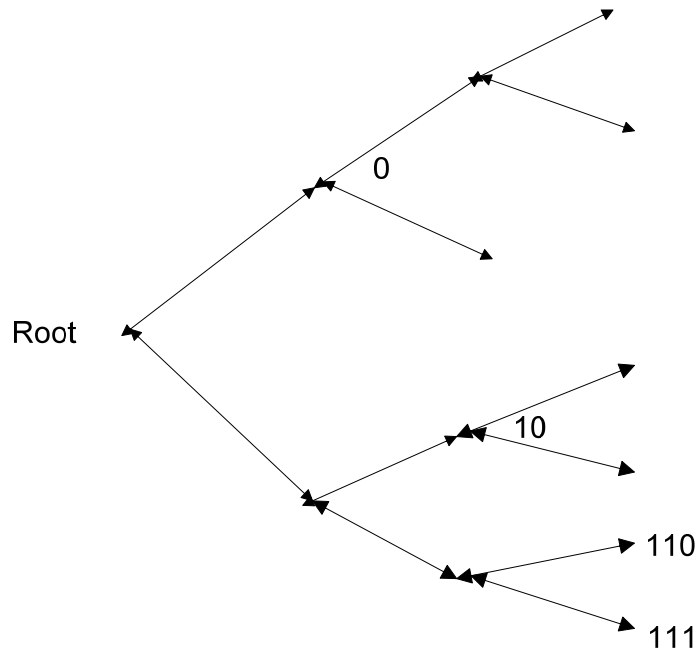
Για κάθε άμεσο (προθεματικό) κώδικα με πλήθος συμβόλων του κωδικού

αλφάβητου q , μήκη των κωδικών λέξεων l_i , όπου $i=1,2,\dots,n$ και n το πλήθος των συμβόλων της πηγής, πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα

$$\sum_{i=1}^n q^{-l_i} \leq 1 \quad (3.8)$$

Αντίστροφα, δεδομένου ενός συνόλου από μήκη κωδικών λέξεων, που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα, υπάρχει ένας στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας, που αποτελείται από κωδικές λέξεις με αυτά τα μήκη.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα δέντρο, κάθε κόμβος του οποίου έχει q παιδιά. Έστω ότι τα κλαδιά του δέντρου αναπαριστούν τα σύμβολα του κωδικού αλφαβήτου – τα q κλαδιά που ξεκινούν από τη ρίζα του δέντρου παριστούν τις q πιθανές τιμές του πρώτου συμβόλου μιας κωδικής λέξης – και τα φύλλα τις κωδικές λέξεις. Το μονοπάτι από τη ρίζα προς ένα φύλλο του δέντρου υποδεικνύει τα σύμβολα της κωδικής λέξης. Ένα δυαδικό παράδειγμα ενός τέτοιου δέντρου (δηλαδή $q=2$) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η προθεματική ιδιότητα των κωδικών λέξεων υποδεικνύουν πως καμία από αυτές δεν αποτελεί πρόγονο (πρόθεμα) κάποιας άλλης στο δέντρο.



Εικόνα 8. Δυαδική δενδρική δομή

Αν l_{\max} είναι το μέγιστο μήκος των κωδικών λέξεων, τότε κάποιοι από τους κόμβους του δέντρου στο επίπεδο l_{\max} είναι κωδικές λέξεις και κάποιοι απόγονοι κωδικών λέξεων. Μια κωδική λέξη στο επίπεδο l_i έχει $q^{l_{\max}-l_i}$ απόγονους στο επίπεδο l_{\max} . Τα σύνολα αυτά των απογόνων δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους και επιπλέον ο συνολικός αριθμός των κωδικών λέξεων στο επίπεδο l_i σε αυτά τα σύνολα πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με $q^{l_{\max}}$, αφού αυτός είναι ο αριθμός των κόμβων-φύλλων στο επίπεδο l_{\max} . Συνεπώς, αθροίζοντας όλες τις κωδικές λέξεις, έχουμε

$$\sum q^{l_{\max}-l_i} \leq q^{l_{\max}} \quad \text{ή} \quad \sum q^{-l_i} \leq 1 \quad (3.9)$$

πρόκειται, δηλαδή, για την ανισότητα Kraft.

Αντίστροφα, με δεδομένο ένα σύνολο κωδικών λέξεων με μήκη l_1, l_2, \dots, l_m , που ικανοποιούν την ανισότητα Kraft, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα δέντρο ανάλογο του σχήματος της Εικόνας 8. Θεωρούμε τον πρώτο κόμβο (έστω με αλφαβητική σειρά) βάθους l_1 ως

κωδική λέξη 1 και αφαιρούμε τους απογόνους του από το δέντρο, τον δεύτερο κόμβο μήκους l_2 τον χαρακτηρίζουμε κωδική λέξη 2 και ούτω καθεξής. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε έναν άμεσο κώδικα με δεδομένα μήκη λέξεων l_1, l_2, \dots, l_m . •

Βελτιστοποίηση κώδικα

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδεικνύεται πως κάθε σύνολο κωδικών λέξεων, που ικανοποιεί την προθεματική ιδιότητα, οφείλει να ικανοποιεί την ανισότητα Kraft, καθώς επίσης και πως η ανισότητα Kraft είναι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός συνόλου κωδικών λέξεων με ένα ικανοποιητικό μήκος. Στη συνέχεια αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός προθεματικού κώδικα με ελάχιστο μέσο μήκος λέξεων. Πρόκειται δηλαδή για τυπικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, η λύση του οποίου ισοδυναμεί με την εύρεση ενός συνόλου από μήκη κωδικών λέξεων l_1, l_2, \dots, l_m με το ελάχιστο μέσο μήκος $\bar{L} = \sum p_i l_i$.

Αγνοώντας ότι τα μήκη των κωδικών λέξεων είναι ακέραιοι, τα οποία συμβολίζουμε με l_i^* , και θεωρώντας την ισότητα στη σχέση (3.9), μιας και αυτή ισχύει για τα μικρότερα μήκη, σκοπός μας για τη λύση του προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$Z = \sum_{i=1}^n p_i l_i^* + \lambda \sum_{i=1}^n q^{-l_i^*}$$

Παραγωγίζοντας ως προς l_i^* έχουμε

$$\frac{\partial Z}{\partial l_i^*} = p_i - \lambda q^{-l_i^*} \ln q$$

Θέτοντας την πρώτη μερική παράγωγο ίση με μηδέν έχουμε

$$q^{-l_i^*} = \frac{p_i}{\lambda \ln q}$$

Αφού $\sum q^{-l_i} = 1$, προκύπτει ότι το λ είναι ίσο με $\frac{1}{\ln q}$ και ισχύουν οι

ακόλουθες σχέσεις για τα βέλτιστα μήκη

$$p_i = q^{-l_i^*} \quad \text{και} \quad l_i^* = -\log_q p_i$$

Η επιλογή μη ακέραιων αριθμών για τα μήκη των κωδικών λέξεων συνεπάγεται πως το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των κωδικών λέξεων είναι ίσο με το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής,

$$\sum p_i l_i^* = -\sum p_i \log_q p_i = H_q(X) \quad (3.10)$$

κάτι που διατυπώνεται και από το **θεώρημα κωδικοποίησης πηγής ή πρώτο θεώρημα του Shannon**, σύμφωνα με το οποίο, για μια δοσμένη κωδικοποίηση πηγής χωρίς μνήμη με εντροπία $H(X)$, το μέσο μήκος κώδικα \bar{L} οποιουδήποτε κωδικοποιητή πηγής φράσσεται από την ανισότητα:

$$\frac{H(C)}{\log q} \leq \sum_{i=1}^n p_i l_i \quad \text{ή} \quad \bar{L} \geq H(C) \quad (3.11)$$

Ωστόσο, μιας και τα μήκη είναι ακέραιοι αριθμοί, δεν μπορούμε πάντα να θέτουμε μήκη κωδικών λέξεων που να ικανοποιούν την (3.11). Στην περίπτωση που η ποσότητα $-\log_q p_i$ δεν είναι ακέραιος αριθμός, επιλέγουμε τον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο ως μήκος της αντίστοιχης λέξης, έτσι ώστε

$$-\log_q p_i \leq l_i \leq -\log_q p_i + 1$$

Αποδοτικότητα του κώδικα

Αν θεωρήσουμε ως L_{\min} την ελάχιστη δυνατή τιμή του \bar{L} , τότε μπορούμε να ορίσουμε την **αποδοτικότητα** του κώδικα ως:

$$a = \frac{L_{\min}}{\bar{L}} \quad (3.12)$$

Παρατηρούμε πως, αφού $L_{\min} \leq \bar{L}$, η αποδοτικότητα a λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Ένας κώδικας ονομάζεται αποδοτικός, αν η αποδοτικότητα του πλησιάζει την τιμή 1.

Η τιμή L_{\min} , στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, είναι χαρακτηριστικό της πηγής δεδομένων και όχι του κωδικοποιητή. Η τιμή της L_{\min} υπολογίζεται με βάση το θεώρημα κωδικοποίησης πηγής ή πρώτο θεώρημα του Shannon, που αναφέραμε παραπάνω. Το θεώρημα αυτό μας πληροφορεί πως δεν υπάρχει κωδικοποιητής πηγής, ο οποίος να πετυχαίνει μικρότερο μέσο μήκος κώδικα \bar{L} από την εντροπία της πηγής. Έτσι, η τιμή L_{\min} , που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, ισούται με την εντροπία της διακριτής πηγής, την οποία κωδικοποιούμε, και μπορούμε να ορίσουμε έτσι την αποδοτικότητα ενός κωδικοποιητή πηγής ως το λόγο του μέσου πληροφοριακού περιεχομένου των συμβόλων της πηγής (ή των κωδικών λέξεων) προς το γινόμενο του μέσου μήκους των κωδικών λέξεων με το λογάριθμο του πλήθους των κωδικών συμβόλων:

$$a = \frac{H(C)}{\left(\sum_{i=1}^n p_i l_i \right) \log q} \quad (3.13)$$

Από την ταξινόμηση, με βάση την ευκολία με την οποία επιτυγχάνεται η αποκωδικοποίηση, προέκυψε ότι ένας στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον, αφού η αποκωδικοποίηση είναι στιγμιαία, χωρίς να δημιουργούνται κωδικά μηνύματα με ασάφειες ή διαφορετικά ισοδύναμα αποτελέσματα αποκωδικοποίησης. Για τους παραπάνω λόγους, στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν μόνο στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμοι κώδικες.

3.2.1 Προθεματικοί κώδικες

Θεωρούμε μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο $\{s_0, s_1, \dots, s_{K-1}\}$ και πιθανότητες συμβόλων p_0, p_1, \dots, p_{K-1} . Ένας κωδικοποιητής πηγής, που αντιστοιχίζει κάθε σύμβολο της πηγής αυτής σε μια κωδική λέξη, είναι χρήσιμος μόνο στην περίπτωση που μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την αρχική ακολουθία συμβόλων της πηγής από την ακολουθία των κωδικών λέξεων. Ο περιορισμός αυτός σημαίνει ότι η ακολουθία κωδικών λέξεων που αντιστοιχεί σε μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της

πηγής είναι διαφορετική από όλες τις ακολουθίες κωδικών λέξεων, οι οποίες προκύπτουν για διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων της πηγής. Με άλλα λόγια, η κωδικοποίηση είναι μία ένα προς ένα συνάρτηση από το σύνολο Φ (αλφάβητο) πηγής στο σύνολο $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{K-1}\}$, το οποίο περιέχει τις κωδικές λέξεις.

Υποθέτουμε πως η κωδική λέξη b_k , η οποία αντιστοιχεί στο σύμβολο s_k , είναι

$$b_k = (m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_n}) \quad (3.11)$$

όπου

m_{k_i} : το i -οστό δυαδικό ψηφίο (0 ή 1) της κωδικής λέξης

n : το μήκος της κωδικής λέξης b_k

Ορίζουμε ως πρόθεμα της κωδικής λέξης b_k οποιαδήποτε ακολουθία δυαδικών ψηφίων της μορφής $(m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_i})$, όπου $i \leq n$ (3.12)

Ορισμός προθεματικού κώδικα. Ορίζουμε ως προθεματικό κώδικα έναν κώδικα για τον οποίο καμία κωδική λέξη του δεν αποτελεί πρόθεμα κάποιας άλλης κωδικής λέξης. Η συνθήκη αυτή καθιστά τους προθεματικούς κώδικες πάντα αποκωδικοποιήσιμους.

Παράδειγμα 3.4

Ας θεωρήσουμε τους 3 κώδικες που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Σύμβολο πηγής	Πιθανότητα εμφάνισης	κώδικας 1	κώδικας 2	κώδικας 3
s_0	0.5	0	0	0
s_1	0.25	1	10	01
s_2	0.125	00	110	011
s_3	0.125	11	111	0111

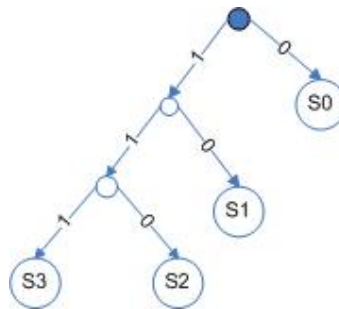
Να βρεθεί ποιοί από τους κώδικες του πίνακα είναι προθεματικοί και ποιοί

όχι. Να αιτιολογηθεί η απάντηση.

Λύση:

Εύκολα παρατηρούμε πως ο κώδικας 1 δεν είναι προθεματικός, αφού η κωδική λέξη '0' που αντιστοιχεί στο σύμβολο s_0 αποτελεί πρόθεμα της κωδικής λέξης '00' που αντιστοιχεί στο σύμβολο s_2 . Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε πως ο κώδικας 2 είναι προθεματικός, αφού η κωδική λέξη '0', που αντιστοιχεί στο σύμβολο s_0 , δεν αποτελεί πρόθεμα καμίας προθεματικής λέξης των συμβόλων s_1 , s_2 και s_3 , ενώ ο κώδικας 3 δεν είναι.

Η διαδικασία της μετατροπής των κωδικών λέξεων στα αντίστοιχα σύμβολα πηγής ονομάζεται αποκωδικοποίηση και οι διατάξεις, που εκτελούν την εργασία αυτή, αποκωδικοποιητές πηγής. Η αποκωδικοποίηση ενός προθεματικού κώδικα γίνεται με χρήση δέντρων απόφασης. Ένα δέντρο απόφασης είναι μια γραφοθεωρητική αναπαράσταση όλων των κωδικών λέξεων ενός προθεματικού κώδικα. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το δέντρο απόφασης του κώδικα 2, που είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα.



Εικόνα 9. Δέντρο απόφασης για τον κώδικα 2.

Παρατηρούμε πως κάθε ακμή του γραφήματος έχει μια ετικέτα 0 ή 1. Κάθε μονοπάτι από τη ρίζα του δέντρου απόφασης ως τα φύλλα του αντιστοιχεί σε μια κωδική λέξη, την κωδική λέξη που προκύπτει από τις ετικέτες των ακμών που αποτελούν το μονοπάτι.

Ο αποκωδικοποιητής ενός προθεματικού κώδικα ξεκινά από τη ρίζα του

δέντρου απόφασης. Για καθένα δυαδικό ψηφίο, που εμφανίζεται στην είσοδο του, ακολουθεί την ακμή με την αντίστοιχη ετικέτα και έτσι μεταβαίνει σε ένα νέο κόμβο. Αν σε κάποιο βήμα καταλήξει σε φύλλο του δέντρου τότε βγάζει στην έξοδο του το αντίστοιχο σύμβολο πηγής κι επιστρέφει στη ρίζα του δέντρου, για να ξεκινήσει την αποκωδικοποίηση του νέου συμβόλου. Έτσι, στο παραπάνω παράδειγμα για τον κώδικα 2, βλέποντας το δέντρο απόφασης και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε με είσοδο τα δυαδικά ψηφία '1011111000', καταλήγουμε στην ακολουθία συμβόλων s_1, s_3, s_2, s_0, s_0 .

Για μια δοσμένη διακριτή πηγή χωρίς μνήμη, το μέσο μήκος κώδικα \bar{L} , για τους προθεματικούς κώδικες αποδεικνύεται πως φράσσεται από την ανισότητα:

$$H(\Phi) \leq \bar{L} < H(\Phi) + 1 \quad (3.13)$$

Για μια δοσμένη διακριτή πηγή χωρίς μνήμη, μπορούμε να σχεδιάσουμε πάντα έναν προθεματικό κώδικα, ο οποίος να πετυχαίνει μέσο μήκος κώδικα \bar{L} κοντά στην εντροπία της πηγής. Παρακάτω αποδεικνύουμε πώς γίνεται αυτό.

Θεωρούμε τη n -τάξης επέκταση της διακριτής πηγής, η οποία είναι μια νέα διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο Φ^n . Έστω ένας προθεματικός κώδικας για τη νέα πηγή. Αυτός ο κώδικας θα ονομάζεται n -τάξης επεκταμένος κώδικας. Για το ζεύγος νέας πηγής και νέου κώδικα θα ισχύει:

$$H(\Phi) \leq \bar{L}_n < H(\Phi^n) + 1 \quad (3.14)$$

όπου \bar{L}_n το μέσο μήκος κώδικα του n -τάξης επεκταμένου κώδικα.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα

$$H(\Phi^n) = n \cdot H(\Phi) \quad (3.15)$$

Έχουμε:

$$n \cdot H(\Phi) \leq \bar{L}_n < n \cdot H(\Phi) + 1 \Leftrightarrow$$

$$H(\Phi) \leq \frac{\bar{L}_n}{n} < H(\Phi) + \frac{1}{n} \quad (3.16)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι, όταν η τάξη n του κώδικα τείνει στο άπειρο, το μέσο μήκος του \bar{L}_n συγκλίνει στην εντροπία της πηγής. Άρα, το μέσο μήκος ενός προθεματικού επεκταμένου κώδικα μπορεί να προσεγγίσει την εντροπία μιας διακριτής πηγής χωρίς μνήμη, αρκεί η τάξη n του κώδικα να είναι αρκετά μεγάλη. Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι το μειονέκτημα της χρήσης ενός επεκταμένου κώδικα είναι η μεγάλη πολυπλοκότητα του αλγόριθμου αποκωδικοποίησής του.

3.2.2 Αλγόριθμοι Κωδικοποίησης

Η κωδικοποίηση πηγής αφορά στη διαδικασία κατά την οποία μετατρέπουμε ακολουθίες συμβόλων, που παράγει μια πηγή, σε ακολουθίες συμβόλων κάποιου κώδικα. Διακρίνουμε τους κώδικες με βάση το αν χρησιμοποιούν κωδικές λέξεις σταθερού (fixed) ή μεταβλητού μήκους (variable length) και με βάση το αν η κατανομή της πηγής είναι γνωστή ή όχι, οπότε στη δεύτερη περίπτωση ονομάζονται καθολικοί (universal codes). Σκοπός της κωδικοποίησης πηγής είναι να απεικονίσει τα σύμβολα, που παράγει μια πηγή, σε σύμβολα ενός κώδικα, με σκοπό τη συμπίεση. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι για την εύρεση αποδοτικών κωδίκων, μερικοί από τους οποίους είναι οι αλγόριθμοι κωδικοποίησης του Shannon, του Fano και του Huffman, των Gilbert – Moore και ο αλγόριθμος αριθμητικής κωδικοποίησης. Οι αλγόριθμοι κωδικοποίησης συνδυάζονται με άλλες τεχνικές για τη δημιουργία σχημάτων συμπίεσης, όπως τα πρότυπα σχήματα συμπίεσης JPEG και MPEG, στα οποία χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Huffman. Τα πρότυπα JPEG και MPEG βρίσκουν εφαρμογή για τη συμπίεση εικόνας και βίντεο, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τους τρεις πρώτους από τους παραπάνω αλγορίθμους κωδικοποίησης.

3.2.2.1 Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Shannon

Ο αλγόριθμος κωδικοποίησης του Shannon μπορεί να χρησιμοποιηθεί για

Παράδειγμα 3.5

Έστω πηγή πληροφορίας $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ με κατανομή πιθανότητας $p(X) = \{0.5, 0.3, 0.1, 0.1\}$. Να βρεθούν οι κωδικές λέξεις κατά Shannon, το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων και η εντροπία της πηγής.

Λύση:

Το βήμα 1 της κωδικοποίησης Shannon είναι έτοιμο (σωστά διατεταγμένα σύμβολα).

Για το βήμα 2:

$$\varepsilon_1 = 0 = 0.0 = \underline{0.00000}\dots$$

$$\varepsilon_2 = 0.5 + \varepsilon_1 = 0.5 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = \underline{0.10000}\dots$$

$$\varepsilon_3 = 0.3 + \varepsilon_2 = 0.8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = \underline{0.11001}\dots$$

$$\varepsilon_4 = 0.1 + \varepsilon_3 = 0.9 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = \underline{0.11100}\dots$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του βήματος 3 προκύπτει:

$$2^4 (0.5) \geq 1 \Rightarrow l_1 = 1$$

$$2^2 (0.3) \geq 1 \Rightarrow l_2 = 2$$

$$2^3 (0.1) \geq 1 \Rightarrow l_3 = 4$$

$$2^4 (0.1) \geq 1 \Rightarrow l_4 = 4$$

Συνεπώς, οι λέξεις κώδικα για τα $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ θα είναι (0,10,1100,1110) αντίστοιχα.

Το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων είναι $L = 1 \cdot (0.5) + 2 \cdot (0.3) + 4 \cdot (0.1) + 4 \cdot (0.1) = 1.9$ ψηφία ανά λέξη. Επειδή κάθε δυαδικό ψηφίο αντιστοιχεί σε 1 bit, θα είναι $L = 1.9$ bits ανά λέξη.

Η εντροπία της πηγής πληροφορίας είναι :

$$H(X) = -0.5 \log(0.5) - 0.3 \log(0.3) - 0.1 \log(0.1) - 0.1 \log(0.1) = 1.685 \text{ bits} / \text{σύμβολο}$$

Άρα, $L = 1.9 > H(X) / \log 2 = 1.685$ που αποτελεί το κατώτερο φράγμα.

3.2.2.2 Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Shannon – Fano

Ο αλγόριθμος κωδικοποίησης του Fano ή Shannon – Fano αποτελείται από τα ακόλουθα πέντε βήματα:

1. Τα σύμβολα της πηγής πληροφορίας συντάσσονται στη σειρά με κριτήριο την πιθανότητα τους (από την μέγιστη στην ελάχιστη πιθανότητα).

Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ p(x_1) \geq p(x_2) \geq \dots \geq p(x_M) \end{array}$$

2. Επιλέγεται συγκεκριμένη διάταξη για τα κωδικά σύμβολα $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_D$, η οποία δεν αλλάζει σε καμία φάση της κωδικοποίησης, αλλά και κατά την αποκωδικοποίηση.

3. Σχηματίζονται D ομάδες συμβόλων πηγής πληροφορίας με συγχώνευση γειτονικών συμβόλων. Οι πιθανότητες των συμβόλων που συμμετέχουν σε κάθε ομάδα αθροίζονται και το αποτέλεσμα επιδιώκεται να είναι όσο το δυνατόν πλησιέστερα στον αριθμό $1/D$ δηλαδή όλες οι ομάδες συμβόλων είναι κατά το δυνατόν ισοπίθανες.

4. Στα σύμβολα της πρώτης ομάδας αντιστοιχούμε ως πρώτο κωδικό σύμβολο το γ_1 , της δεύτερης το γ_2 κ.ο.κ.

5. Διαιρούμε κάθε ομάδα συμβόλων σε D υποομάδες πάλι με το ίδιο κριτήριο (κατά το δυνατόν ισοπίθανες). Στα σύμβολα της κάθε υποομάδας αντιστοιχίζεται ως δεύτερο κωδικό σύμβολο ένα κωδικό σύμβολο με την προκαθορισμένη διάταξη. Η συγκεκριμένη αναδρομική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να προκύψουν υποομάδες με ένα μόνο σύμβολο.

Παράδειγμα 3.6

Έστω πηγή πληροφορίας $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ με κατανομή πιθανότητας $p(X) = \{0.25, 0.25, 0.125, 0.125, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625\}$.

Να βρεθούν οι κωδικές λέξεις κατά Shannon – Fano, το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων και η εντροπία της πηγής.

Λύση:

Με βάση την κατανομή πιθανότητας βλέπουμε ότι τα σύμβολα πληροφορίας είναι διατεταγμένα σωστά (το βήμα (1) έχει πραγματοποιηθεί).

Σκοπεύοντας να χωρίσουμε τα σύμβολα σε δύο ομάδες (αφού πρόκειται για δυαδική κωδικοποίηση), παρατηρούμε πως τα δύο πρώτα σύμβολα έχουν μαζί πιθανότητα εμφάνισης 0,5. Επομένως η πρώτη ομάδα περιέχει τα x_1 και x_2 και η δεύτερη τα υπόλοιπα σύμβολα, σύμφωνα με το 2ο βήμα του αλγορίθμου, έτσι ώστε για την κάθε ομάδα να προκύπτει όσο το δυνατόν η ίδια πιθανότητα, κάτι που είναι δυνατό με ακρίβεια στην προκειμένη περίπτωση. Από τα κωδικά σύμβολα 0 και 1, επιλέγουμε το 0 ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της πρώτης ομάδας και το 1 ως το πρώτο κωδικό σύμβολο των κωδικών λέξεων της δεύτερης. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται χωριστά για την πρώτη και δεύτερη ομάδα συμβόλων. Θεωρώντας την πρώτη ομάδα με τα σύμβολα x_1, x_2 , χωρίζουμε σε δύο – συμπτωματικά – ισοπίθανες (υπο)ομάδες. Στην πρώτη με το σύμβολο x_1 αντιστοιχούμε το κωδικό σύμβολο 0 για την κωδική λέξη που θα σχηματιστεί και στη δεύτερη με το σύμβολο x_2 αντιστοιχούμε το 1. Ο σχηματισμός των δύο πρώτων κωδικών λέξεων ολοκληρώνεται σ' αυτό το βήμα, μιας και οι (υπο)ομάδες που προέκυψαν αποτελούνται από ένα σύμβολο, και είναι 00 για το x_1 και 01 για το x_2 . Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τα σύμβολα της δεύτερης ομάδας, οπότε προκύπτουν οι κωδικές λέξεις που φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύμβολο	Πιθανότητα	1ο Βήμα	2ο Βήμα	3ο Βήμα	4ο Βήμα
x ₁	0.25	0	00	00	00
x ₂	0.25	0	01	01	01
x ₃	0.125	1	10	100	100
x ₄	0.125	1	10	101	101
x ₅	0.0625	1	11	110	1100
x ₆	0.0625	1	11	110	1101
x ₇	0.0625	1	11	111	1110
x ₈	0.0625	1	11	111	1111

Το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων είναι:

$$\bar{L} = 2(0.25) + 2(0.25) + 3(0.125) + 3(0.125) + 4(4(0.0625)) = 2.75 \text{ bits} / \text{ λέξη}$$

Η εντροπία της πηγής πληροφορίας είναι:

$$H(X) = 2(-0.25 \log(0.25)) + 2(-0.125 \log(0.125)) + 4(-0.0625 \log(0.0625)) \\ = 2.75 \text{ bits} / \text{ symbol}$$

Επομένως ο κώδικας αυτός, σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, είναι βέλτιστος. •

3.2.2.3 Αλγόριθμος Κωδικοποίησης Huffman

Ο κώδικας Huffman είναι ένας κώδικας πηγής, το μέσο μήκος του οποίου πλησιάζει την εντροπία της διακριτής πηγής την οποία κωδικοποιεί. Ο κώδικας αυτός είναι βέλτιστος με την έννοια ότι για μια δοσμένη διακριτή πηγή χωρίς μνήμη δεν υπάρχει άλλος αποκωδικοποιήσιμος κώδικας, ο οποίος να πετυχαίνει μικρότερο μέσο μήκος.

Η ιδέα του αλγορίθμου με βάση τον οποίο κατασκευάζουμε τον κώδικα Huffman είναι η σταδιακή μείωση του αλφαβήτου της πηγής. Σε κάθε βήμα, επιλέγουμε 2 σύμβολα από το αλφάβητο της πηγής και τα συγχωνεύουμε σε ένα σύμβολο, που λαμβάνει μέρος στην επόμενη φάση

του αλγορίθμου. Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή, καταλήγουμε σε ένα αλφάβητο, το οποίο αποτελείται από 2 μόνο σύμβολα. Τα σύμβολα αυτά γνωρίζουμε πως κωδικοποιούνται βέλτιστα από τις κωδικές λέξεις '0' και '1'. Στη συνέχεια, ξεκινώντας από την τελευταία φάση, εργαζόμαστε προς τα πίσω και καταλήγουμε σε έναν βέλτιστο κώδικα. Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος κατασκευής του κώδικα Huffman έχει ως εξής:

Τα σύμβολα της πηγής ταξινομούνται από το πλέον πιθανό ως το λιγότερο πιθανό. Στα δύο λιγότερο πιθανά σύμβολα ανατίθενται τα δυαδικά ψηφία 0 και 1 αντίστοιχα.

Τα δύο σύμβολα αυτά συγχωνεύονται σε ένα σύμβολο με πιθανότητα ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των συμβόλων αυτών. Με τον τρόπο αυτό το αλφάβητο μειώνεται κατά ένα σύμβολο. Το νέο σύμβολο τοποθετείται στη σωστή θέση με βάση την πιθανότητα που υπολογίστηκε.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να απομείνουν μόνο 2 σύμβολα. Στα σύμβολα αυτά αναθέτουμε τα δυαδικά ψηφία 0 και 1. Οι κωδικές λέξεις για κάθε σύμβολο βρίσκονται ξεκινώντας από την τελευταία φάση, συλλέγοντας τα δυαδικά ψηφία που έχουμε αναθέσει μέχρι να καταλήξουμε στο αρχικό σύμβολο (στη φάση 1), στο οποίο αντιστοιχεί η κωδική λέξη.

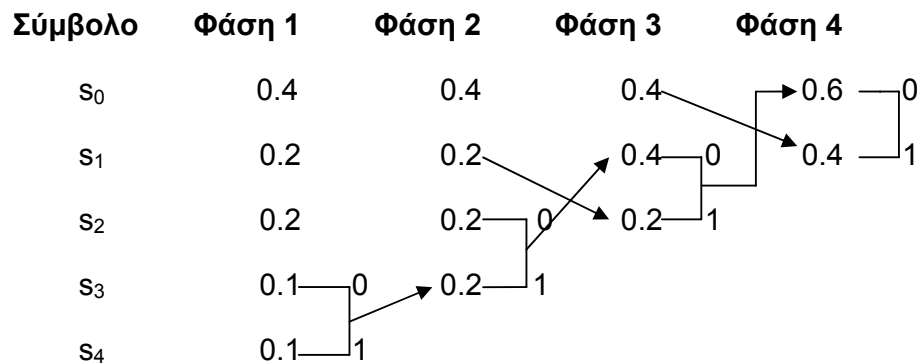
Παράδειγμα 3.7

Να βρεθεί η κωδικοποίηση Huffman για μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη με αλφάβητο $\Phi = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ και πιθανότητες συμβόλων $p_0 = 0.4, p_1 = 0.2, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1, p_4 = 0.1$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το μέσο μήκος κώδικα και η εντροπία της πηγής και να σχολιαστούν τα αποτελέσματα.

Λύση:

Καταρχάς, θα αναπαραστήσουμε τη διαδικασία εύρεσης της κωδικοποίησης Huffman για την πηγή που εξετάζουμε. Σύμφωνα λοιπόν με τον αλγόριθμο, διατάσσουμε τα πέντε σύμβολα σε τάξη φθίνουσας πιθανότητας εκπομπής. Η πρώτη στήλη περιέχει τα σύμβολα και η δεύτερη στήλη (Φάση 1) τις πιθανότητες τους. Στο επόμενο βήμα, τα

σύμβολα s_3 και s_4 , με τις μικρότερες πιθανότητες, ενώνονται σε ένα με πιθανότητα ίση με το άθροισμα αυτών των πιθανοτήτων, δηλαδή ίση με 0.2. Τώρα διατάσσονται εκ νέου τα σύμβολα λαμβάνοντας υπόψη την ένωση των s_3 και s_4 στο s_3 , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στη συνέχεια τοποθετούμε σε έναν πίνακα τις κωδικές λέξεις που προκύπτουν από το σχήμα.

Σύμβολο	Πιθανότητα	Κωδική λέξη
s_0	0.4	1
s_1	0.2	01
s_2	0.2	000
s_3	0.1	0010
s_4	0.1	0011

Το μέσο μήκος του κώδικα θα είναι:

$$\bar{L} = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.1 \cdot 4 = 2.2$$

Η εντροπία της πηγής θα είναι:

$$H(\Phi) = 0,4 \log_2 \left(\frac{1}{0,4} \right) + 0,2 \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right) + 0,2 \log_2 \left(\frac{1}{0,2} \right) + 0,1 \log_2 \left(\frac{1}{0,1} \right) \\ + 0,1 \log_2 \left(\frac{1}{0,1} \right) \approx 2,12193$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι το μέσο μήκος κώδικα \bar{L} υπερβαίνει την εντροπία της πηγής μόνο κατά ένα ποσοστό 3.67%. Επίσης, παρατηρούμε ότι το μέσο μήκος κώδικα ικανοποιεί την ανισότητα

$$H(\Phi) \leq \bar{L} \langle H(\Phi) + 1 \rangle \quad \bullet$$

3.3 Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη

Στην ενότητα 3.1 γνωρίσαμε πηγές χωρίς μνήμη, δηλαδή πηγές στις οποίες θεωρείται πως οι πιθανότητες επιλογής των συμβόλων παραμένουν αμετάβλητες και πως η επιλογή ενός συμβόλου δεν εξαρτάται από τα σύμβολα του μηνύματος, που επιλέγησαν πριν από αυτό. Ωστόσο, σχεδόν όλες οι πραγματικές πηγές πληροφορίας παράγουν ακολουθίες συμβόλων που είναι στατιστικά εξαρτημένες και η πιθανότητα εκπομπής ενός συμβόλου εξαρτάται από ποιά σύμβολα εξέπεμψε προηγουμένως, όπως τα μηνύματα φυσικών γλωσσών. Για παράδειγμα, στην ελληνική γλώσσα η πιθανότητα το 'π' να ακολουθείται από το 'α' είναι πολύ υψηλή, να ακολουθείται από το 'φ' όμως μηδενική. Επίσης, η πιθανότητα ένα οποιοδήποτε σύμβολο να είναι το 'α' ανέρχεται στο 11.7%, να είναι όμως το 'ψ' μόλις στο 0.1%.

Λέμε λοιπόν, ότι μια διακριτή πηγή πληροφορίας **έχει μνήμη**, όταν τα σύμβολα $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, που εκπέμπονται από την πηγή, δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης (εκπομπής) $P_A = \{p(a_i), i = 1, \dots, K\}$ ενός συμβόλου εξαρτάται από την εκπομπή ή όχι προηγούμενων συμβόλων.

Μια πηγή με μνήμη λέγεται m -τάξης αν η πιθανότητα εκπομπής ενός συμβόλου εξαρτάται από τα m προηγούμενα σύμβολα, που έχουν ήδη εκπεμφθεί. Συγκεκριμένα, θα μιλάμε για πηγή πληροφορίας με μνήμη m -τάξης αν ισχύει:

$$p(a_i^{(k)}) \neq p(a_i^{(k)} | a_i^{(k-1)}, a_i^{(k-2)}, \dots, a_i^{(k-m)}) \quad (3.18)$$

Αυτό συμβαίνει με πολλές φυσικές πηγές, των οποίων το 'σήμα' προέρχεται, όπως λέμε, από αιτιοκρατικό (μη τελείως τυχαίο) στατιστικό φαινόμενο. Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη είναι ουσιαστικά πηγή πληροφορίας με μνήμη μηδενικής τάξης.

Συνήθως, υποθέτουμε ότι η εξάρτηση μεταξύ διαδοχικών συμβόλων μιας διακριτής πηγής με μνήμη υφίσταται για έναν περιορισμένο αριθμό συμβόλων, παρ'όλο που στην πραγματικότητα μπορεί να συμβαίνει για μακρές ακολουθίες συμβόλων κατά την παραγωγή τους από την πηγή. Έτσι, μπορούν να χρησιμοποιηθούν Μαρκοβιανές αλυσίδες ή αλυσίδες Markov ως στατιστικά υποδείγματα (μοντέλα) για τις πηγές πληροφορίας.

3.3.1 Πηγές Markov

Θεωρούμε συχνά ότι η εκπομπή ενός συμβόλου από μια πηγή σημαίνει αλλαγή αυτής και μετάπτωση από μια κατάσταση σε μία άλλη (που μπορεί να είναι και η ίδια). Ένα τέτοιο υπόδειγμα πηγής είναι γνωστό ως υπόδειγμα Markov – απ'όπου και πηγή Markov ή Μαρκοβιανές πηγές –, όπου σε κάθε μία διαδοχή καταστάσεων κάθε μια κατάσταση έχει καθορισμένη πιθανότητα να προκύψει σαν αποτέλεσμα μιας διαδοχής m προηγούμενων καταστάσεων. Στο υπόδειγμα αυτό η πιθανότητα μετάβασης από μια κατάσταση σε μία μελλοντική εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση.

Η βασική ιδιότητα μιας διαδικασίας Markov είναι ότι η κατάσταση τη χρονική στιγμή $n+1(t_{n+1})$ εξαρτάται μόνο από την κατάσταση τη χρονική στιγμή $n(t_n)$ και όχι από τις καταστάσεις τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Ορισμός Μαρκοβιανών Αλυσίδων Διακριτού Χρόνου. Μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, X_n , όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Η τιμή της τυχαίας μεταβλητής, X_n , της διαδικασίας Markov δείχνει την κατάσταση του συστήματος στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή n .

Οι διαδικασίες Markov διακριτού χρόνου, λοιπόν, είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, X_n , όπου $n = 0, 1, 2, \dots$, οι οποίες συμβολίζουν τις n δυνατές καταστάσεις της Markovιανής πηγής. Οι διαδικασίες Markov συνεχούς χρόνου είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών $X(t_n)$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$. Η τιμή της τυχαίας μεταβλητής, X_n ($X(t_n)$), δείχνει την κατάσταση του συστήματος τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή $n(t_n)$.

Αν n οι δυνατές καταστάσεις X_n της Markovιανής πηγής και a_1, a_2, \dots, a_q τα q διαφορετικά σύμβολα, που μπορεί να εκπέμψει η πηγή, τότε στην περίπτωση Markovιανής πηγής m τάξης αποδεικνύεται ότι:

$$n = q^m$$

μιας και κάθε κατάσταση είναι μία από τις σειρές Markov με m σύμβολα, δηλαδή μία από τις μεταθέσεις με ελεύθερες επαναλήψεις των q συμβόλων ανά m . Στη συνέχεια πρόκειται να ασχοληθούμε με τις Markovιανές πηγές πρώτης τάξης, οι οποίες είναι και οι απλούστερες. Σε αυτές $m = 1$ και επομένως $l = q$, όπου το πλήθος των καταστάσεων είναι ίσο με το πλήθος των συμβόλων.

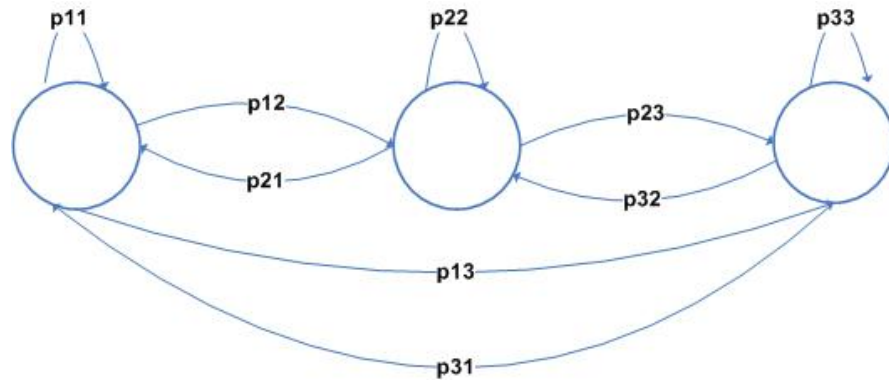
Η βασική ιδιότητα των διαδικασιών Markov, στην περίπτωση αλυσίδων διακριτού χρόνου, μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1] = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = P_{ij} \quad (3.19)$$

η οποία ερμηνεύεται από το γεγονός ότι η κατάσταση τη χρονική στιγμή $n+1$ εξαρτάται μόνο από την κατάσταση τη χρονική στιγμή n , και όχι από τις καταστάσεις τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Συνήθως, η εκπομπή ενός συμβόλου από μια τέτοια πηγή πληροφορίας θεωρείται ως η μετάβαση της πηγής από μια κατάσταση σε μια άλλη. Έτσι, οι εκπομπές των συμβόλων από μια πηγή με μνήμη, αναπαρίστανται με το λεγόμενο **διάγραμμα καταστάσεων** της πηγής. Οι κόμβοι του διαγράμματος καταστάσεων παριστάνουν τις καταστάσεις. Οι ακμές δίνουν τις δυνατές μεταβάσεις των καταστάσεων. Κάθε ακμή $(i, j) \in E$ σημαίνει ότι είναι δυνατή η μετάβαση σε ένα βήμα από την i στην j .

Μετάβαση σε ένα βήμα σημαίνει ότι αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου βρεθεί κάποια στιγμή στην κατάσταση i τότε είναι πιθανόν την επόμενη χρονική στιγμή να βρεθεί στην κατάσταση j . Παρακάτω βλέπουμε το διάγραμμα καταστάσεων (με 3 καταστάσεις) για μια αλυσίδα Markov.



Εικόνα 10. Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων

Το πόσο πιθανές είναι οι μεταβάσεις καθορίζεται από τον **πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης** \hat{P} . Οι διαστάσεις του πίνακα είναι $|V| \times |V|$, όπου $|V|$ είναι το πλήθος των καταστάσεων. Έτσι, μια πηγή με v δυνατά σύμβολα (καταστάσεις), μπορεί να περιγραφεί με την επόμενη μήτρα πιθανοτήτων της μετάπτωσης P , δηλαδή:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{v1} & \cdots & p_{vv} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Κάθε στοιχείο του πίνακα, p_{ij} λέγεται **πιθανότητα μετάβασης** και καθορίζει το πόσο πιθανή είναι η μετάβαση σε ένα βήμα από την κατάσταση i στη j . Γενικά, ισχύει

$$\sum_{j \in V} p_{ij} = 1, \forall i \in V \quad (3.21)$$

Το ζητούμενο, όταν αναλύουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\hat{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{|v|}]$, το οποίο

ονομάζεται **στατική κατανομή πιθανότητας** ή κατανομή μόνιμης κατάστασης (steady state distribution) ή κατανομή κατάστασης ισορροπίας (equilibrium state distribution). Η κάθε πιθανότητα π_i ($\forall i \in V$) εκφράζει το πόσο πιθανή είναι η κάθε κατάσταση i ή, με άλλα λόγια, το ποσοστό του χρόνου που η μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου θα βρίσκεται στην κατάσταση i . Ισχύει η σχέση $M_i = (1/\pi_i)$, όπου M_i είναι ο μέσος χρόνος επανάληψης (mean recurrence time) της κατάστασης i .

Το διάνυσμα πιθανοτήτων $\hat{\pi}$ δίνεται από το σύστημα εξισώσεων:

$$\hat{\pi} = \hat{\pi} \hat{P} \quad (3.22\alpha)$$

$$\sum_{i \in V} \pi_i = 1 \quad (3.23)$$

Το σύστημα $\hat{\pi} = \hat{\pi} \hat{P}$ αναλυτικότερα γράφεται:

$$[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{|V|}] = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{|V|}] \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{v1} & \dots & p_{vv} \end{pmatrix} \quad (3.22\beta)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί επίσης να γραφεί

$$\pi_i = \sum_{j \in V} \pi_j \cdot p_{ji} \quad \text{για } \forall i \in V \quad (3.22\gamma)$$

Από το παραπάνω σύστημα παίρνουμε $|V|$ εξισώσεις, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (3.23) έχουμε ένα σύστημα $|V|+1$ εξισώσεων με $|V|$ αγνώστους.

Αγνοούμε μια εξίσωση από αυτές που προκύπτουν από το σύστημα (3.22β) ή (3.22γ), οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (3.23) έχουμε ένα σύστημα $|V|$ εξισώσεων με $|V|$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να λυθεί με αντικατάσταση.

Αν τα στοιχεία της P δεν εξαρτώνται από το χρόνο, η Μαρκοβιανή πηγή είναι **στατική**. Στην πράξη αντιμετωπίζουμε μόνο τέτοιες πηγές. Δεν σημαίνει όμως ότι κάθε στατική πηγή είναι και εργοδική, δηλαδή ότι η πραγματική πιθανότητα μετάπτωσης από κατάσταση σε κατάσταση είναι για μεγάλο χρονικό διάστημα αυτό που προβλέπει η P . Γενικότερα, θα λέμε πως μια Μαρκοβιανή πηγή είναι **εργοδική** αν, μετά από ένα

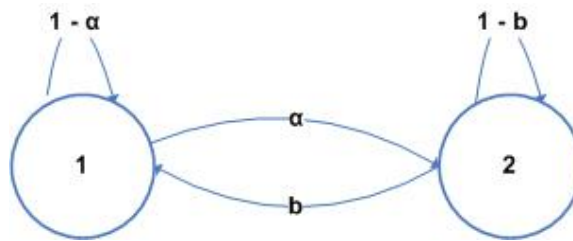
ορισμένο αριθμό μεταπτώσεων, είναι και πάλι δυνατό να μεταπέσει από οποιαδήποτε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη με **μη** μηδενική πιθανότητα. Οι πιθανότητες αυτές μάλιστα, τείνουν να αποκατασταθούν σε σταθερές τιμές και ίσες προς εκείνες του P .

Παράδειγμα 3.8

Ας θεωρήσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις και με πίνακα μετάβασης, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες π_1 και π_2 , δηλαδή οι πιθανότητες να βρίσκεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα στην κατάσταση 1 και 2 αντίστοιχα.



Εικόνα 11. Μαρκοβιανή αλυσίδα δύο καταστάσεων

Λύση:

Αφού δίνεται ο πίνακας μετάβασης, οι πιθανότητες των δύο καταστάσεων μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια της σχέσης $\hat{\pi} = \hat{\pi} \hat{P}$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pi_1 \cdot P_{11} + \pi_2 \cdot P_{21} & \pi_1 \cdot P_{12} + \pi_2 \cdot P_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_1(1-a) + \pi_2 b & \pi_1 a + \pi_2(1-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας ακόμα υπόψη ότι $\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = 1 - \pi_1$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες των δύο καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας:

$$\pi_1(1-\alpha)+\pi_2b = \pi_1 \Rightarrow -\pi_1\alpha+b-\pi_1b = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{b}{\alpha+b}$$

$$\pi_1\alpha+\pi_2(1-b) = \pi_2 \Rightarrow -\pi_2\alpha+\alpha-\pi_2b = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+b}$$

3.3.2 Εντροπία των πηγών Markoff

Εντροπία της πηγής Markoff ορίζεται ο μέσος όρος της εντροπίας των συμβόλων που εκπέμπονται από κάθε κατάσταση. Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπονται από την κατάσταση i , $H(K_i)$, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(K_i) = -\sum_{j=1}^m P_{ij} \log P_{ij} \text{ bits / symbol} \quad (3.24)$$

Επομένως, η εντροπία της πηγής, η οποία είναι ο μέσος όρος της εντροπίας των καταστάσεων, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$H(S) = \sum_{i=1}^m p_i H(K_i) = -\sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m P_{ij} \log P_{ij} \text{ bits / symbol} \quad (3.25)$$

Ορίζουμε, επίσης, τον **μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής R**, ο οποίος δίνεται από τον παρακάτω τύπο, όπου r_s είναι ο ρυθμός εκπομπής συμβόλων της πηγής:

$$R = r_s H(S) \text{ bits / sec} \quad (3.26)$$

Ακόμη, μπορούμε να ορίσουμε τη **μέση ποσότητα πληροφορίας μηνυμάτων** της πηγής με την ακόλουθη σχέση, που αφορά σε όλα τα μηνύματα μήκους N συμβόλων, που εκπέμπονται από την πηγή, και το κάθε ένα μήνυμα m_i έχει πιθανότητα εκπομπής $p(m_i)$:

$$H(M) = -\sum_i p(m_i) \log p(m_i) \quad (3.27)$$

Η μέση ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων της πηγής ορίζεται αν διαιρέσουμε τη μέση ποσότητα πληροφορίας μηνυμάτων της πηγής με το μήκος τους και δίνεται από τη σχέση:

$$H_N = \frac{1}{N} H(M) \quad (3.28)$$

3.3.3 Ζητήματα κωδικοποίησης των Μαρκοβιανών πηγών

Στην ενότητα 3.1.1 ορίσαμε την έννοια του πλεονασμού, που αποτελεί μέτρο της ποιότητας της πηγής χωρίς μνήμη. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το **μέτρο του πλεονασμού εξάρτησης για πηγές με μνήμη**, που δίνεται από τον τύπο:

$$red_{εξ} = 1 - \frac{H_{\text{μεινήμεη}}(S)}{H_{\text{χωρίζουμε}}(S)} \quad (3.29)$$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο του ολικού πλεονασμού, το οποίο αναφέρεται στην εντροπία της πηγής με μνήμη σε σύγκριση με τη μέγιστη δυνατή εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη, που επιτυγχάνεται για ίσες πιθανότητες εκπομπής όλων των συμβόλων.

$$red_{ολ} = 1 - \frac{H_{\text{μεινήμεη}}(S)}{\max H_{\text{χωρίζουμε}}(S)} = 1 - \frac{H_{\text{μεινήμεη}}(S)}{\log q} \quad (3.30)$$

Παράδειγμα 3.9

Μια διακριτή πηγή με μνήμη εκπέμπει τα σύμβολα χ, ψ και ω. Η πηγή χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης.

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να υπολογιστούν η εντροπία της πηγής, το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων αποτελούμενο από δύο σύμβολα, ο πλεονασμός, ο πλεονασμός εξάρτησης και ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής.

Λύση:

Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων παραγωγής των χ, ψ, ω επιλύουμε σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Θεωρούμε $\pi_1 = p(x)$, $\pi_2 = p(\psi)$, $\pi_3 = p(\omega)$

$$\pi_1 = \pi_1 P(x/x) + \pi_2 P(x/\psi) + \pi_3 P(x/\omega) = \pi_1(0.5) + \pi_2(0) + \pi_3(0.5) \quad (1)$$

$$\pi_2 = \pi_1 P(\psi / \chi) + \pi_2 P(\psi / \psi) + \pi_3 P(\psi / \omega) = \pi_1(0) + \pi_2(0.5) + \pi_3(0.25) \quad (2)$$

$$\pi_3 = \pi_1 P(\omega / \chi) + \pi_2 P(\omega / \psi) + \pi_3 P(\omega / \omega) = \pi_1(0.5) + \pi_2(0.5) + \pi_3(0.25) \quad (3)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (4)$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$0.5\pi_1 = 0.5\pi_3 \Rightarrow \pi_1 = \pi_3$$

Από την σχέση (2) έχουμε:

$$0.5\pi_2 = 0.25\pi_3 \Rightarrow 2\pi_2 = \pi_3$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στη σχέση (4) λαμβάνουμε:

$$\pi_3 + 0.5\pi_3 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = 0.4$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) και στη σχέση (2) έχουμε:

$$\pi_1 = 0.4 \quad \text{και} \quad \pi_2 = 0.2$$

Για τον υπολογισμό της εντροπίας της πηγής Markoff, υπολογίζουμε την εντροπία των συμβόλων που εκπέμπεται από κάθε κατάσταση.

$$H(K_1) = -0.5 \log 0.5 - 0 - 0.5 \log 0.5 = 1$$

$$H(K_2) = -0 - 0.5 \log 0.5 - 0.5 \log 0.5 = 1$$

$$H(K_3) = -0.5 \log 0.5 - 0.25 \log 0.25 - 0.25 \log 0.25 = 1.5$$

Για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής αρκεί να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των παραπάνω, λαμβάνοντας υπόψη και τη βαρύτητα καθεμιάς κατάστασης (δηλαδή την πιθανότητα της).

$$H(S) = 0.4 \times 1 + 0.2 \times 1 + 0.4 \times 1.5 = 1.2 \text{ bits / symbol}$$

Για να υπολογίσουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες όλων των δυνατών μηνυμάτων μήκους δύο συμβόλων .

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας του μηνύματος (x,x) , η οποία είναι

συνδυασμένη πιθανότητα, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την πιθανότητα $p(x)$ με την πιθανότητα $P(x/x)$, δηλαδή

$$p(m_1) = p(x, x) = \pi_1 P_{11} = \pi_1 P(x/x) = 0.4 \times 0.5 = 0.02$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τις πιθανότητες των άλλων 8 μηνυμάτων. Έτσι λαμβάνουμε:

$$p(m_1) = p(x, x) = \pi_1 P_{11} = \pi_1 P(x/x) = 0.2$$

$$p(m_2) = p(x, \psi) = \pi_1 P_{12} = \pi_1 P(\psi/x) = 0$$

$$p(m_3) = p(x, \omega) = \pi_1 P_{13} = \pi_1 P(\omega/x) = 0.2$$

$$p(m_4) = p(\psi, \chi) = \pi_2 P_{21} = \pi_2 P(\chi/\psi) = 0$$

$$p(m_5) = p(\psi, \psi) = \pi_2 P_{22} = \pi_2 P(\psi/\psi) = 0.1$$

$$p(m_6) = p(\psi, \omega) = \pi_2 P_{23} = \pi_2 P(\omega/\psi) = 0.1$$

$$p(m_7) = p(\omega, \chi) = \pi_3 P_{31} = \pi_3 P(\chi/\omega) = 0.2$$

$$p(m_8) = p(\omega, \psi) = \pi_3 P_{32} = \pi_3 P(\psi/\omega) = 0.1$$

$$p(m_9) = p(\omega, \omega) = \pi_3 P_{33} = \pi_3 P(\omega/\omega) = 0.1$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο για τον υπολογισμό της ζητούμενης μέσης ποσότητας πληροφορίας.

$$H(M) = -p(m_1) \log p(m_1) - p(m_2) \log p(m_2) - \dots - p(m_9) \log p(m_9) = 2.72 \text{ bits / message}$$

Ισχύει ακόμα:

$$H(M) = H(X, Y) = H(X) + H(S) = H_{\text{χωρίζουμένη}}(S) + H(S) = 1.52 + 1.2 = 2.72 \text{ bits / message}$$

Για τον υπολογισμό του πλεονασμού, του πλεονασμού εξάρτησης και του ολικού πλεονασμού υπολογίζουμε πρώτα την εντροπία πηγής χωρίς μνήμη.

$$H_{\text{χωρίζουμένη}}(S) = -0.4 \log 0.4 - 0.2 \log 0.2 - 0.4 \log 0.4 = 1.52 \text{ bits / symbol}$$

Αφού έχουμε 3 σύμβολα, η μέγιστη εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη είναι $\log 3 = 1.585 \text{ bits}$

Άρα

Πλεονασμός: $red = 1 - (1.52 / 1.585) = 0.0041$

Πλεονασμός εξάρτησης: $red_{εξ} = 1 - (1.2 / 1.52) = 0.210$

Ολικός πλεονασμός: $red_{ολ} = 1 - (1.2 / 1.585) = 0.243$



Ασκήσεις

1. Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο $S = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$. Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι $1/32, 1/16, 1/8, 1/8, 1/8, 1/2$ και $1/32$ αντίστοιχα.

- A) το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής
- B) το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα
- Γ) Τον πλεονασμό της πηγής
- Δ) Το μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής για ρυθμό 12500 σύμβολα/sec

2. Η έξοδος μιας στατικής πηγής πληροφορίας χωρίς μνήμη, εκπέμπει 128 σύμβολα. Τα 16 σύμβολα από αυτά έχουν πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{32}$ και έχουν χρονική διάρκεια t . Τα υπόλοιπα σύμβολα είναι ισοπίθανα και έχουν διάρκεια εκπομπής $2t$. Η πηγή εκπέμπει χωρίς κενά.

- 1. Υπολογίστε την εντροπία της πηγής (H_{π})
- 2. Ποιος ο ρυθμός παροχής της πηγής (R_{π})

3. Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο $S = \{\varphi, \chi, \psi, \omega\}$. Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Θεωρώντας την πηγή χωρίς μνήμη, ζητείτε να υπολογίσετε:

- A) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής
- B) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα
- Γ) Τον πλεονασμό της πηγής
- Δ) Το μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής για ρυθμό 15 συμβόλων/sec

4. Θεωρούμε μια πηγή τριών διακριτών συμβόλων χωρίς μνήμη (Discrete Memoryless Source, DMS) με αλφάβητο

$$\Phi = \{S_0, S_1, S_2\}$$

όπου οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων είναι:

$$p(S_0) = p_0 = 0.4, \quad p(S_1) = p_1 = 0.3, \quad p(S_2) = p_2 = 0.3$$

Ακόμα γνωρίζουμε ότι η πηγή αυτή παράγει σύμβολα με ρυθμό $r_s = 1000 \text{symbol/sec}$. Να υπολογίσετε την εντροπία της πηγής και το μέσο ρυθμό πληροφορίας στην έξοδο της πηγής.

5. Θεωρούμε τώρα τη δεύτερης τάξης επέκταση της πηγής της άσκησης 4. Η νέα πηγή θα αποτελείται από $3^2 = 9$ σύμβολα και πιο συγκεκριμένα το νέο αλφάβητο θα είναι το $\Phi^2 = \{S_0S_0, S_0S_1, S_0S_2, S_1S_0, \dots, S_2S_2\} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_8\}$

Για την πηγή αυτή, να υπολογιστεί η εντροπία και ο μέσος ρυθμός πληροφορίας

6. Η εικόνα μιας ασπρόμαυρης τηλεόρασης αποτελείται από 500·600 pixels. Κάθε ένα από αυτά μπορεί να λαμβάνει 8 διαφορετικούς τόνους φωτεινότητας. Αν η μείωση της εντροπίας της πηγής εξαιτίας της μη ισοπίθανης χρησιμοποίησης των τόνων φωτεινότητας και αφετέρου εξαιτίας του πλεονασμού είναι 80%, τότε για μια ικανοποιητική παρακολούθηση εικόνας (30 εικόνες/sec) υπολογίστε ποιος είναι ο ρυθμός πληροφορίας R ο οποίος φτάνει στον εγκέφαλο ενός προσεκτικού παρατηρητή.

7. Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο $S = \{\tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$. Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι 1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/8 και 1/8 αντίστοιχα. Θεωρώντας τη πηγή χωρίς μνήμη ζητείται να υπολογίσετε:

- A) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής
- B) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα
- Γ) Τον πλεονασμό της πηγής ($\log 6 = 2.585$)
- Δ) Το μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής για ρυθμό 500 σύμβολα/sec

8. Η έξοδος μιας έγχρωμης ψηφιακής κάμερας η οποία έχει ανάλυση 500×400 εικονοστοιχεία (pixels) κωδικοποιείται με χρήση παλέτας 256 χρωμάτων. Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές των γειτονικών pixels είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητες και ότι σε κάθε pixel τα 256 επίπεδα εμφανίζονται με τις εξής πιθανότητες:

Περιοχή επιπέδων	0- 99	100-149	150- 209	210-255
Πιθανότητα εμφάνισης	0.1	0.5	0.3	0.1

Υποθέτουμε ακόμα πως στα πλαίσια κάθε περιοχής τα χρώματα εμφανίζονται ισοπίθانا. Να υπολογιστούν:

- A) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο κάθε rixel
 B) Το ολικό πληροφοριακό περιεχόμενο μιας εικόνας
 Γ) Ο μέσος ρυθμός πληροφορίας στην έξοδο της κάμερας αν γνωρίζουμε πως αυτή δίνει $r = 25 \text{ frame / sec}$

9. Ο διεθνής κώδικας Morse χρησιμοποιεί μια ακολουθία από τελείες και παύλες για τη μετάδοση του αγγλικού αλφαβήτου. Η παύλα παριστάνεται με ένα παλμό ρεύματος διάρκειας 3 msec και η τελεία με έναν παλμό ρεύματος διάρκειας 1 msec. Η πιθανότητα εμφάνισης της παύλας είναι το 1/3 της πιθανότητας εμφάνισης της τελείας.

- A) Υπολογίστε το πληροφοριακό περιεχόμενο της τελείας και της παύλας.
 B) Υπολογίστε τη μέση πληροφορία του κώδικα.
 Γ) Αν μεταξύ κάθε δύο συμβόλων παρεμβάλλεται ένα διάστημα παύσης 1 msec, υπολογίστε το μέσο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας.

$$R = r \cdot H = 324.4 \text{ bits / sec}$$

10. Θεωρούμε τους ακόλουθους κώδικες I, II, III, και IV:

	I	II	III	IV
φ	0	00	1	1
χ	10	01	10	01
ψ	01	10	100	001
ω	1	11	1000	0001

Ζητείται να εξετάσετε αν οι κώδικες I, II, III και IV είναι:

- A) μη – ιδιάζοντες
 B) μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι

Γ) άμεσοι

11. Έστω ένας M – αδικός ευκρινής κώδικας σταθερού μήκους (k κωδικών λέξεων μήκους l η κάθε μία). Στον κώδικα αυτόν, προσθέτω μια ακόμα κωδική λέξη ίδιου μήκους l .

A) Τι πρέπει να προσέξουμε στην κατασκευή της νέας κωδικής λέξης έτσι ώστε ο νέος κώδικας να είναι στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος;

B) Σε ποια περίπτωση δεν μπορεί να κατασκευαστεί στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας με τον παραπάνω τρόπο;

12. Ζητείται να εξεταστεί αν οι ακόλουθοι κώδικες είναι ευκρινείς, μονοσήμαντοι και στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμοι:

{0,10,11,01}

{00,10,01,11}

{0,1,10,01}

{11,10,110,1110}

{0,10,110,1110}

{11,00,100,110}

{110,11,10}

{1,10,01}

13. Δίδεται πηγή που εκπέμπει τα σύμβολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ με πιθανότητες εμφάνισης {0.6,0.3,0.08,0.02} , αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι **δεν** υπάρχει άμεσος και μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος δυαδικός κώδικας με μήκη κωδικών λέξεων {1,2,2,3} .

Να βρεθεί ένας βέλτιστος μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος δυαδικός κώδικας. Ποια είναι η βέλτιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του μέσου μήκους κωδικής λέξης; Σε ποια περίπτωση ο βέλτιστος κώδικας παράγει μήκη κωδικών λέξεων που είναι επίσης ελάχιστα; Δώστε ένα τέτοιο παράδειγμα

14. Μια πηγή παράγει 10 διαφορετικά σύμβολα , τα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K$ με πιθανότητες

0.25, 0.125, 0.125, 0.125, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625

αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα:

A) Η εντροπία της πηγής

B) Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

Γ) Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Shannon, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

Δ) Οι επιδόσεις των κωδίκων που προκύπτουν από τα ερωτήματα 2 και 3

15. Μια πηγή παράγει 8 διαφορετικά σύμβολα, τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ με

πιθανότητες $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Ζητούνται τα ακόλουθα:

A) Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Huffman, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

B) Να υπολογιστεί και να σχολιαστεί η επίδοση του κώδικα Huffman

16. Για την πηγή της Άσκησης 15, ζητούνται τα ακόλουθα:

Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο

Να σχηματιστεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Shannon, με δυαδικό κωδικό αλφάβητο.

17. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή (πηγή) που παίρνει (παράγει) 4

διαφορετικές τιμές (σύμβολα) με πιθανότητες $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\}$ Ζητούνται τα ακόλουθα:

A) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Huffman για την πηγή αυτή

B) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο βέλτιστα σύνολα μηκών των 4 κωδικών λέξεων, τα (1,2,3,3) και (2,2,2,2)

Επίσης ζητείται :

Γ) Να εξεταστεί ποιοι από τους ακόλουθους κώδικες και για πιο λόγο δεν μπορεί να προκύψουν σύμφωνα με τον αλγόριθμο κωδικοποίησης του Huffman για καμιά συνάρτηση πιθανότητας μάζας πηγής (PMF) που παράγει 2, 3 και 4 σύμβολα , αντίστοιχα: {01,10}, {0,10,11}, {00,01,10,11}

18. Για την πηγή της άσκησης 4, να βρεθεί η κωδικοποίηση Huffman, το

μέσο μήκος του κώδικα και η απόδοση της κωδικοποίησης Huffman.

19. Για την πηγή της άσκησης 5, να βρεθεί η κωδικοποίηση Huffman και να υπολογιστεί η κωδικοποίηση της πηγής αυτής.

20. Έστω μια πηγή A που εκπέμπει 6 σύμβολα είτε με τις πιθανότητες που δίνονται στη στήλη A_1 είτε με αυτές που δίνονται στη στήλη A_2 .

Σύμβολο	Πιθανότητα A_1	Πιθανότητα A_2
A	0,4	0,3
B	0,25	0,15
Γ	0,1	0,15
Δ	0,1	0,15
E	0,1	0,15
Z	0,05	0,1

A) Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου Huffman, να γράψετε τις κωδικές λέξεις για κάθε σύμβολο του A (σύμφωνα με τις πιθανότητες A_1) και να υπολογίσετε το μέσο μήκος του κώδικα.

B) Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου Huffman, να γράψετε τις κωδικές λέξεις για κάθε σύμβολο του A (σύμφωνα με τις πιθανότητες A_2) και να υπολογίσετε το μέσο μήκος του κώδικα.

Γ) Αν δεν γνωρίζουμε εξαρχής αν οι πιθανότητες της πηγής είναι οι A_1 οι A_2 αλλά γνωρίζουμε ότι μπορεί να είναι οι A_1 με πιθανότητα 0.3 και οι A_2 με πιθανότητα 0.7, ποιον κώδικα θα επιλέγατε για την κωδικοποίηση της πηγής, αυτόν που βρήκατε στο ερώτημα α ή αυτόν που βρήκατε στο ερώτημα 2;

21. Μια πηγή Markoff εκπέμπει τα σύμβολα α , β και γ . Η πηγή χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης (Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης):

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να υπολογιστούν:

A) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων α , β και γ δηλαδή οι $p(\alpha)$, $p(\beta)$ και $p(\gamma)$.

B) Η εντροπία της πηγής

Γ) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων αποτελούμενο από δύο σύμβολα

Δ) Ο πλεονασμός, ο πλεονασμός εξάρτησης και ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής.

22. Έστω 5 σύμβολα A, B, C, D και E και ο πίνακας μετάπτωσης

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.75 & 0.5 & 0.00 \\ 0.375 & 0.00 & 0.00 & 0.5 & 0.00 \\ 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.50 \\ 0.125 & 0.00 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

A) Να φτιάξετε το διάγραμμα μετάπτωσης

B) Ποια η εντροπία της πηγής με μνήμη;

Κεφάλαιο 4.

Σήματα

Στα προηγούμενα κεφάλαια κάναμε πολλές αναφορές σε θέματα πληροφορίας, ποσότητας πληροφορίας, μεταφορά πληροφορίας κτλ. Τι είναι όμως πραγματικά πληροφορία και πώς αυτή μεταφέρεται;

Τα απλά γνωστά σε εμάς σήματα είναι γενικά φορείς πρωτογενούς πληροφορίας, περιέχουν τις μεταβολές αυτής της πληροφορίας συναρτήσει του χρόνου και η μελέτη των μεταβολών αυτών χαρακτηρίζει κάποιο φυσικό μέγεθος, που με τη σειρά του χαρακτηρίζει κάποιο σύστημα κατά τη διάρκεια του φαινομένου που εξελίσσεται, όπως π.χ. φωνής, εικόνας. Για παράδειγμα, το μικρόφωνο του μικροτηλεφώνου μετατρέπει τα ηχητικά κύματα της φωνής σε ένα ηλεκτρικό σήμα (που μεταδίδεται μέσω της γραμμής), ένας εικονολήπτης μετατρέπει τις φυσικές εικόνες σε ένα σύνθετο ηλεκτρικό σήμα που εμπεριέχει την πληροφορία για τη φωτεινότητα και τη χρωματικότητα των εικόνων αυτών κτλ. Οι μεταβολές αυτού του μεγέθους συναρτήσει π.χ. του χρόνου, αντιπροσωπεύουν συνήθως κάποιες πληροφορίες.

Με αυτή την ευρεία έννοια, σήματα μπορεί να είναι ένα ηλεκτρικό ρεύμα, μια απογραφή πληθυσμού, μια ακουστική πίεση, μια στατιστική έρευνα, οι μηνιαίες τιμές του πληθωρισμού, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, κλπ. Άρα, τα σήματα γενικά είναι φορείς πληροφοριών μέσω των τιμών των

μεταβολών ενός φυσικού μεγέθους, που χαρακτηρίζει το σύστημα από το οποίο παράγονται, οπότε τελικά θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής απλό και περιεκτικό ορισμό: **Σήμα ονομάζουμε, το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει ένα φυσικό μέγεθος.**

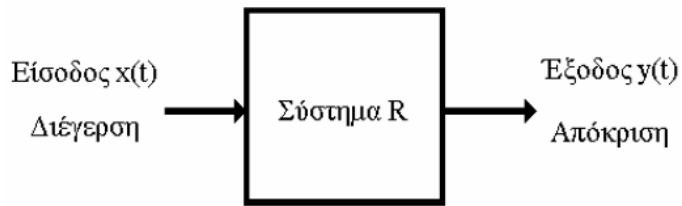
Παρακάτω γίνεται μια κατηγοριοποίηση των σημάτων σε χρονοσυνεχή (μεταβλητή ο χρόνος t) και σε χρονοδιακριτά (διακριτή μεταβλητή χρόνου n), η οποία συνεχίζεται λαμβάνοντας υπόψη διάφορες ιδιότητες των σημάτων (αυτή η κατηγοριοποίηση αναφέρεται σε ηλεκτρικά σήματα που υπακούουν σε κάποιο καθορισμένο μαθηματικό τύπο οπότε και μπορούν να μελετηθούν καλύτερα μέσω των μαθηματικών μοντέλων και λογικών). Αυτά είναι τα λεγόμενα αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά σήματα. Κατόπιν, παρουσιάζονται τα κυριότερα αναλογικά σήματα που χρησιμοποιούνται στις επικοινωνίες απεικονίζοντας τη μεταβολή τους συναρτήσει του χρόνου, $x(t)$. Στη συνέχεια, δίνονται και οι βασικότερες χαρακτηριστικές τιμές αναλογικών και ψηφιακών σημάτων (μέση και ενεργός τιμή, ενέργεια και ισχύς).

Ακόμα, γίνεται μια μικρή αναφορά στο θόρυβο (σήματα που δεν υπακούουν σε κάποιο μαθηματικό τύπο-τυχαία ή στοχαστικά σήματα) και στις πιο γνωστές τεχνικές μετάδοσης που χρησιμοποιούνται.

Για να γίνει όμως η μελέτη των αιτιοκρατικών σημάτων, θα πρέπει να δουλέψουμε είτε στο πεδίο του χρόνου, κάτι το οποίο έχει μεγάλη δυσκολία στην έκταση και υλοποίηση των υπολογισμών, είτε στο πεδίο της συχνότητας, που από μαθηματικής απόψεως είναι πολύ απλούστερο. Έτσι, η δημιουργία και η σπουδαιότητα της φασματικής αναπαράστασης έγκειται στο γεγονός ότι η $M(f)$ (Φασματική συνάρτηση) παρέχει πληροφορίες για το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος και συνεπώς διευκολύνει τη μελέτη της διέλευσης και επεξεργασίας του από τηλεπικοινωνιακές διατάξεις και συστήματα. Τα δύο βασικά εργαλεία για τη μετάβαση και μετατροπή από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας είναι οι σειρές Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier.

Σήματα σαν τα προαναφερθέντα εμφανίζονται συνήθως σε συνδυασμό με

κάποιο σύστημα, όπου ως σύστημα ορίζεται ο παράγοντας που «κανονίζει» το είδος της μεταβολής και με τη βοήθεια του οποίου συνδέεται η έξοδος του (απόκριση) με την είσοδό του (διέγερση). Στην πιο απλή μορφή ένα σύστημα είναι όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (Εικόνα 12), όπου το σήμα εισόδου $x(t)$ μπορεί να αντιπροσωπεύει κάποιο μήνυμα, το σύστημα να είναι η συσκευή μέτρησης/δημιουργίας της μεταβολής και το $y(t)$ να είναι η μέτρηση/απεικόνιση της μεταβολής του $x(t)$.



Εικόνα 12. Παράδειγμα συστήματος.

Κατόπιν, γίνεται μια μικρή ανάλυση της διαδικασίας της δειγματοληψίας, η οποία δεν είναι τίποτα άλλο από τη διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό. Αναφέρονται οι βασικές προϋποθέσεις για τη σωστή δειγματοληψία και η εφαρμογή τους, καθώς η σωστή δειγματοληψία προηγείται της σωστής κωδικοποίησης.

4.1 Είδη/Κατηγορίες σημάτων

Οι δύο βασικές κατηγορίες σύμφωνα με τη σύγχρονη διεθνή βιβλιογραφία, στις οποίες μπορούμε να χωρίσουμε τα είδη σημάτων-συναρτήσεων σε σχέση μόνο με το είδος της ανεξάρτητης μεταβλητής και λαμβάνοντάς τες υπόψη ως συναρτήσεις του χρόνου, αφορούν τα δύο βασικά είδη σημάτων:

α) Τα χρονο-συνεχή σήματα (continuous time signals), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι συνεχής και συμβολίζονται $x(t)$

και

β) Τα χρονο-διακριτά σήματα (discrete time signals), όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι διακριτή και συμβολίζονται $x(n)$.

Αυτά χωρίζονται με τη σειρά τους σε υποκατηγορίες.

Σημείωση: Αν επίσης τα σήματα παράγονται από πολλαπλές πηγές και μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή διανύσματος τότε καλούνται και πολυδιαυλικά σήματα και αν κάθε συνιστώσα του διανύσματος είναι συνάρτηση περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών τότε καλούνται και πολυδιάστατα.

A. Χρονοσυνεχή σήματα (ανεξάρτητη μεταβλητή συνεχής)

Αναλογικά Σήματα (Analog signal) ή **Σήματα συνεχούς χρόνου** (continuous time signal) λέγονται αυτά που εκφράζονται από συναρτήσεις $f(t)$, όπου τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή t όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή $f(t)$, παίρνουν συνεχείς τιμές, δηλαδή όπου τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών είναι συνεχή διαστήματα. Αναλογικά σήματα είναι η έξοδος ενός μικροφώνου, η έξοδος μιας κοινής πρίζας ή ενός τροφοδοτικού.

Σήματα συνεχούς χρόνου-διακριτού πλάτους είναι αυτά που εκφράζονται από συναρτήσεις με συνεχή ανεξάρτητη μεταβλητή και διακριτή εξαρτημένη (δηλαδή ο χρόνος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, ενώ το πλάτος μόνο συγκεκριμένες τιμές), όπως π.χ. τα σήματα των σύγχρονων ηλεκτρονικών ψηφιακών κατασκευών.

B. Τα χρονοδιακριτά σήματα, (ανεξάρτητη μεταβλητή διακριτή)

Ψηφιακά Σήματα (Digital signals) λέγονται αυτά που εκφράζονται μαθηματικά από ακολουθίες $x(n)$, όπου τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή n όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή $x(n)$, παίρνουν μόνο διακριτές τιμές, δηλαδή τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών είναι διακριτά σύνολα (συνήθως σύνολα ακέραιων αριθμών) π.χ. παλμοί τάσεων από παλμοτροφοδοτικό.

Τα ψηφιακά σήματα είναι και τα πιο ενδιαφέροντα σήμερα στις εφαρμογές, όπου συνήθως παράγονται από δειγματοληψία (sampling) ενός αναλογικού σήματος μέσω Η/Υ. Δηλαδή, σε αναγκαστικά περιορισμένο αριθμό τιμών του χρόνου (δειγματοληψία ανά χρονικές τιμές-συνήθως ακεραίων (n)), αποθηκεύονται στη συγκεκριμένης χωρητικότητας μνήμη

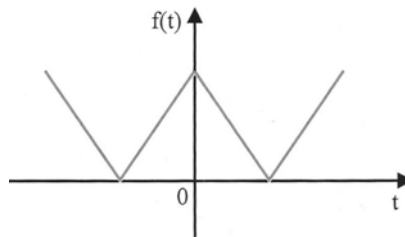
του Η/Υ οι αντίστοιχες ακέραιες τιμές $x(n)$ του σήματος, εκφρασμένες σε περιορισμένο αριθμό ψηφίων στο δυαδικό σύστημα (κβαντισμένες τιμές).

Σήματα διακριτού χρόνου (discrete time signals) είναι αυτά που εκφράζονται από ακολουθίες $x(n)$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή (n) παίρνει διακριτές τιμές, ενώ η εξαρτημένη $x(n)$ παίρνει συνεχείς τιμές.

(Και τα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν συχνά από χρονο-συνεχή αναλογικά σήματα μέσω της δειγματοληπτικής διαδικασίας σε Η/Υ, όπως π.χ. στα ραντάρ, σε δείκτες της οικονομετρίας ή της δημογραφίας κλπ.).

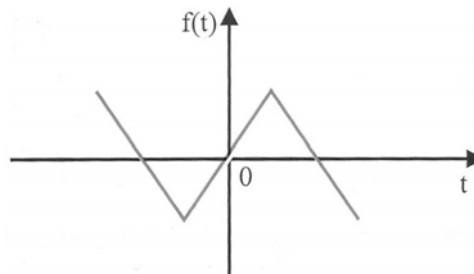
Ως προς τη συμμετρία τους τα διακρίνουμε επίσης ως:

Άρτια σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με άρτιες συναρτήσεις του χρόνου και ισχύει $f(t)=f(-t)$, $\forall t$. Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι αυτά τα σήματα έχουν ως άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα y .



Εικόνα 13. Γραφική παράσταση άρτιου σήματος

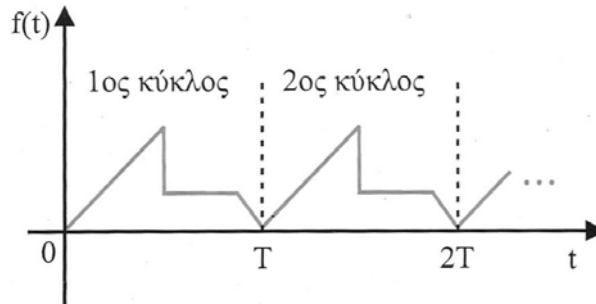
Περιττά σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με περιττές συναρτήσεις του χρόνου και ισχύει $f(t)=-f(-t)$, $\forall t$. Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι αυτά τα σήματα έχουν ως κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



Εικόνα 14. Γραφική παράσταση περιττού σήματος

Ως προς την περιοδικότητά τους τα διακρίνουμε ως:

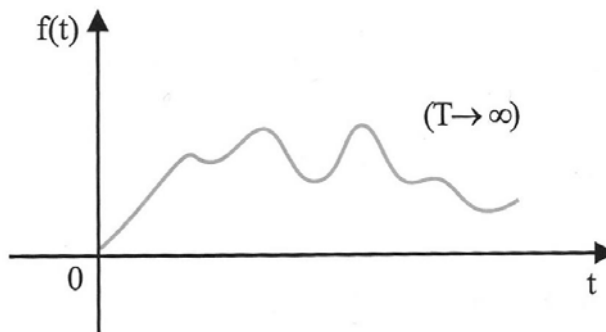
Περιοδικά σήματα είναι τα σήματα που περιγράφονται με περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, όπου ισχύει $f(t)=f(t+T)$, $\forall t$ και $T>0$, όπου η περίοδος T αποτελεί το χρονικό διάστημα στο οποίο το σήμα παίρνει όλες τις τιμές.



Εικόνα 15. Γραφική παράσταση περιοδικού σήματος

Το τμήμα του περιοδικού σήματος που ολοκληρώνεται κι επαναλαμβάνεται ονομάζεται κύκλος και ο χρόνος που απαιτείται, για να γίνει αυτό, δεν είναι άλλος από τον T . Η συχνότητα f δεν είναι άλλη από το πλήθος των κύκλων στη μονάδα του χρόνου.

Απεριοδικά σήματα είναι τα σήματα τα οποία περιγράφονται με μη περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου.



Εικόνα 16. Γραφική παράσταση μη περιοδικού σήματος

Ως προς το πεδίο τιμών τους τα διακρίνουμε επίσης ως:

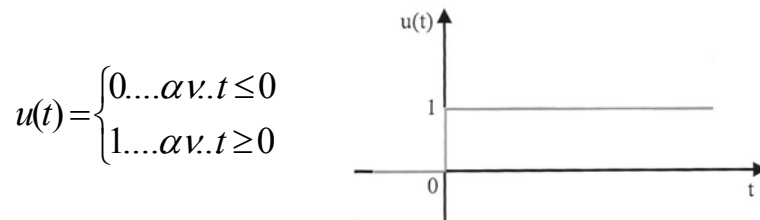
Αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά σήματα είναι τα σήματα που υπακούουν σε κάποιο καθορισμένο μαθηματικό τύπο (μαθηματοποίηση των σημάτων, οπότε μπορούν να μελετηθούν καλύτερα μέσω των

μαθηματικών μοντέλων και λογικών) και εκφράζονται ως μια συνάρτηση ή ακολουθία, μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, έτσι ώστε σε κάθε τιμή του χρόνου να αντιστοιχεί και μοναδική τιμή του σήματος.

Στατιστικά ή στοχαστικά ή τυχαία σήματα είναι τα σήματα των οποίων η μεταβολή γίνεται κατά τυχαίο τρόπο και δεν υπακούει σε κάποιο μαθηματικό τύπο και έτσι η τιμή τους κάθε χρονική στιγμή είναι τυχαία.

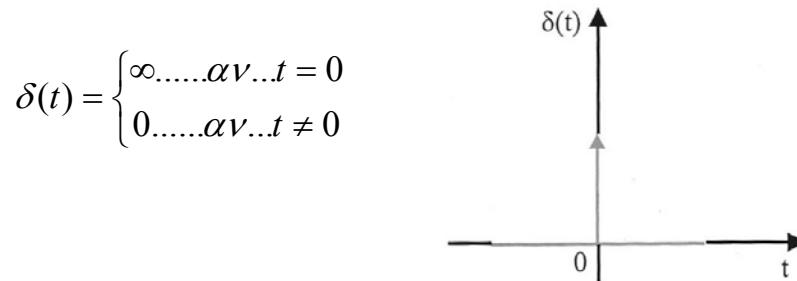
4.2 Στοιχειώδη σήματα

Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function) $u(t)$



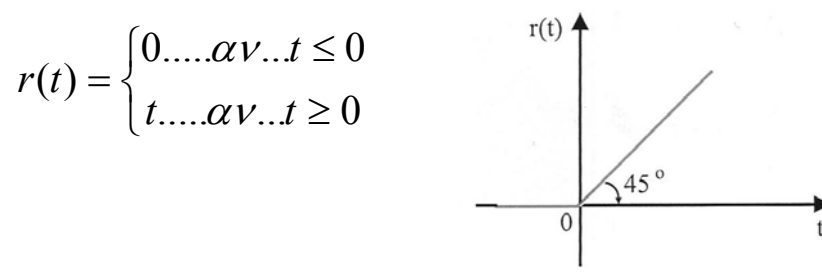
Εικόνα 17. Γραφική παράσταση μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (unit impulse function) $\delta(t)$



Εικόνα 18. Γραφική παράσταση μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης

Μοναδιαία αναρριχητική συνάρτηση (unit ramp function) $r(t)$



Εικόνα 19. Γραφική παράσταση μοναδιαίας αναρριχητικής συνάρτησης

Παρατήρηση: Μεταξύ των παραπάνω συναρτήσεων ισχύει:

$$[r(t)]' = u(t)$$

$$\text{Και } [u(t)]' = \delta(t)$$

Αρμονικό σήμα (ή τριγωνομετρικό σήμα)

Μία άλλη κατηγορία σημάτων, που έχουν ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, είναι τα αρμονικά σήματα. Ένα σήμα της κατηγορίας αυτής είναι κάθε σήμα της μορφής:

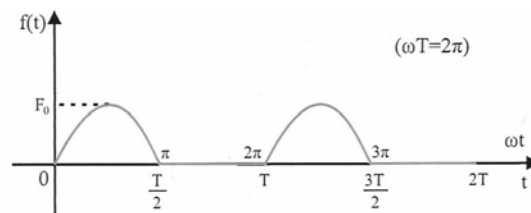
$$f(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} = \cos(2\pi f_0 t + \theta) + j\sin(2\pi f_0 t + \theta) \quad (4.1)$$

Επειδή η συνάρτηση $f(t)$ είναι μιγαδική, σημαντικό ρόλο παίζουν τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό της μέρος.

Τόσο τα αρμονικά σήματα όσο και το πραγματικό-φανταστικό τους μέρος είναι περιοδικά σήματα με περίοδο $T = \frac{1}{f_0}$.

Ημιανορθωμένο ημιτονικό σήμα

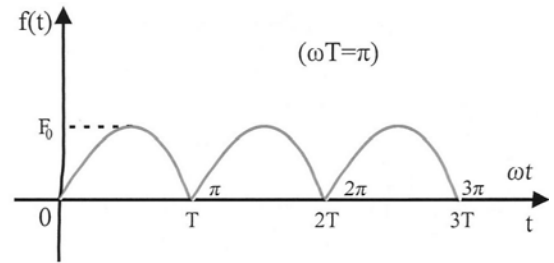
$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t \dots\dots, 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 \dots\dots, \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$



Εικόνα 20. Γραφική παράσταση ημιανορθωμένου ημιτονικού σήματος

Πλήρως ανορθωμένο ημιτονικό σήμα

$$f(t) = F_0 \sin \omega t, \dots \dots 0 \leq t \leq T$$



Εικόνα 21. Γραφική παράσταση πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος

Εκθετικά σήματα

Τα σήματα αυτά αποτελούν μια πολύ σημαντική κατηγορία σημάτων και έχουν γενικά τη μορφή:

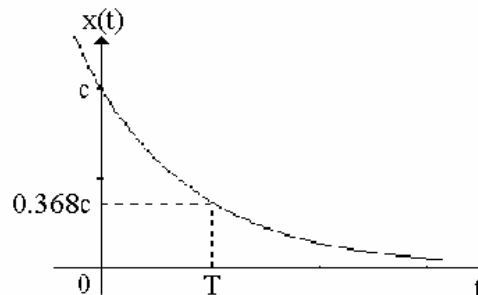
$$x(t) = ce^{st} \quad (4.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η σταθερά s μπορεί να έχει τιμές πραγματικές (θετικές ή αρνητικές) ή μιγαδικές, διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

α) s αρνητικός και πραγματικός

$$\text{Αν } s = -\frac{1}{T} \quad (T > 0), \quad \text{τότε } x(t) = ce^{-\frac{t}{T}} \quad (4.3)$$

και το σήμα έχει τη μορφή που φαίνεται και στην Εικόνα 22. Η σταθερά T ονομάζεται σταθερά χρόνου και δίνει το ρυθμό ελάττωσης του σήματος. Συγκεκριμένα, $x(T) = 0,368c$, ενώ $x(5T) = 0,0067c$, οπότε κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι μετά από χρόνο $t = 5T$, το σήμα είναι αμελητέο.

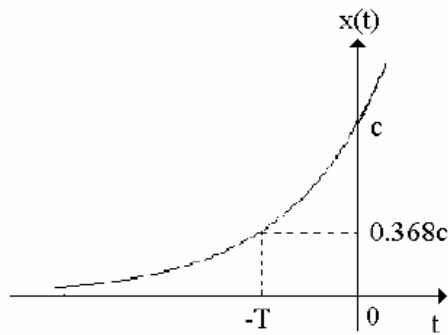


Εικόνα 22. Γραφική παράσταση εκθετικού σήματος με s αρνητικό και πραγματικό

β) s θετικός και πραγματικός

$$\text{Αν } s = \frac{1}{T}, \quad \text{τότε } x(t) = ce^{\frac{t}{T}} \quad (4.4)$$

και το σήμα έχει τη μορφή που φαίνεται στην Εικόνα 23. Τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης.



Εικόνα 23. Γραφική παράσταση εκθετικού σήματος με s θετικό και πραγματικό

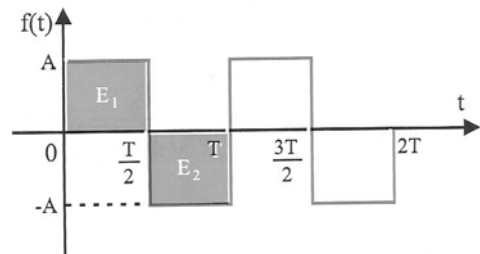
γ) s μιγαδικός

$$\text{Αν } s = i\omega, \quad \text{τότε } x(t) = ce^{i\omega t} = c(\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (4.5)$$

και το σήμα αυτό είναι στην ουσία ένα «μιγαδικό ημιτονοειδές σήμα» με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Είναι προφανές ότι το μέτρο του $x(t)$ είναι ίσο με $|c|$.

Τετραγωνικός παλμός

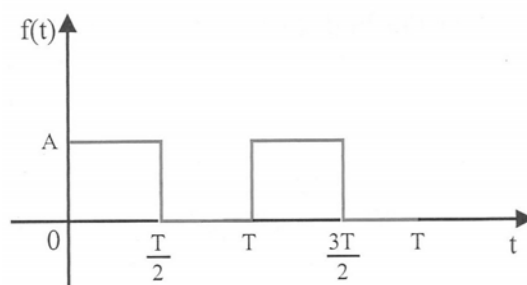
$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \left(\frac{T}{2}\right)^- \\ -A, & \left(\frac{T}{2}\right)^+ \leq t \leq T^- \end{cases}$$



Εικόνα 24. Τετραγωνικός παλμός

Θετικός τετραγωνικός παλμός

$$f(t) = \begin{cases} A \dots\dots\dots, & 0^+ \leq t \leq \left(\frac{T}{2}\right)^- \\ 0 \dots\dots\dots, & \left(\frac{T}{2}\right)^- \leq t \leq T^- \end{cases}$$



Εικόνα 25.Θετικός τετραγωνικός παλμός

Η συνάρτηση δειγματοληψίας

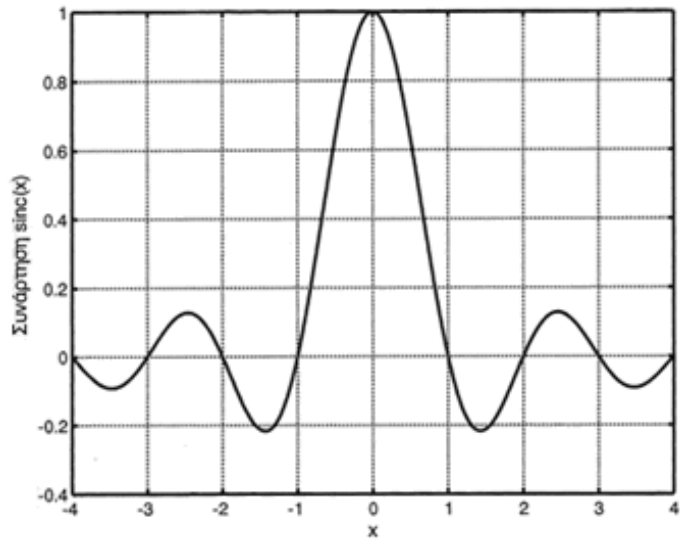
Μια συνάρτηση με ιδιαίτερα πρακτικό ενδιαφέρον είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας, η οποία συνήθως συμβολίζεται με $Sa(t)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (4.6)$$

ή πιο γενικά
$$Sa(at) = \frac{\sin at}{at} \quad (4.7)$$

και η μορφή της δίνεται στην Εικόνα 26. Η συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(t)$ είναι άρτια συνάρτηση, με απόλυτη μέγιστη τιμή στο μηδέν $Sa(0) = 1$, ενώ μηδενίζεται στα σημεία $t = \pm n\pi (n = 1, 2, \dots)$. Τέλος, τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης δειγματοληψίας παρουσιάζονται στο μέσο περίπου των αποστάσεων μεταξύ των σημείων μηδενισμού, δηλαδή στα σημεία $t_n = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$, για τα οποία ισχύει $|\sin t_n| = 1$. Η προσέγγιση αυτή γίνεται ακριβέστερη καθώς το t_n απομακρύνεται από το μηδέν, ενώ οι τιμές της συνάρτησης στις θέσεις των τοπικών ακρότατων δίνονται προσεγγιστικά από τη σχέση:

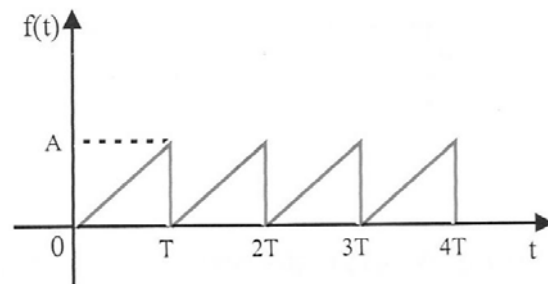
$$Sa\left[\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \quad (4.8)$$



Εικόνα 26. Γραφική παράσταση συνάρτησης δειγματοληψίας

Πριονωτό σήμα

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t \dots 0 \leq t \leq T$$



Εικόνα 27. Πριονωτό σήμα

4.3 Χαρακτηριστικές τιμές σημάτων

Μέση τιμή

Σε αναλογικά σήματα η μέση τιμή ορίζεται ως:

$$f_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad (4.9)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί με το εμβαδό του σήματος στο συγκεκριμένο διάστημα, η μέση τιμή ορίζεται επίσης και ως:

$$f_{av} = \frac{\text{Εμβαδό...σήματος...στο...διάστημα...}[\alpha, b]}{b-a} \quad (4.10)$$

λαμβάνοντας θετικές τις τιμές που βρίσκονται επάνω από τον άξονα του t και αρνητικές τις τιμές που βρίσκονται κάτω από αυτόν.

Αν τώρα το σήμα είναι αναλογικό περιοδικό, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται :

$$f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (4.11)$$

$$\text{Ή ισοδύναμα } f_{av} = \frac{\text{Εμβαδό περιόδου}}{T} \quad (4.12)$$

Σε ψηφιακά σήματα η μέση τιμή ορίζεται ως εξής:

$$f_{av} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k}{n} \quad (4.13)$$

Όπου $f_k = f(t_k)$ για $K=1,2,3,\dots,n$ είναι οι τιμές του σήματος στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές t_k .

Ενεργός τιμή

Στην περίπτωση του αναλογικού σήματος η ενεργός τιμή του ορίζεται από τη σχέση (4.14):

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \quad (4.14)$$

στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $[a,\beta]$.

Στην περίπτωση που το σήμα είναι αναλογικό περιοδικό, η αντίστοιχη σχέση είναι:

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (4.15)$$

Στην περίπτωση του ψηφιακού σήματος η ενεργός τιμή του ορίζεται από τη σχέση (4.16):

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k^2} \quad (4.16)$$

Όπου $f_k = f(t_k)$ για $K=1,2,3,\dots,n$ είναι οι τιμές του σήματος στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές t_k .

Ενέργεια και ισχύς

Στην περίπτωση του αναλογικού σήματος η ενέργεια ορίζεται από τη σχέση:

$$E_{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (4.17)$$

Και η μέση ισχύς ορίζεται από τη σχέση (4.18):

$$P_{\sigma} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (4.18)$$

Στην περίπτωση του ψηφιακού σήματος η ενέργεια ορίζεται από τη σχέση (4.19)

$$E_{\delta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (4.19)$$

Και η μέση ισχύς από τη σχέση (4.20):

$$P_{\delta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (4.20)$$

Σήμα ενέργειας → πεπερασμένη ενέργεια ($0 < E < \infty$)

Σήμα ισχύος → πεπερασμένη ισχύς ($0 < P < \infty$)

Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ, ενώ ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

4.4 Τεχνικές μετάδοσης

Τα σήματα όπως είδαμε προηγουμένως διακρίνονται σε αναλογικά, όπως η φωνή, και σε ψηφιακά, όπως τα data των υπολογιστών. Ένα από τα σπουδαιότερα θέματα των τηλεπικοινωνιών είναι οι τεχνικές μετάδοσης αυτών των σημάτων πληροφορίας μέσα από τα διατιθέμενα κανάλια μετάδοσης. Τα κανάλια μετάδοσης είναι τέτοια που δεν επιτρέπουν την αυτούσια μετάδοση των σημάτων πληροφορίας χωρίς κάποια ιδιαίτερη επεξεργασία. Αυτή η επεξεργασία του σήματος πληροφορίας, που το καθιστά κατάλληλο για διέλευση από το κανάλι, ονομάζεται διαμόρφωση.

Η σκοπιμότητα της χρήσης τεχνικών μετάδοσης είναι αφενός η βέλτιστη χρήση των δυνατοτήτων μιας τηλεπικοινωνιακής ζεύξης (ιδιαίτερα του διαθέσιμου εύρους ζώνης του καναλιού) και αφετέρου η προστασία των

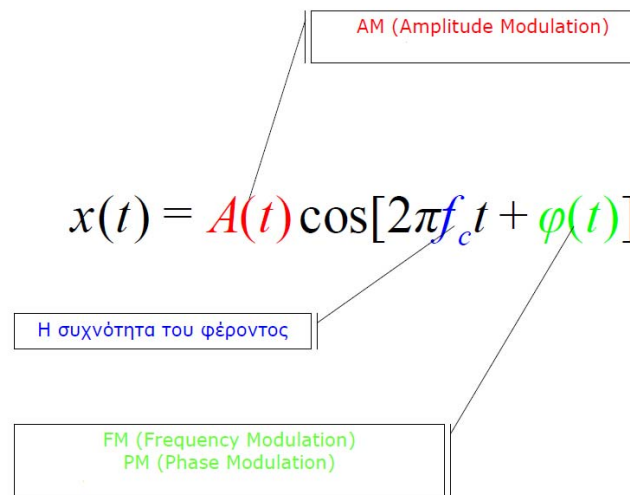
μεταδιδόμενων σημάτων έναντι των επιδράσεων του θορύβου.

Οι κυριότερες τεχνικές μετάδοσης είναι:

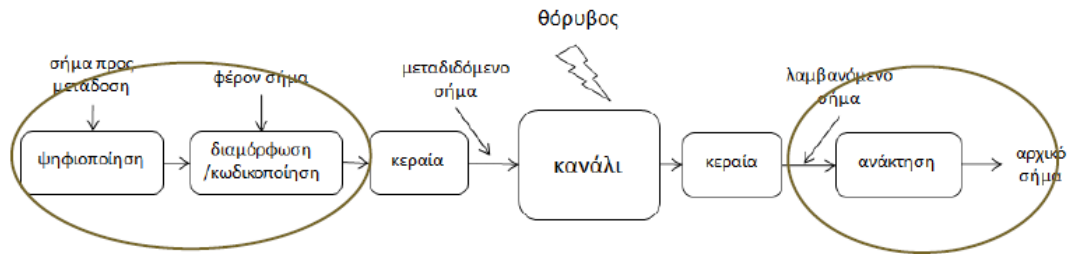
- Η διαμόρφωση (modulation)
- Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion -ADC-)
- Η Πολυπλεξία

4.4.1 Η διαμόρφωση (modulation)

Στα περισσότερα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, το αναλογικό ή το ψηφιακό σήμα πληροφορίας $x(t)$ ή $m(t)$ δε διοχετεύεται «αυτούσιο» στο μέσο μετάδοσης, αλλά διαμορφώνει (με τη βοήθεια ενός διαμορφωτή) το πλάτος A_c , τη συχνότητα f_c ή τη φάση φ_c ενός υψίσυχνου ημιτονοειδούς «φέροντος» (που παρέχει ο διαμορφωτής) της μορφής:

$$x(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \varphi_c]$$


Αντίστοιχα, η διαμόρφωση χαρακτηρίζεται ως διαμόρφωση πλάτους, συχνότητας ή φάσης. Έτσι το σήμα, που τελικά μεταδίδεται, δεν είναι το $m(t)$ αυτό καθαυτό, αλλά ένα σύνθετο (διαμορφωμένο) σήμα $s(t)$, στο οποίο εμπεριέχεται η αρχική πληροφορία. Ο δέκτης λαμβάνει το σύνθετο αυτό σήμα και μέσω του αποδιαμορφωτή εξάγει το αρχικό (αναλογικό ή ψηφιακό) σήμα πληροφορίας $m(t)$.



Εικόνα 28. Σχηματικό διάγραμμα διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης σημάτων

Παρ' όλο που συνήθως το «σύνθετο» σήμα $s(t)$ καταλαμβάνει μεγαλύτερο εύρος ζώνης από ότι το (αρχικό) σήμα πληροφορίας $m(t)$, η διαμόρφωση διευκολύνει την υλοποίηση των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων (π.χ. η κατασκευή κεραιών για την απευθείας μετάδοση ηλεκτρικών σημάτων είναι εξαιρετικά δύσκολη ως αδύνατη) και καθιστά δυνατή την «ταυτόχρονη» μετάδοση σημάτων μέσω της τεχνικής της πολυπλεξίας.

Η χρήση της διαμόρφωσης είναι υποχρεωτική για τις ραδιοζεύξεις και τις ζεύξεις οπτικών ινών, ενώ στα καλωδιακά συστήματα χρησιμοποιείται σπανιότερα.

Διαμόρφωση Πλάτους AM

Η διαμόρφωση πλάτους AM (Amplitude Modulation) υπήρξε η παλαιότερη και απλούστερη μέθοδος για τη μετάδοση αναλογικών σημάτων. Η ραδιοφωνία και η τηλεόραση στηρίχτηκαν στη διαμόρφωση AM. Ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα φορέα που περιγράφεται από τη σχέση :

$$S(t) = A \sigma \nu (\omega t + \varphi)$$

όπου:

A : το πλάτος του σήματος

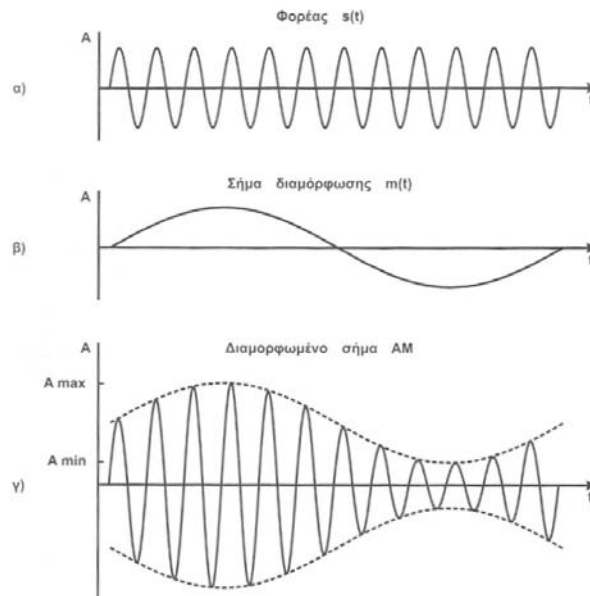
ω : η συχνότητα

φ : η φάση

$m(t)$: το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Ως διαμόρφωση πλάτους ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία το πλάτος A του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το σήμα $m(t)$ γύρω από μια μέση

τιμή. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 29), ο φορέας $S(t)$ που είναι συνήθως ένα σήμα υψηλής συχνότητας, διαμορφώνεται από το μικρότερης συχνότητας σήμα $m(t)$ και το τελικά διαμορφωμένο AM σήμα φαίνεται παρακάτω. Σαν παράδειγμα, το σήμα $m(t)$ μπορεί να είναι η φωνή του εκφωνητή ενός ραδιοφωνικού σταθμού, ενώ το $S(t)$ η ραδιοσυχνότητα στην περιοχή των μακρών, μεσαίων ή βραχέων κυμάτων.

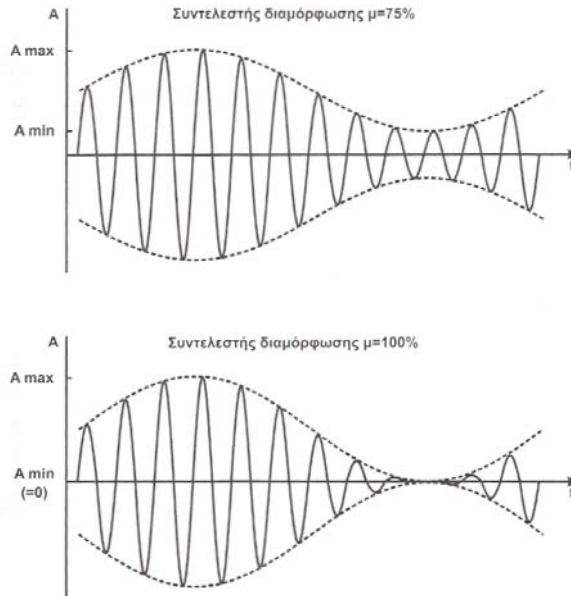


Εικόνα 29. Διαμόρφωση πλάτους

Αν ονομάσουμε A_{min} και A_{max} το μικρότερο και μεγαλύτερο πλάτος αντίστοιχα του διαμορφωμένου σήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα γ της Εικόνας 29, τότε ο λόγος

$$\mu = (A_{max} - A_{min}) / (A_{max} + A_{min})$$

ονομάζεται συντελεστής διαμόρφωσης (modulation factor) και εκφράζεται σε ποσοστό % ή σαν καθαρός αριθμός. Ο συντελεστής διαμόρφωσης στη ραδιοφωνία είναι συνήθως μικρότερος της μονάδας. Παρακάτω, στο πρώτο σχήμα ο συντελεστής διαμόρφωσης είναι 75% ενώ στο δεύτερο είναι 100%.



Εικόνα 30. Συντελεστής διαμόρφωσης AM

Στο πεδίο συχνότητας, το AM σήμα αποτελείται από τη συχνότητα του φορέα και τις συχνότητες του σήματος πληροφορίας, μετατοπισμένες σε δύο πλευρικές περιοχές συχνοτήτων πάνω και κάτω από το φορέα. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται πάνω και κάτω πλευρική ζώνη USB - LSB (Upper-Lower Side Band). Το εύρος ζώνης BW (Bandwidth) του AM διαμορφωμένου σήματος είναι

$$BW = 2f_m$$

όπου f_m : η μέγιστη συχνότητα του σήματος πληροφορίας $m(t)$.

Διαμόρφωση Συχνότητας FM

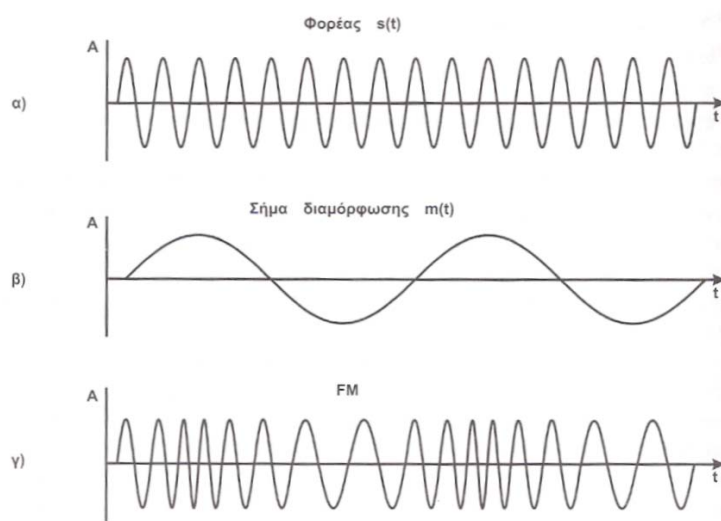
Η διαμόρφωση συχνότητας (frequency modulation) αναπτύχθηκε από τον Edward Armstrong τη δεκαετία 1930-1940. Λόγω της καλύτερης συμπεριφοράς στο θόρυβο και της μεγαλύτερης πιστότητας στη μετάδοση από την AM, χρησιμοποιείται σήμερα για εκπομπές ποιότητας στη ραδιοφωνία FM και για μετάδοση ήχου στην τηλεόραση.

Έστω ο φορέας που περιγράφεται από την σχέση :

$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

όπου A το πλάτος του σήματος, ω η συχνότητα, ϕ η φάση και $m(t)$ το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Διαμόρφωση συχνότητας ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία η συχνότητα ω του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το πλάτος του σήματος $m(t)$ γύρω από μια μέση τιμή. Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 31) φαίνεται ο φορέας $S(t)$, που είναι συνήθως ένα σήμα υψηλής συχνότητας, και το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας $m(t)$ χαμηλότερης συχνότητας που διαμορφώνει το φορέα. Το κατά συχνότητα διαμορφωμένο σήμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 31).



Εικόνα 31. Διαμόρφωση FM

Το $m(t)$ μπορεί, παραδείγματος χάριν, να είναι η φωνή ή η μουσική μιας ραδιοφωνικής εκπομπής και το $S(t)$ το αντίστοιχο ραδιοφωνικό σήμα FM. Η συχνότητα του φορέα $f_s = \omega / 2\pi$ μεταβάλλεται ανάλογα με το πλάτος του σήματος $m(t)$.

Ονομάζουμε απόκλιση συχνότητας Δf_s (frequency deviation) του σήματος FM, τη μέγιστη μεταβολή συχνότητας του φορέα. Για τη ραδιοφωνία FM έχει καθιερωθεί μέγιστη απόκλιση συχνότητας Δf_s τα 75 KHz. Για το σήμα

FM που μεταφέρει τον ήχο σε ένα τηλεοπτικό κανάλι η απόκλιση είναι 50 KHz.

Αν υποθέσουμε ότι f_m είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος διαμόρφωσης $m(t)$, τότε το πηλίκο

$$B = \Delta f_s / f_m$$

ονομάζεται δείκτης διαμόρφωσης (modulation index) του σήματος FM.

Στη μαθηματική ανάλυση, που είναι αρκετά σύνθετη και δεν είναι του παρόντος, γίνεται χρήση ανάλυσης Fourier. Η ουσία της ανάλυσης είναι ότι το διαμορφωμένο σήμα $S(t)$ αποτελείται από άπειρες αρμονικές συνιστώσες, το πλάτος των οποίων φθίνει όσο απομακρυνόμαστε από το φορέα. Το πλάτος των αρμονικών καθίσταται αμελητέο σε συχνότητες που απέχουν πολύ από τη συχνότητα του φορέα.

Ένας πρακτικός τύπος, που μας δίνει το εύρος συχνοτήτων BW (bandwidth) του σήματος FM, στο οποίο είναι συγκεντρωμένη περισσότερο απ'το 95% της ολικής ενέργειας του σήματος, είναι:

$$BW = 2(\Delta f_s + f_m)$$

όπου:

BW : εύρος συχνοτήτων (Hz).

Δf_s : απόκλιση συχνότητας του φορέα.

f_m : μέγιστη συχνότητα του σήματος πληροφορίας.

Ισοδύναμα, αν γνωρίζουμε το δείκτη διαμόρφωσης β τότε το εύρος συχνοτήτων είναι: $BW = 2f_s (1 + 1/\beta)$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το εύρος συχνοτήτων (BW) του σήματος FM που εκπέμπεται από το Β' Πρόγραμμα της Ελληνικής Ραδιοφωνίας (ΕΡΑ2) στα 93,6 MHz, όταν εκπέμπει μουσική εκπομπή με φάσμα 15 KHz.

Στη ραδιοφωνία χρησιμοποιείται απόκλιση συχνότητας $\Delta f = 75 \text{ KHz}$, οπότε

έχουμε $BW = 2(75+15) = 180\text{KHz}$. Συνεπώς το φάσμα του σήματος FM βρίσκεται στην περιοχή 93,510 έως 93,690 MHz. Παρατηρούμε ότι το BW ενός σήματος FM είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ενός σήματος AM, που στο παράδειγμα μας θα ήταν 30KHz έναντι των 180 KHz του FM. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τον περιορισμό του αριθμού καναλιών FM που μπορούν να λειτουργούν ταυτόχρονα σε μια περιοχή συχνοτήτων.

Αντισταθμιστικός παράγοντας του γεγονότος αυτού στην πράξη είναι ότι, επειδή οι σταθμοί FM χρησιμοποιούν φορείς με υψηλές συχνότητες, κοντά στα 100 MHz, η εμβέλειά τους είναι μικρή, της τάξης των 100 χλμ., και έτσι δύο σταθμοί σε διαφορετικά γεωγραφικά σημεία μπορούν να χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα χωρίς πρόβλημα παρεμβολών.

Διαμόρφωση Φάσης PM

Μια παραλλαγή της διαμόρφωσης συχνότητας είναι η διαμόρφωση φάσης PM (Phase Modulation). Την ονομάζουμε παραλλαγή, επειδή έχει εξαιρετικές ομοιότητες με τη διαμόρφωση συχνότητας.

Έστω $S(t) = A\sigma\upsilon\upsilon(\omega t + \varphi)$ το σήμα-φορέας που πρόκειται να διαμορφωθεί, όπου:

A : το πλάτος του.

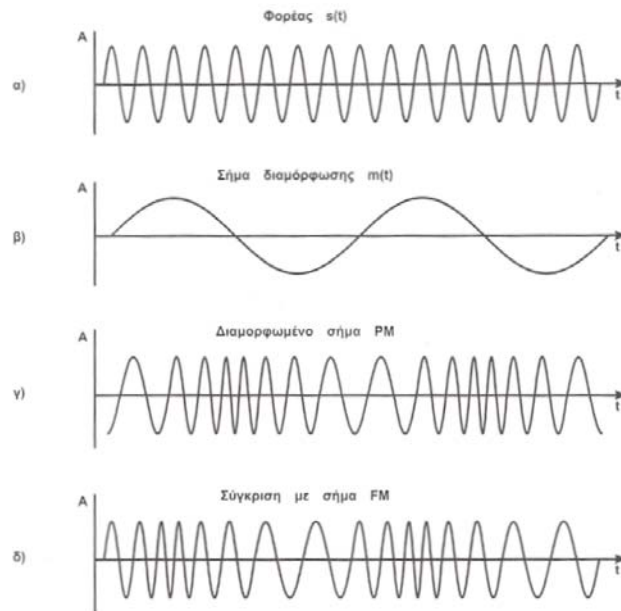
ω : η συχνότητα

φ : η φάση του

$m(t)$: το προς μετάδοση σήμα πληροφορίας.

Ορίζεται ως διαμόρφωση φάσης η διαδικασία κατά την οποία η φάση φ του φορέα μεταβάλλεται γραμμικά με το πλάτος του σήματος $m(t)$ γύρω από μια μέση τιμή.

Η ομοιότητα με τη διαμόρφωση συχνότητας ευρίσκεται στο ότι είτε μεταβάλλουμε την γωνιακή συχνότητα ω είτε τη φάση φ , αυτό που τελικά αλλάζει είναι η συνολική γωνία $\omega t + \varphi$ της σχέσης. Το κατά φάση διαμορφωμένο σήμα PM, που δημιουργείται από το φορέα $S(t)$ και το σήμα $m(t)$, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 32).



Εικόνα 32. Διαμόρφωση φάσης

Αποδεικνύεται ότι ένα σήμα FM μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σήμα PM, του οποίου το σήμα διαμόρφωσης είναι, όχι το $m(t)$, αλλά το ολοκλήρωμα του $m(t)$. Στην πράξη, για να δημιουργήσουμε το ολοκλήρωμα του $m(t)$, αρκεί να το περάσουμε μέσα από ένα κατωδιαβατό φίλτρο (Low pass filter).

4.4.2 Η μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (Analog-to-Digital Conversion -A/D-)

Μέσω της μετατροπής αυτής (που γίνεται από ειδική μονάδα του πομπού), το αρχικό αναλογικό σήμα πληροφορίας $m(t)$ μετατρέπεται σε ψηφιακή παλμοσειρά $m_D(t)$. Βασικό πλεονέκτημα της ψηφιακοποίησης των σημάτων είναι η αυξημένη ατρωσία τους έναντι των επιδράσεων του θορύβου και η ευκολία επεξεργασίας τους. Η τεχνική ψηφιακοποίησης, που σχεδόν κατ' αποκλειστικότητα χρησιμοποιείται στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, είναι η παλμοκωδική διαμόρφωση (Pulse Code Modulation ή PCM).

Παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM)

Είναι γνωστή ως PCM (Pulse Code Modulation). Τα βασικά στάδια της PCM είναι η δειγματοληψία (sampling), η κβάντιση (quantisation) και η κωδικοποίηση (encoding). Πέραν αυτών, κατά την παλμοκωδική διαμόρφωση ενός αναλογικού σήματος μπορεί να εφαρμοστεί η διεργασία της "συμπίεσης" (compranding), προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η κβάντιση του σήματος, καθώς και η "κωδικοποίηση γραμμής" (line coding) για την προσαρμογή του σήματος PCM στις απαιτήσεις του μέσου μετάδοσης. Τέλος, ένας αριθμός σημάτων PCM μπορούν να πολυπλεχθούν (και να μεταδοθούν ταυτόχρονα) μέσω της τεχνικής "πολυπλεξίας διαίρεσης χρόνου" (συντομογραφικά TDM).

Μετά τη δειγματοληψία, που υφίσταται το αναλογικό σήμα, για κάθε δείγμα μεταδίδεται μια ακόμη ακολουθία (bit), που περιέχει κωδικοποιημένο το πλάτος του αναλογικού σήματος. Ο αριθμός των bit, που μεταδίδεται για κάθε δείγμα, είναι σταθερός (συνήθως 8), η δυαδική τιμή όμως της σειράς των bit αυτών μας δίνει την τιμή του πλάτους του αναλογικού σήματος τη στιγμή της δειγματοληψίας.

Πριν προχωρήσουμε, θα γίνει μια μικρή αναφορά στη δειγματοληψία (μεγαλύτερη ανάλυση γίνεται στο κεφάλαιο 8), αφού πρώτα αναφερθούμε στο σημαντικό θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, ο οποίος θεωρείται πατέρας της Θεωρίας Πληροφοριών.

Θεώρημα Δειγματοληψίας

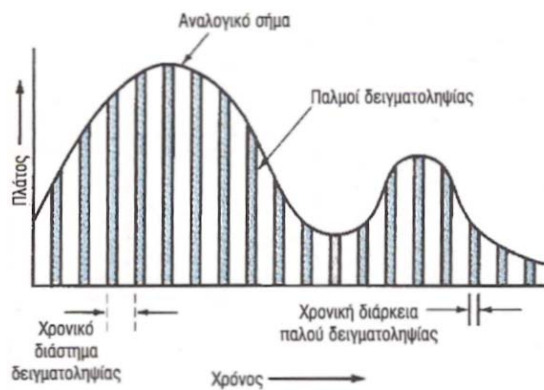
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αναλογικό σήμα πληροφορίας $S(t)$ περιορισμένης ζώνης συχνοτήτων και ότι f_{\max} είναι η μεγαλύτερη συχνότητα που υπάρχει στο φάσμα του.

Το θεώρημα λέει ότι αν πάρουμε δείγματα πλάτους του σήματος σε κανονικά χρονικά διαστήματα, με ρυθμό δειγματοληψίας μεγαλύτερο από $2 \cdot f_{\max}$, τα δείγματα περιέχουν όλη την πληροφορία του αρχικού σήματος $S(t)$. Κατά συνέπεια μπορούμε να ξαναδημιουργήσουμε το αρχικό σήμα $S(t)$ αν επεξεργασθούμε κατάλληλα τα δείγματα αυτά. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα, αντί να μεταδίδουμε ολόκληρο το σήμα $S(t)$ από ένα

επικοινωνιακό κανάλι, να μεταδώσουμε μόνο τα δείγματα, που προέκυψαν από τη διαδικασία της δειγματοληψίας, και να ανασυνθέσουμε το σήμα $S(t)$ στην πλευρά του δέκτη. Η ανασύνθεση γίνεται στην πράξη με το να περάσουμε το σήμα της δειγματοληψίας από ένα κατωδιαβατό φίλτρο (low pass filter).

Παράδειγμα για το θεώρημα αυτό του Shannon: η απαραίτητη συχνότητα δειγματοληψίας σήματος φωνής με υψηλότερη συχνότητα 4 KHz είναι τα 8 KHz, ενώ σήματος video με μέγιστη συχνότητα 4,6 MHz είναι τα 9,2 MHz.

Το σήμα της δειγματοληψίας είναι πολύ στενοί παλμοί, των οποίων το πλάτος είναι ανάλογο με αυτό του αναλογικού σήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 33).



Εικόνα 33. Δειγματοληψία

Κάτι που είναι πολύ σημαντικό στη διαδικασία της δειγματοληψίας και πρέπει να τονίσουμε, είναι ότι το αναλογικό σήμα πληροφορίας $S(t)$ πρέπει να είναι περιορισμένου εύρους ζώνης συχνοτήτων. Αν δεν είναι πριν γίνει η δειγματοληψία, πρέπει να περάσει από κατωδιαβατό φίλτρο, ώστε να μην υπάρχουν στο φάσμα του συχνότητες μεγαλύτερες από το 1/2 της συχνότητας δειγματοληψίας. Το φίλτρο αυτό είναι γνωστό σαν φίλτρο προστασίας αναδίπλωσης συχνοτήτων (antialiasing filter).

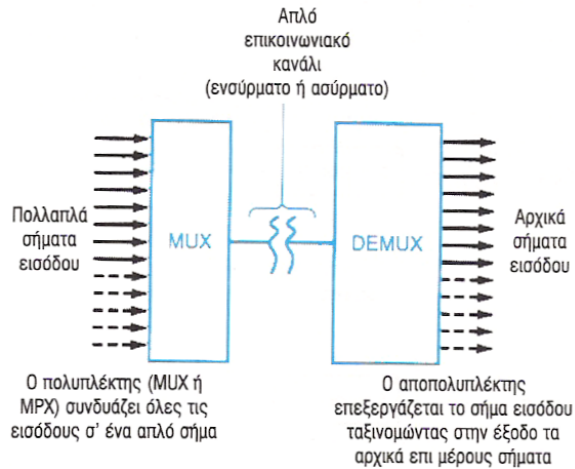
Αν αυτή η διαδικασία φιλτραρίσματος στον πομπό δεν ακολουθηθεί, τότε αποδεικνύεται ότι κατά την ανασύνθεση του σήματος στο δέκτη, οι συχνότητες του φάσματος που ήταν μεγαλύτερες από το 1/2 της

συχνότητας δειγματοληψίας αναδιπλώνονται και εμφανίζονται μέσα στη χρήσιμη περιοχή του φάσματος του αναλογικού σήματος. Το εξαγόμενο σήμα παραμορφώνεται και η παραμόρφωση αυτή είναι γνωστή σαν παραμόρφωση αναδίπλωσης (aliasing ή Foldover distortion).

4.4.3 Η Πολυπλεξία

Ο όρος "πολυπλεξία" (multiplexing) αναφέρεται στην ταυτόχρονη μετάδοση περισσοτέρων από ένα σημάτων μέσα από το ίδιο τηλεπικοινωνιακό μέσο (χάλκινο καλώδιο, οπτικό καλώδιο κλπ.).

Στην πράξη, αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση διαφόρων τεχνικών για την πολυπλεξία σημάτων, όπως η "πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας" (Frequency-Division Multiplexing, συντομογραφικά FDM) και η "πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου" (Time-Division Multiplexing, συντομογραφικά TDM). Η πρώτη (FDM) αφορά την αναλογική μετάδοση και συνίσταται στην εκχώρηση σε κάθε ένα από τα μεταδιδόμενα σήματα μιας ιδιαίτερης ζώνης συχνοτήτων (μέσω της διαμόρφωσης διαφορετικού φέροντος από κάθε αναλογικό σήμα), ενώ η δεύτερη (TDM) αφορά την ψηφιακή μετάδοση και συνίσταται στη διάθεση σε κάθε ένα από τα αρχικά αναλογικά σήματα πληροφορίας μιας ιδιαίτερης "χρονοθυρίδας", που χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του. Τόσο η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας όσο και η πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου γίνονται κατά οργανωμένο και τυποποιημένο τρόπο, προκειμένου να εξασφαλίζεται η μέγιστη δυνατή συμβατότητα μεταξύ διατάξεων από διαφορετικούς κατασκευαστές.

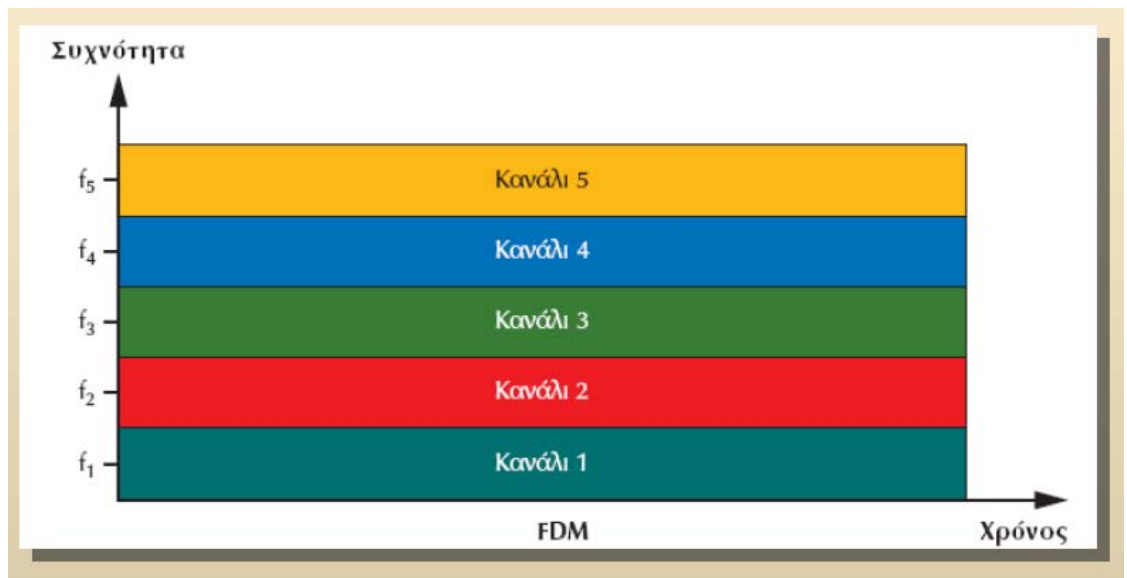


Εικόνα 34. Πολυπλεξία

Για παράδειγμα στα αναλογικά τηλεφωνικά δίκτυα, για να αυξηθεί η χωρητικότητα τους, χρησιμοποιήθηκαν τα λεγόμενα "φερέσυχνα" συστήματα, μέσω των οποίων ήταν δυνατή η ταυτόχρονη μετάδοση τηλεφωνικών σημάτων με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας. Έτσι, για τη μετάδοση 12 τηλεφωνικών σημάτων κάθε ένα από αυτά διαμόρφωνε ένα ξεχωριστό φέρον (συχνότητες φερόντων: 60, 64, ... 104 kHz), με αποτέλεσμα τα 12 αρχικά σήματα (εύρους ζώνης 0-4 kHz το καθένα) να μεταδίδονται ταυτόχρονα και μέσω του ίδιου καλωδίου, το καθένα σε διαφορετική ζώνη συχνοτήτων (60-64 kHz, 64-68 kHz, ... 104-108 kHz).

Πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM)

Η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) αφορά την αναλογική μετάδοση και συνίσταται στην εκχώρηση μιας ιδιαίτερης ζώνης συχνοτήτων σε κάθε ένα από τα μεταδιδόμενα σήματα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διαμόρφωσης από κάθε αναλογικό σήμα διαφορετικού φέροντος (με τεχνική SSB), που "μεταθέτει" τη ζώνη συχνοτήτων μετάδοσης από τη "βασική ζώνη" (π.χ. 0-4 kHz, για τηλεφωνικό σήμα πληροφορίας) στη ζώνη της συχνότητας του φέροντος (π.χ. 60 - 64 kHz, για φέρον 60 kHz).



Εικόνα 35. FDM

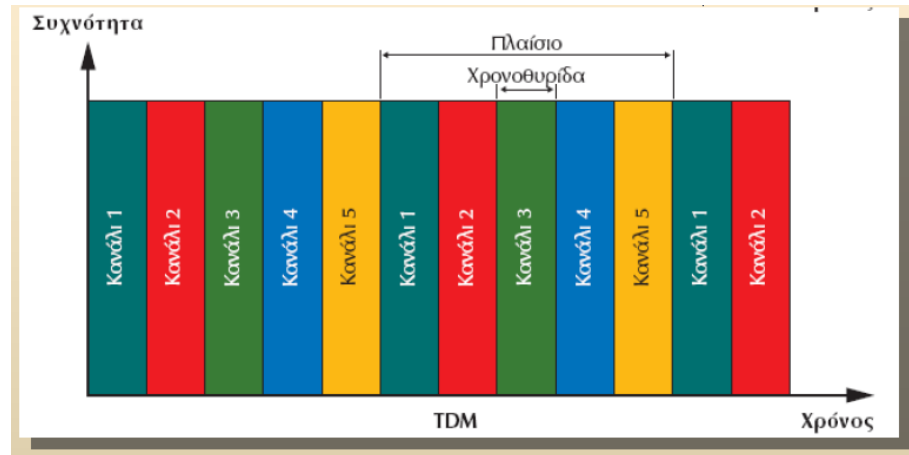
Η πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας εφαρμόστηκε κυρίως στην (αναλογική) τηλεφωνία για την ταυτόχρονη μετάδοση σημάτων μεταξύ των τηλεφωνικών κέντρων (μέσω καλωδιακών ή ραδιοηλεκτρικών ζεύξεων). Λόγω του αναλογικού της χαρακτήρα, η χρήση της σήμερα είναι περιορισμένη και διαρκώς φθίνουσα.

Πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM)

Η πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM) συνίσταται στη διάθεση σε κάθε ένα από τα αρχικά αναλογικά σήματα πληροφορίας μιας ιδιαίτερης "χρονοθυρίδας", που χρησιμοποιείται για τη δειγματοληψία του. Π.χ., για ένα τηλεφωνικό σήμα 0,3-3,4 kHz, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 8000 \text{ δείγματα/s}$, ο χρόνος μεταξύ δύο δειγματοληψιών είναι $T_s = 1/f_s = 125 \mu\text{s}$, οπότε αν για τη λήψη του δείγματος ο δειγματολήπτης απαιτεί μια "χρονοθυρίδα" 4 μs , τότε απομένουν (μέχρι τη λήψη του 2ου δείγματος) 121 μs για τη λήψη δειγμάτων και από άλλα σήματα. Από το παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι ο αριθμός των πολυπλεγμένων σημάτων εξαρτάται από τη διάρκεια της χρονοθυρίδας (δειγματοληψίας), η οποία πρέπει να είναι όσο το δυνατόν συντομότερη. Συνεπώς, είναι σημαντικό να υπάρχουν διατάξεις με πολύ σύντομους χρόνους δειγματοληψίας,

καθώς και ταχείς επιλογείς για τη μετάβαση από το ένα αναλογικό σήμα στο άλλο.

Η παραπάνω τεχνική πολυπλεξίας χαρακτηρίζεται ως πολυπλεξία διαίρεσης χρόνου (TDM). Η TDM είναι οργανωμένη σε ιεραρχικά επίπεδα (διαφορετικά στην Ευρώπη από ότι στις ΗΠΑ), που ονομάζονται τάξεις πολυπλεξίας.



Εικόνα 36. TDM

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=5$.
2. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=t$.
3. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του σήματος $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$.

Κεφάλαιο 5.

Θόρυβος

5.1 Είδη Θορύβου

Ο θόρυβος είναι μια ανεπιθύμητη ενέργεια συνήθως τυχαίου χαρακτήρα, που παρουσιάζεται στο σύστημα μεταφοράς και μπορεί να προκαλείται με οποιοδήποτε τρόπο. Όταν ο θόρυβος είναι έντονος, μπορεί να υπερκαλύψει το σήμα τόσο πολύ που το σήμα να αποδυναμωθεί τόσο ώστε να γίνει πλέον άχρηστο. Τα είδη του θορύβου διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, στον εξωτερικό θόρυβο και τον εσωτερικό θόρυβο.

Ο εξωτερικός θόρυβος δημιουργείται από αιτίες που βρίσκονται εκτός του συστήματος επικοινωνίας, δηλαδή είτε από τον ανθρώπινο είτε γενικότερα από κάποιον εξωγενή παράγοντα. Όπως, για παράδειγμα, τα λεγόμενα βιομηχανικά παράσιτα, τα οποία δημιουργούνται εξαιτίας διάφορων ηλεκτρομηχανικών συσκευών, που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση από το σύστημα. Ακόμη ένα είδος παρασίτων είναι τα ατμοσφαιρικά παράσιτα, που μπορεί να προκληθούν από τις ατμοσφαιρικές εκκενώσεις, δηλαδή από τις ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές που εμφανίζονται στην ατμόσφαιρα κατά την διάρκεια καταιγίδων.

Ο εσωτερικός θόρυβος προκαλείται από το ίδιο το μέσο. Η τυχαία κίνηση

των ηλεκτρονίων σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα καλείται θερμικός θόρυβος. Ακόμη ένα είδος εσωτερικού θορύβου αποτελεί ο θόρυβος βολής, που δημιουργείται στο διάστημα μεταξύ της εισόδου δύο διαδοχικών ηλεκτρονίων ή οπών σε ένα ενεργό στοιχείο του συστήματος, χρονικό όμως διάστημα που δεν παραμένει σταθερό, αλλά βρίσκεται σε μια τυχαία στατιστική διακύμανση.

Ο θόρυβος μπορεί να αναμιγνύεται με το σήμα μας σε κάθε σημείο του επικοινωνιακού μας συστήματος, όμως η επίδραση του θορύβου γίνεται μεγαλύτερη όσο το σήμα είναι ασθενέστερο. Αυτό σημαίνει ότι ο θόρυβος είναι ακόμα πιο αισθητός στο κανάλι ή στην είσοδο του δέκτη, όπου το σήμα είναι αδύναμο. Ο θόρυβος, που προστίθεται στο αρχικό σήμα, ονομάζεται προσθετικός θόρυβος.

Η κλασική μέθοδος για την αντιμετώπιση του θορύβου είναι η μείωση του εύρους ζώνης του σήματος μέχρι κάποιο όριο ανοχής, παρά το ότι μειώνει το ρυθμό μετάδοσης. Μια άλλη σύγχρονη μέθοδος είναι η ψηφιακή επεξεργασία σήματος (DSP: Digital Signal Process). Αφορά τεχνικές βελτίωσης ακρίβειας και αξιοπιστίας ψηφιακών σημάτων. Υπάρχει η ικανότητα διάκρισης θορύβου ανάμεσα σε δύο ψηφιακά σήματα κι η απομάκρυνσή του από αυτά. Στην περίπτωση που το σήμα είναι αναλογικό το μετατρέπεται σε ψηφιακό, το απαλλάσσει από το θόρυβο και το επαναφέρει αναλογικό. Ακόμη ένας τρόπος για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι η χρήση οπτικών ινών, ένα ενσύρματο μέσο μετάδοσης ανθεκτικό στο θόρυβο.

5.2 Περιγραφή Θορύβου

5.2.1 Θεώρημα Shannon – Hartley

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης δεδομένων ενός καναλιού με θόρυβο, του οποίου το εύρος ζώνης είναι B Hz και ο σηματοθορυβικός λόγος είναι $\frac{S}{N}$, δίνεται από τη σχέση:

$$R \leq C = B \log_2 \left(\frac{S}{N} + 1 \right) \quad (5.1)$$

όπου

R: αυτό που μπορούμε να στείλουμε στο κανάλι,

C: χωρητικότητα καναλιού (bps),

B: Εύρος Ζώνης (Hz),

S: σήμα (Signal),

N: Θόρυβος (Noise).

5.2.2 Απόδοση ισχύος και εύρος ζώνης

Σε ένα σύστημα επικοινωνίας η μέση ισχύς σήματος είναι

$$S = E_b \cdot C \quad (5.2)$$

όπου

E_b είναι η μέση λαμβανόμενη ενέργεια ανά bit πληροφορίας $\left(\frac{Watts}{bit} \right)$.

Επίσης, η μέση ισχύς θορύβου είναι

$$N = N_0 B \quad (5.3)$$

όπου N_0 είναι η πυκνότητα ισχύος του θορύβου $\left(\frac{Watts}{Hz} \right)$.

Έτσι, το θεώρημα Shannon-Hartley μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(\frac{E_b \cdot C}{N_0 \cdot B} + 1 \right) \Rightarrow BE = \log_2 \left(\frac{E_b}{N_0} BE + 1 \right) \text{ bits / s / Hz} \quad (5.4)$$

όπου BE είναι η φασματική απόδοση και ο λόγος $\frac{E_b}{N_0}$ εκφράζει τον

ανηγμένο ανά bit πληροφορίας και μονάδα εύρους ζώνης λόγο σήματος προς θόρυβο εκφράζοντας ταυτόχρονα κι ένα μέτρο της απόδοσης ισχύος του συστήματος. Το θεώρημα Shannon-Hartley δείχνει καθαρά ότι η φασματική απόδοση μπορεί να ανταλλαγεί με την απόδοση ισχύος και αντίστροφα.

5.2.3 Σηματοθορυβικός λόγος

Σε ένα συγκεκριμένο σημείο ενός δέκτη αν η ισχύς του ωφελίμου σήματος είναι P_S και αυτή του θορύβου P_N , τότε ορίζεται ο λόγος σήματος προς θόρυβο ως εξής:

$$10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_N} \right) = \frac{S}{N} = SNR [dB] \quad (5.5)$$

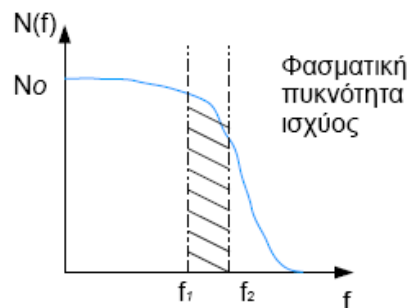
Για κάθε μέσο μετάδοσης δίνεται από τον κατασκευαστή ο σηματοθορυβικός λόγος $\frac{S}{N}$ ή SNR (Signal-to-Noise Ratio), ο οποίος δίνεται από τη σχέση (5.6).

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) \quad (5.6)$$

όπου S είναι η ισχύς του σήματος και N είναι η ισχύς του θορύβου. Ο λόγος SNR μετριέται σε decibel.

5.2.4 Φάσμα θορύβου

Όπως κάθε σήμα στο πεδίο της συχνότητας, έτσι και ο θόρυβος μπορεί να χαρακτηριστεί από μια φασματική πυκνότητα ισχύος $N(f)$, η οποία δείχνει την κατανομή της ισχύος στις φασματικές συνιστώσες (συχνότητες) ενός σήματος, όπως για παράδειγμα στην Εικόνα 37.



Εικόνα 37. Φασματική πυκνότητα ισχύος

Αν η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου είναι σταθερή και

ανεξάρτητη της συχνότητας, τότε $N(f) = N_0 \left(\frac{\text{Watts}}{\text{Hz}} \right)$ και ο θόρυβος ονομάζεται λευκός. Ο θόρυβος, ο οποίος χρησιμοποιείται στην ανάλυση των περισσότερων επικοινωνιακών συστημάτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή και είναι λευκός, ονομάζεται δε λευκός προσθετικός γκαουσιανός θόρυβος (Additive White Gaussian Noise – AWGN). Η μέση τιμή και η ισχύς του AWGN θορύβου, μετρημένη σε μοναδιαία ωμική αντίσταση εντός εύρους ζώνης BW, είναι $\bar{x} = 0$ και $P = N_0 \cdot BW = \sigma^2$ αντίστοιχα.

5.3 Λευκός Θόρυβος

Ο λευκός θόρυβος έχει τα χαρακτηριστικά τυχαίας διαδικασίας, της οποίας η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι σταθερή για όλες τις συχνότητες. Η ονομασία «λευκός θόρυβος» προέρχεται από το φυσικό λευκό φως, το οποίο περιέχει σε ίσες ποσότητες όλες τις συχνότητες του ορατού φάσματος.

Ο λευκός θόρυβος έχει άπειρη ισχύ, με αποτέλεσμα να μην είναι πραγματοποιήσιμος. Όσο όμως το εύρος ζώνης μιας στοχαστικής ανέλιξης θορύβου στην είσοδο ενός συστήματος είναι αισθητά μεγαλύτερο από αυτό του ίδιου του συστήματος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το λευκό θόρυβο ως μοντέλο της ανέλιξης θορύβου στην είσοδο.

Η μέση ισχύς του λευκού θορύβου δίνεται από την σχέση (5.7):

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_{xx}}(f) df \quad (5.7)$$

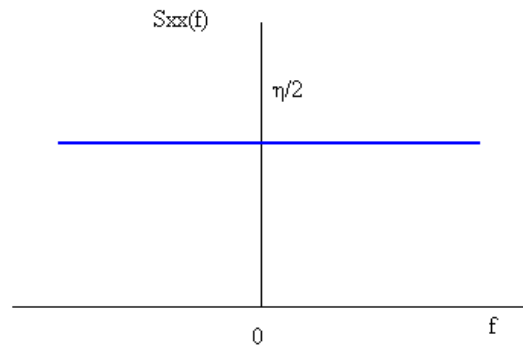
όπου αποδεικνύεται ότι η μέση ισχύς είναι άπειρη.

Ένα σήμα, λοιπόν, λέγεται λευκός θόρυβος, όταν η πυκνότητα της φασματικής ισχύος του $S_{xx}(f)$ παραμένει σταθερή για κάθε συχνότητα και ορίζεται ως εξής:

$$S_{xx} = \frac{\eta}{2}, \quad \forall f \quad (5.8)$$

όπου ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ δηλώνει ότι η ισχύς διαμοιράζεται στο αρνητικό και

θετικό φάσμα συχνοτήτων. Στην Εικόνα 38 παρουσιάζεται η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου:



Εικόνα 38. Φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου

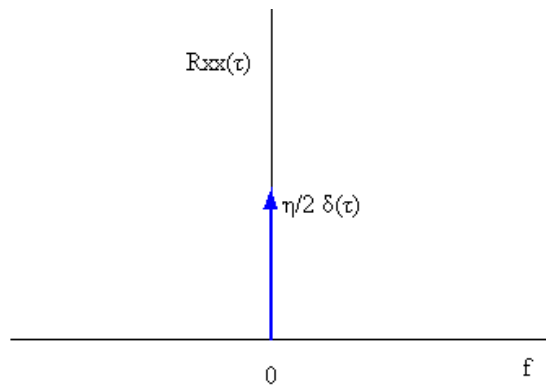
Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του Fourier στη σχέση

$S_{xx} = \frac{\eta}{2}$, έχουμε:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau) \quad (5.9)$$

όπου η $R_{xx}(\tau)$ αποτελεί τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λευκού θορύβου και η $\delta(\tau)$ είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (ή αλλιώς συνάρτηση Δέλτα).

Συμπερασματικά, δύο τυχαία δείγματα ενός λευκού θορύβου, που λαμβάνονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα, είναι ασυσχέτιστα. Στην Εικόνα 39 απεικονίζεται το διάγραμμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.



Εικόνα 39. Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του λευκού θορύβου

Ο λευκός θόρυβος, σαν ένα στοχαστικό σήμα, έχει κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή. Ακόμη, θεωρείται ότι εισέρχεται στο σήμα από την είσοδό του στον δέκτη (προσθετική μορφή). Στην πράξη, λοιπόν, θεωρούμε ότι η πυκνότητα φασματικής ισχύος του λευκού θορύβου παραμένει ίδια για ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων και μηδενίζεται μετά από κάποια συχνότητα. Κατά συνέπεια, έμπρακτα η ισχύς του λευκού θορύβου δεν είναι άπειρη, όπως θεωρητικά είχαμε προαναφέρει στην αρχή του κεφαλαίου.

5.3.1 Προσθετικός Λευκός Γκαουσιανός Θόρυβος (Additive White Gaussian Noise – AWGN)

Ο προσθετικός λευκός Gaussian θόρυβος αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο, που χρησιμοποιείται ευρύτερα στις μελέτες και στις προσομοιώσεις των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον λευκό θόρυβο. Έτσι, τα δείγματά του στο πεδίο του χρόνου είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητα και προστίθενται σε κάθε δείγμα του σήματος, που λαμβάνει ο δέκτης. Σε αυτό το δίαυλο, τα μεταδιδόμενα σύμβολα λαμβάνονται από ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών και τα σφάλματα ακολουθούν τη στατική κατανομή Gauss (κανονική κατανομή).

Πηγή του AWGN αποτελεί η ακτινοβολία, που εκπέμπεται από ασύρματες μεταδόσεις (ατμοσφαιρικά παράσιτα), και ο θερμικός θόρυβος, που

οφείλεται στο υλικό (hardware), συγκεκριμένα στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων στις τηλεπικοινωνιακές διατάξεις.

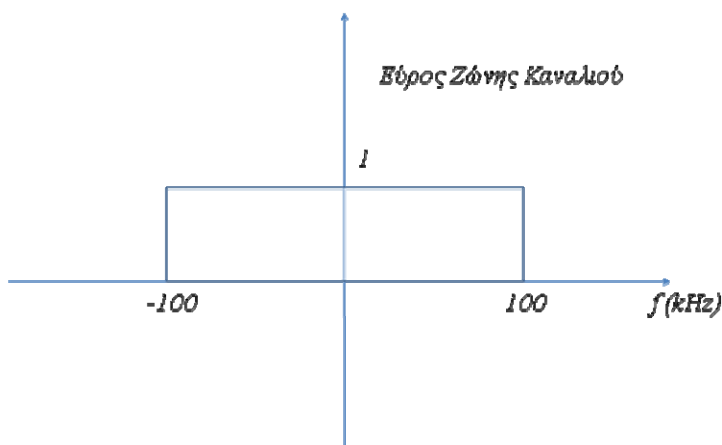
Οι επιπτώσεις του AWGN εκτιμώνται και υπολογίζονται με τη βοήθεια στατιστικής ανάλυσης. Τα AWGN σήματα είναι καθαρά τυχαία και είναι αδύνατη η πρόβλεψη της στιγμιαίας τιμής τους σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Εφόσον το σήμα του θορύβου έχει πλάτη που μεταβάλλονται τυχαία στη διάρκεια του χρόνου, αριθμητική αναφορά σε αυτόν μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μόνο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (probability density function). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σχετίζει την τιμή του σήματος με την πιθανότητα να εμφανιστεί το συγκεκριμένο σήμα. Έτσι η συνάρτηση, που μας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας των τιμών των δειγμάτων του και έχει τη μορφή κατανομής Gauss με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση σ , είναι:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (5.10)$$

Ασκήσεις

1. Δώστε τον ορισμό των dBW,dBm,dBμV. Υπολογίστε την τιμή του σήματος στην έξοδο αθροιστή, όταν στην είσοδο έχουμε:

- A) 10W + 10W
 - B) 10dBW + 10W
 - Γ) 10dBW + 10dbW
 - Δ) 10dBW + 10dBm
- 2.



Δίνεται το σήμα βασικής ζώνης $x(t)$ με φάσμα πλάτους $X(f) = 10^{-1} \cdot \text{tri}\left(\frac{f}{3 \times 10^4}\right)$. Το σήμα αυτό υπόκειται σε παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM) οπότε προκύπτει το προς μετάδοση ψηφιακό σήμα $x_{PCM}(n)$, όπου n ακέραιος. Για τη μετάδοση του $x_{PCM}(n)$ απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 30dB. Να θεωρήσετε και ένα κανάλι μετάδοσης βασικής ζώνης με διαθέσιμο εύρος ζώνης 100kHz.το οποίο απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα:

(α) Να διερευνήσετε αν είναι δυνατή η μετάδοση μέσα από το ανωτέρω κανάλι

(i) του αναλογικού σήματος $x(t)$.

(ii) του ψηφιακού σήματος $x_{PCM}(n)$.

απολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(β) Αν το $x(t)$ περάσει από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο και μετά υποστεί διαμόρφωση PCM, ώστε να είναι δυνατή η ψηφιακή μετάδοσή του $x_{PCM}(n)$ μέσα από το ανωτέρω κανάλι, να υπολογίσετε την κατάλληλη συχνότητα αποκοπής του φίλτρου.

(γ) Να υπολογίσετε πόσο θα πρέπει να μειωθεί το επιθυμητό SNR ώστε να είναι εφικτή η ψηφιακή μετάδοση του $x_{PCM}(n)$ χωρίς φιλτράρισμα του $x(t)$.

(Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση του σήματος $x(t)$ με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (σε μονάδες decibel) ισούται με $SNR = 10 \cdot \log_{10}(L^2)$)

3. Στο πλαίσιο της παραγωγής ενός αναλογικού σήματος από μία γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων και της διέλευσης του συγκεκριμένου σήματος από ένα κανάλι, να διερευνήσετε το παρακάτω πρόβλημα:

Ένα αναλογικό σήμα έχει εύρος ζώνης 4 KHz. Στο σήμα έχει γίνει δειγματοληψία 2.5 φορές του Ρυθμού Nyquist και κάθε δείγμα κβαντίζεται ισοπίθανα σε 256 βήματα (steps ή διαφορετικές τιμές). Υποθέτουμε ότι οι διαδοχικές δειγματοληψίες είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Να υπολογισθούν:

α. Ο Ρυθμός Πληροφορίας της Πηγής

β. Είναι δυνατόν η πληροφορία της πηγής να μεταδοθεί χωρίς σφάλματα σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης 50KHz και Λόγο Σήματος προς Θόρυβο (S/N) να είναι ίσος με 23 dB?

4. Η οθόνη μιας ασπρόμαυρης τηλεόρασης αποτελείται από 3×10^5 στοιχεία, καθένα των οποίων, λαμβάνει 10 διαφορετικές αποχρώσεις, ισοπίθανα. Υποθέτουμε ότι:

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι 30 Πλαίσια εικόνας σε χρόνο 1 sec.

Ο Λόγος Σήματος προς Θόρυβο (S/N) είναι 30 dB

Να υπολογισθεί το εύρος ζώνης συχνοτήτων που απαιτείται για να υποστηριχθεί η μετάδοση του τηλεοπτικού (video) σήματος.

(Υπόδειξη: ισχύει $C = W \times \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$, όπου C η χωρητικότητα του καναλιού, W το εύρος ζώνης και (S/N) ο λόγος σήματος προς θόρυβο.)

5. Έστω ένας δορυφόρος που εκπέμπει με μια κεραία απολαβής 6 dB και οι ολικές απώλειες ισχύος του σήματος λόγω της διάδοσής του μέχρι έναν επίγειο σταθμό λήψης είναι 190 dB. Ο επίγειος σταθμός έχει κεραία με απολαβή 40 dB και θερμοκρασία θορύβου $T_{\text{ant}} = 60^\circ \text{ K}$. Η κεραία τροφοδοτεί έναν προενισχυτή με ενεργό θερμοκρασία θορύβου 125° K και απολαβή 20 dB. Μετά τον προενισχυτή υπάρχει ένας ενισχυτής με εικόνα θορύβου 10 dB και απολαβή 80 dB. Το εύρος ζώνης διαβίβασης της πληροφορίας είναι 1 MHz. Υπολογίστε:

α) την μέση ισχύ θερμικού θορύβου στην έξοδο του δέκτη του επίγειου σταθμού

β) την ισχύ εκπομπής του δορυφόρου ώστε στην έξοδο του δέκτη να έχουμε λόγο σήματος προς θόρυβο 20 dB.

6. Δεδομένα μεταδίδονται με ένα κανάλι RF διέλευσης ζώνης με ρυθμό $5 \cdot 10^6$ bit/sec. Το πλάτος του φέροντος στην κεραία του δέκτη είναι $A=1$ mV και η φασματική πυκνότητα του θορύβου στην είσοδο του δέκτη είναι $N_0/2 = 5 \cdot 10^{-15}$ Watt/Hz.

Βρείτε την πιθανότητα σφάλματος ενός σύμφωνου δέκτη για Δυαδική ASK

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t), & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{binary 1} \\ 0, & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{binary 0} \end{cases}$$

Δυαδική ASK:

7. Σε κανάλι μετάδοσης χωρίς θόρυβο θέλουμε να έχουμε μέγιστο ρυθμό μετάδοσης 9.600 bps. Ποιο είναι το απαραίτητο εύρος ζώνης αν μεταδίδονται σύμβολα των 4 bits;

Κεφάλαιο 6.

Φασματική ανάλυση σημάτων

Γενικά

Τα σήματα, που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, και τα συστήματα, που πρόκειται να δούμε στη συνέχεια, μπορούν επίσης να περιγραφούν στο πεδίο της συχνότητας. Η περιγραφή του φάσματός τους οδηγεί σε έναν απλό τρόπο χαρακτηρισμού ενός συστήματος με χρήση της ονομαζόμενης συνάρτησης μεταφοράς. Η σειρά Fourier και ο μετασχηματισμός Fourier αποτελούν χρήσιμα εργαλεία στην κατεύθυνση αυτή.

Ένα σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν από τους παρακάτω ισοδύναμους τρόπους:

Στο πεδίο του χρόνου t : Ως κυματομορφή (χρονικά μεταβαλλόμενη τάση) $m(t)$.

Στο πεδίο της συχνότητας f : Ως φασματική συνάρτηση $M(f)$.

Η σπουδαιότητα της φασματικής αναπαράστασης έγκειται στο γεγονός ότι η $M(f)$ παρέχει πληροφορίες για το συχνотικό περιεχόμενο του σήματος και, συνεπώς, διευκολύνει τη μελέτη της διέλευσης και επεξεργασίας του

από τηλεπικοινωνιακές διατάξεις και συστήματα. Επιπλέον, η μελέτη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας είναι μαθηματικά απλούστερη από ότι στο πεδίο του χρόνου.

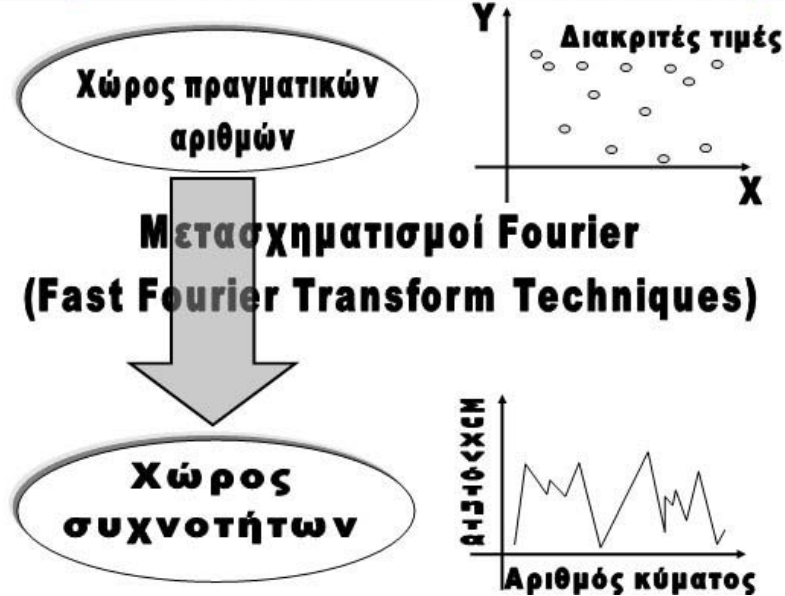
Το μαθηματικό εργαλείο, με τη βοήθεια του οποίου μια κυματομορφή $m(t)$ παριστάνεται ως συνάρτηση $M(f)$ (συνάρτηση της συχνότητας), είναι η ανάλυση Fourier ή φασματική ανάλυση. Η ανάλυση αυτή στηρίζεται στο γνωστό θεώρημα Fourier, σύμφωνα με το οποίο μια περιοδική κυματομορφή $m(t)$ (με περίοδο T) μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα άπειρων ημιτονικών και συνημιτονικών όρων, οι συχνότητες των οποίων είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f = \frac{1}{T}$.

Στην πράξη, αντί για τους ημιτονικούς ή συνημιτονικούς όρους, χρησιμοποιούνται ισοδύναμοι μιγαδικοί εκθετικοί όροι. Επίσης, αν και το θεώρημα Fourier ουσιαστικά εφαρμόζεται μόνο στις περιοδικές κυματομορφές, η βασική του ιδέα μπορεί να επεκταθεί ώστε να καλύψει και τα μη περιοδικά σήματα.

Συνοψίζοντας, οι βασικές δυνατότητες της φασματικής ανάλυσης είναι οι παρακάτω:

Ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, περιόδου T μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα άπειρων μιγαδικών εκθετικών όρων (μιγαδική σειρά Fourier), καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη συχνότητα (αρμονική) που είναι πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας $f_1 = \frac{1}{T}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 40).

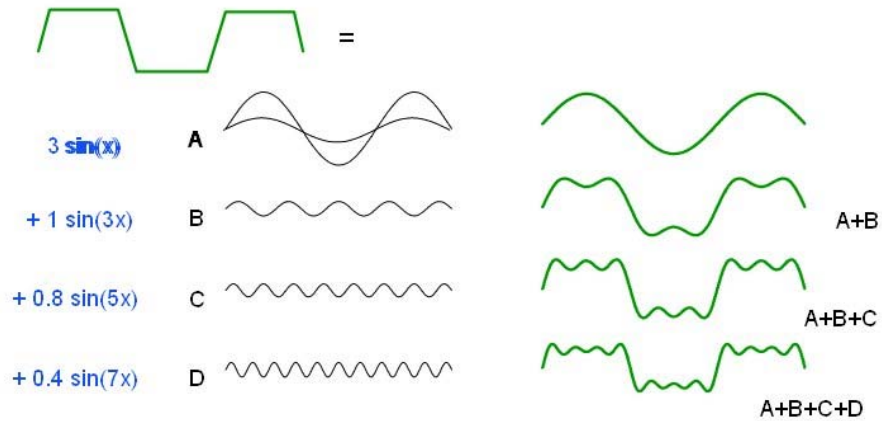
**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ
(SPACE DOMAIN – FREQUENCY DOMAIN)**



Εικόνα 40. Αναπαράσταση περιοδικού σήματος $m(t)$, περιόδου T ως άθροισμα άπειρων μιγαδικών εκθετικών όρων (μιγαδική σειρά Fourier)

Οποιοδήποτε σήμα (περιοδικό ή μη περιοδικό) μπορεί να παρασταθεί ως ολοκλήρωμα (μετασχηματισμός) Fourier. Στην περίπτωση των περιοδικών σημάτων το ολοκλήρωμα Fourier εκπίπτει σε μία σειρά, που, αν και η μορφή της δεν είναι εκθετική, η φυσική της σημασία είναι ισοδύναμη με αυτή της εκθετικής σειράς.

Πώς μεταπίπτω από την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο του χρόνου στην αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 41).



Εικόνα 41. Μετάπτωση από την αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο του χρόνου στην αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας

6.1 Φασματική ανάλυση περιοδικών σημάτων (μικαδικές σειρές Fourier)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, περιόδου T , μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα άπειρων ημιτονικών-συνημιτονικών όρων (αρμονικών), κάθε ένας από τους οποίους έχει συχνότητα nf_1 ($n = 0, 1, 2, \dots$) πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας $f_1 = \frac{1}{T}$. Το άθροισμα αυτό είναι η τριγωνομετρική σειρά Fourier και δίνεται από τη σχέση (6.1).

$$m(t) = \sum_{[0, \infty)} a_n \cos(2\pi n f_1 t) + b_n \sin(2\pi n f_1 t) \quad (6.1)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τριγωνομετρικοί συντελεστές Fourier a_n , b_n δίνονται από τους τύπους:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T m(t) dt \quad (\text{DC συνιστώσα})$$

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T m(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt \quad (n > 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T m(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt \quad (n < 0)$$

από τους οποίους πιστοποιείται ότι οι εν λόγω συντελεστές ουσιαστικά

καθορίζονται από το ίδιο το σήμα $m(t)$.

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\cos x = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})}{2} \text{ και } \sin x = \frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j}$$

η παραπάνω τριγωνομετρική σειρά μπορεί να γραφεί στη συνεκτικότερη και βολικότερη εκθετική μορφή

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{[0,\infty)} a_n \cos(2\pi f_1 t) + b_n \sin(2\pi f_1 t) = \\ &= \sum_{[0,\infty)} a_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \sum_{[0,\infty)} a_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t}}{2} \right) - j b_n \left(\frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_1 t}}{2} \right) = \\ &= \sum_{[0,\infty)} \left[\frac{(a_n - j b_n)}{2} \right] e^{j2\pi f_1 t} + \left[\frac{(a_n + j b_n)}{2} \right] e^{-j2\pi f_1 t} = \\ &= \sum_{[0,\infty)} c_n e^{j2\pi f_1 t} + c_n' e^{-j2\pi f_1 t} \Rightarrow \\ m(t) &= c_{0+} + \sum_{[1,\infty)} c_{n+} e^{j2\pi f_1 t} + c_{0-} + \sum_{[1,\infty)} c_{n-} e^{-j2\pi f_1 t} \end{aligned} \quad (6.2)$$

όπου

$$c_{n+} = \frac{(a_n - j b_n)}{2}$$

$$c_{0+} = \frac{a_0}{2} \quad (b_0=0)$$

$$c_{n-} = \frac{(a_n + j b_n)}{2}$$

$$c_{0-} = \frac{a_0}{2} \quad (b_0=0)$$

Η νέα (εκθετική) σειρά μπορεί να γραφεί σε μια πιο συνεκτική μορφή, θεωρώντας ότι ο δείκτης n μεταβάλλεται στο διάστημα $(-\infty, -1]$ (αντί για το $[1,\infty)$), οπότε απαλείφεται το "-" στον εκθέτη (οι δείκτες n είναι πλέον εξ

ορισμού αρνητικοί) και η δεύτερη σειρά γίνεται "κατοπτρική" της πρώτης.

Παρατηρώντας επιπλέον ότι $c_{0-} + c_{0+} = a_0$, προκύπτει ότι:

$$m(t) = a_0 + \sum_{[1, \infty)} c_n e^{j2\pi n f_1 t} + \sum_{(-\infty, -1]} c'_n e^{j2\pi n f_1 t}$$

οπότε η (περιοδική) κυματομορφή $m(t)$ μπορεί να γραφεί, συνοπτικά, ως σειρά μιγαδικών εκθετικών όρων

$$m(t) = \sum_{(-\infty, +\infty)} c_n e^{j2\pi n f_1 t} \quad (6.3)$$

όπου

$$c_{n^+} = \frac{(a_n - jb_n)}{2} \quad (n > 0)$$

$$c_0 = a_0 \quad (n=0, \text{ DC συνιστώσα})$$

$$c_{n^-} = \frac{(a_n + jb_n)}{2} \quad (n < 0)$$

6.2 Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier

Οι μιγαδικοί συντελεστές είναι σκόπιμο για τη διευκόλυνση των υπολογισμών να γραφούν σε μορφή που να περιέχει το περιοδικό σήμα $m(t)$. Αυτό επιτυγχάνεται αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_n , b_n με τους αντίστοιχους τύπους που έχουμε δει νωρίτερα. Έτσι,

$$\begin{aligned} c_{n^+} &= \frac{(a_n - jb_n)}{2} = \frac{\left[\left(\frac{2}{T} \right) \int_T m(t) \cos(2\pi n f_1 t) dt - j \left(\frac{2}{T} \right) \int_T m(t) \sin(2\pi n f_1 t) dt \right]}{2} = \\ &= \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) [\cos(2\pi n f_1 t) - j \sin(2\pi n f_1 t)] dt = \\ &= \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt \end{aligned}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο έχω:

$$c_{n^-} = \frac{(a_n + jb_n)}{2} = \left(\frac{1}{T} \right) \int_T m(t) e^{j2\pi n f_1 t} dt$$

και αντικαθιστώντας σε όποιον από τους δύο τύπους για $n=0$ έχω:

$$c_0 = a_0 = \left(\frac{1}{T}\right) \int_T m(t) dt$$

Οι παραπάνω τύποι μπορούν να συμπυκνωθούν στον ενιαίο τύπο (6.4)

$$c_n = \left(\frac{1}{T}\right) \int_T m(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt, \text{ για } (-\infty < n < \infty) \quad (6.4).$$

6.3 Φασματική ανάλυση (περιοδικών και μη περιοδικών) σημάτων. Το ολοκλήρωμα (μετασχηματισμός) Fourier

Μέσω του ολοκληρώματος (μετασχηματισμού) Fourier είναι δυνατή η φασματική αναπαράσταση οποιουδήποτε σήματος, περιοδικού ή μη. Ο υπολογισμός του εν λόγω ολοκληρώματος για ένα σήμα $m(t)$ οδηγεί σε μια συνάρτηση $M(f)$, η οποία καταδεικνύει το «συχνοτικό περιεχόμενο» του συγκεκριμένου σήματος.

Ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$ είναι (γενικά) μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας f και, ως τέτοια, χαρακτηρίζεται από το μέτρο της $|M(f)|$ και τη φάση της $\varphi(f)$. Ειδικότερα, το μέτρο $|M(f)|$ απεικονίζει την κατανομή της ισχύος του σήματος $m(t)$ στο εύρος συχνοτήτων που καταλαμβάνει το σήμα.

Για περιοδικά σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$ είναι διακριτή μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας. Για ένα περιοδικό σήμα $m(t)$, οι γραφικές παραστάσεις $|M(f)|$ και $\varphi(f)$ είναι παρόμοιες με αυτές των c_n και φ_n της μιγαδικής σειράς Fourier για το ίδιο σήμα.

Για μη περιοδικά σήματα, ο μετασχηματισμός Fourier $M(f)$ είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας.

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να προκύψει από τη μιγαδική σειρά Fourier, θεωρώντας ότι ένα μη περιοδικό σήμα $m(t)$ μπορεί να εκληφθεί ως περιοδικό με περίοδο $T \rightarrow \infty$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα εξής:

Η απόσταση $f_1 \equiv \frac{1}{T}$ μεταξύ των αρμονικών τείνει στο 0.

Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω, οι (διακριτοί) μιγαδικοί συντελεστές Fourier c_n "πυκνώνουν" και ουσιαστικά μετεξελίσσονται σε μια συνεχή

μιγαδική συνάρτηση $M(f)$.

Η μιγαδική σειρά Fourier μετεξελίσσεται σε ολοκλήρωμα. Ουσιαστικά, οι συντελεστές C_n της σειράς Fourier υποκαθίστανται από τον όρο $M(f) * df$.

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς, ένα μη περιοδικό σήμα $m(t)$ εκφράζεται ως

$$m(t) = \int M(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.5)$$

Η μιγαδική συνάρτηση $M(f)$ αποτελεί το ολοκλήρωμα (ή μετασχηματισμό) Fourier του σήματος $m(t)$, αποδεικνύεται δε ότι μπορεί να γραφεί ως

$$M(f) = \int m(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.6)$$

Η "σύνδεση" μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας γίνεται μέσω του θεωρήματος Parseval, που γενικά (για περιοδικά και μη) σήματα εκφράζεται ως:

αν $m(t)$ και $M(f)$ ($\omega=2\pi f$) είναι ένα ζεύγος Fourier, τότε αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα Parseval

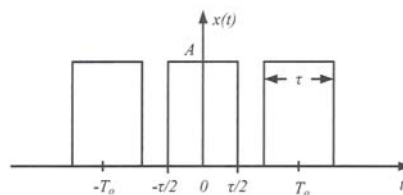
$$\int m^2(t)dt = \int |M(f)|^2 df \quad (6.7)$$

Το θεώρημα Parseval υπονοεί ότι η ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογισθεί είτε υπολογίζοντας την ενέργεια στη μονάδα του χρόνου και ολοκληρώνοντας σε όλο το χρονικό διάστημα είτε υπολογίζοντας την ενέργεια στη μονάδα της συχνότητας και ολοκληρώνοντας σε όλη την περιοχή συχνοτήτων. Η ποσότητα $|X(f)|^2$ αναφέρεται και ως φάσμα πυκνότητας ενέργειας και έχει διαστάσεις Joule/Hz.

Παράδειγμα 6.1

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το παρακάτω σήμα (περιοδική παλμοσειρά):

$$x(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Λύση:

Υπολογίζουμε τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier x_n ακολουθώντας τον ορισμό

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T_o} \int_{\frac{-T_o}{2}}^{\frac{T_o}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} dt = \frac{A}{T_o} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} dt = \\&= \frac{A}{T_o} \left(\frac{-T_o}{j2\pi n} \right) \left[e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_o} \left(\frac{-T_o}{j2\pi n} \right) \left(e^{-j\frac{\pi n \tau}{T_o}} - e^{j\frac{\pi n \tau}{T_o}} \right) = \\&= \frac{A}{\pi n} \sin \left(\frac{\pi n \tau}{T_o} \right)\end{aligned}$$

$$\dots n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση δειγματοληψίας (sampling function) ως εξής:

$$Sa(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

Επομένως

$$x_n = \frac{A \tau T_o}{T_o \pi n \tau} \sin \left(\frac{\pi n \tau}{T_o} \right) = \frac{A \tau}{T_o} \operatorname{sinc} \left(\frac{n \tau}{T_o} \right) = \frac{A \tau}{T_o} Sa \left(\frac{\pi n \tau}{T_o} \right)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $\operatorname{sinc}(z)$ παίρνει μηδενικές τιμές για ακέραιες τιμές του ορίσματος z . Άρα, οι μηδενισμοί των x_n είναι για

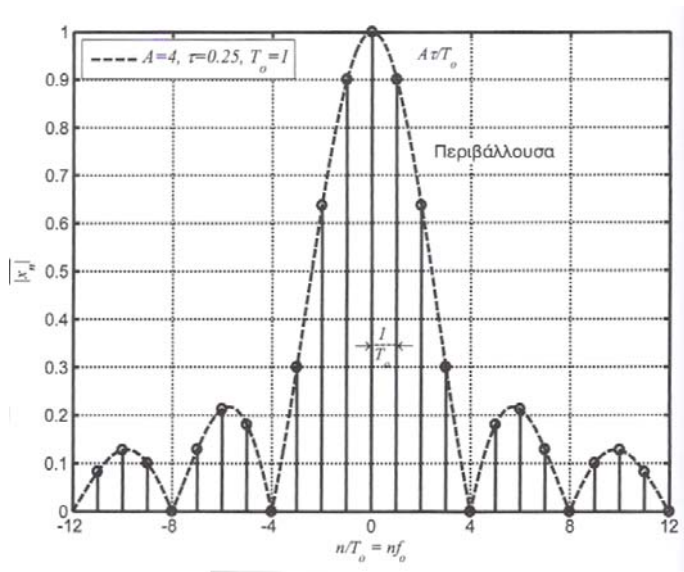
$\frac{n\tau}{T_o} = \pm 1, \pm 2, \dots$. Ο λόγος $\left(\frac{\tau}{T_o} \right)$ του θετικού μετώπου του παλμού προς την

περίοδο του σήματος, καλείται κύκλος λειτουργίας (duty cycle). Άρα, οι μηδενισμοί των μιγαδικών συντελεστών Fourier προκύπτουν για

$n = \pm \frac{T_o}{\tau}, \pm 2 \frac{T_o}{\tau}, \pm 3 \frac{T_o}{\tau}, \dots$ ή αν απεικονίσουμε σε οριζόντιο άξονα

$\frac{n}{T_o} = \pm \frac{1}{\tau}, \pm \frac{2}{\tau}, \dots$ Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μέτρο των x_n για

$$\text{duty cycle} = \frac{\tau}{T} = 0,25.$$



Παρατηρούμε ότι:

Το μέγιστο πλάτος είναι $\frac{A\tau}{T_0}$ και αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα,

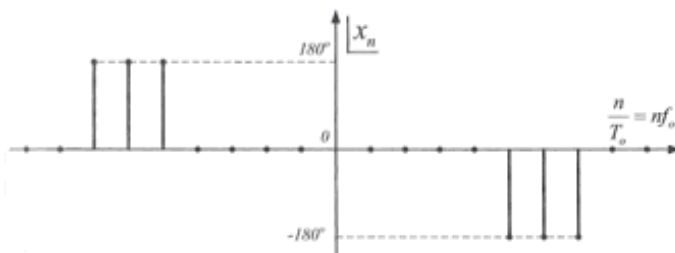
δηλαδή πρόκειται για την DC συνιστώσα.

Η απόσταση των αρμονικών είναι $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Οι μηδενισμοί συμβαίνουν σε n , που είναι ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου duty cycle.

Η φάση παίρνει τιμές 0° και 180° , ανάλογα με την πολικότητα της συνάρτησης $\sin\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Να

υπενθυμίσουμε ότι όταν $\frac{n\pi\tau}{T_0} > \pi$ τότε $\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) < 0$ και $\angle x_n = -180^\circ$.



Διακριτό φάσμα φάσης περιοδικής παλμοσειράς

Τελικά για την περιοδική παλμοσειρά γράφουμε

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right) e^{j\frac{2\pi n t}{T_o}}$$

Παράδειγμα 6.2

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα $X(t) = A_o \cos(2\pi f_o t + \phi_o)$.

Λύση:

Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} A_o \cos(2\pi f_o t + \phi_o) e^{-j2\pi n f_o t} dt = \\ &= \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} A_o \left[\frac{e^{j(2\pi f_o t + \phi_o)} + e^{-j(2\pi f_o t + \phi_o)}}{2} \right] e^{-j2\pi n f_o t} dt = \\ &= \frac{A_o}{2T_o} \left[e^{j\phi_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{j2\pi f_o t} e^{-j2\pi n f_o t} dt + e^{-j\phi_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2\pi f_o t} e^{-j2\pi n f_o t} dt \right] = \\ &= \frac{A_o}{2T_o} \left[e^{j\phi_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{j2\pi(n-1)f_o t} dt + e^{-j\phi_o} + e^{-j\phi_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2\pi(n+1)f_o t} dt \right] = \\ &= \frac{A_o}{2T_o} e^{j\phi_o} \left[\frac{e^{j2\pi(n-1)f_o t}}{-j2\pi(n-1)f_o} \right]_{-T_o/2}^{T_o/2} + \frac{A_o}{2T_o} e^{j\phi_o} \left[\frac{e^{j2\pi(n+1)f_o t}}{-j2\pi(n+1)f_o} \right]_{-T_o/2}^{T_o/2} = \\ &= \frac{A_o}{2T_o} e^{j\phi_o} \frac{e^{-j\pi(n-1)} - e^{j\pi(n-1)}}{-j2\pi(n-1)f_o} + \frac{A_o}{2T_o} e^{j\phi_o} \frac{e^{-j\pi(n+1)} - e^{j\pi(n+1)}}{-j2\pi(n+1)f_o} = \\ &= \frac{A_o}{2} e^{j\phi_o} \frac{1}{\pi(n-1)} \frac{e^{j\pi(n-1)} - e^{-j\pi(n-1)}}{2j} + \frac{A_o}{2} e^{j\phi_o} \frac{1}{\pi(n+1)} \frac{e^{j\pi(n+1)} - e^{-j\pi(n+1)}}{2j} = \\ &= \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2\pi(n-1)} \sin[\pi(n-1)] + \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2\pi(n+1)} \sin[\pi(n+1)] = \\ &= \frac{A_o e^{j\phi_o}}{2} \operatorname{sinc}(n-1) + \frac{A_o e^{-j\phi_o}}{2} \operatorname{sinc}(n+1) \end{aligned}$$

Για $n = 0$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = 1$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = 1$ και $\text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = 2$, προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για όλες τις τιμές $n \geq 2$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Για $n = -1$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = 0$ και $\text{sinc}(n+1) = 1$

Όμοια για $n \leq -2$ προκύπτει $\text{sinc}(n-1) = \text{sinc}(n+1) = 0$

Επομένως:

$$x_1 = \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} \quad \text{και} \quad x_{-1} = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0}$$

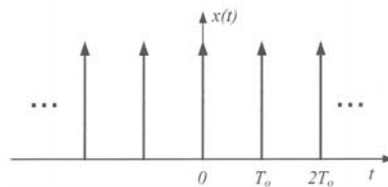
Και η επαλήθευση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}} = x_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + x_1 e^{j2\pi f_0 t} = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} e^{j2\pi f_0 t} = \\ &= A_0 \frac{e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}}{2} = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.3

Αναπτύξτε σε σειρά Fourier την κρουστική παλμοσειρά που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και η οποία γράφεται

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



Λύση:

Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι:

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0}, \text{ δηλαδή σταθεροί!}$$

Επομένως,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi nt}{T_0}}$$

Από την έκφραση των μιγαδικών συντελεστών Fourier εύκολα συμπεραίνουμε ότι το φάσμα της κρουστικής παλμοσειράς είναι διακριτό και αποτελείται από κρουστικές πλάτους $\frac{1}{T_0}$ σε συχνότητες ακέραια

πολλαπλάσια της βασικής $f_0 = \frac{1}{T_0}$, δηλαδή nf_0 ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Πρόκειται

δηλαδή για μια κρουστική παλμοσειρά στο πεδίο της συχνότητας. •

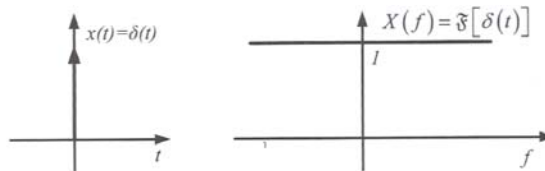
Παράδειγμα 6.4

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης $x(t) = \delta(t)$.

Λύση:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

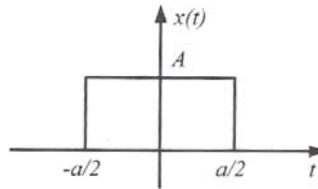
δηλαδή το φάσμα της μοναδιαίας κρουστικής περιέχει όλες τις συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Έχοντας υπολογίσει το φάσμα της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε τη μεγάλη χρησιμότητα της συνάρτησης αυτής στις τηλεπικοινωνίες. Πρόκειται για μια εξιδανικευμένη πηγή που περιέχει όλες τις συχνότητες με ίδιο πλάτος. Συνεπώς, η απόκριση ενός συστήματος στη συνάρτηση αυτή παρέχει τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, δηλαδή τον τρόπο που επιδρά το σύστημα στις φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου. •

Παράδειγμα 6.5

Υπολογίστε το φάσμα του τετραγωνικού παλμού $x(t) = A\Pi_{\frac{a}{2}}(t)$



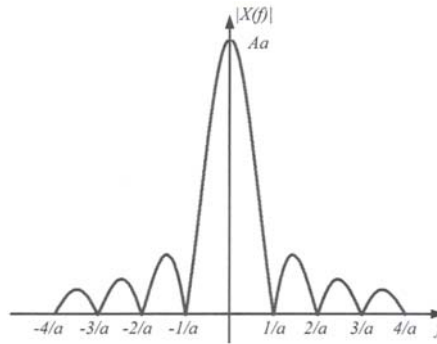
Λύση:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi_{\frac{a}{2}}(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{A}{-j2\pi f} (e^{-j\alpha\pi f} - e^{j\alpha\pi f}) = \\ &= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j\alpha\pi f} - e^{-j\alpha\pi f}}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(\alpha\pi f) = \\ &= Aa \frac{\sin(a\pi f)}{a\pi f} = Aa \operatorname{sinc}(af)\end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε απεικονίσει το πλάτος του φάσματος $|X(f)|$.

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος μηδενισμός του φάσματος συμβαίνει για $f = \pm 1/a$

Όσο μειώνεται δηλαδή η διάρκεια a του παλμού, τόσο αυξάνεται η συχνότητα του πρώτου μηδενισμού και αντίστροφα. Είναι χαρακτηριστική η σχέση με τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση, που όπως είχαμε αναφέρει μπορεί να προσεγγιστεί από ένα τετραγωνικό παλμό με απείρως μικρή διάρκεια. Στην περίπτωση αυτή, όπως είδαμε και προηγουμένως, το φάσμα της $\delta(t)$ περιλαμβάνει όλες τις συχνότητες. Αντίστροφα αν αυξήσουμε τη διάρκεια του παλμού αφήνοντας $a \rightarrow \infty$, τότε το φάσμα πλησιάζει και πάλι στη μοναδιαία κρουστική η οποία τώρα προσεγγίζεται από την $\operatorname{sinc}(af)$. Γενικά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μια αντίστροφη σχέση των μεγεθών στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας.

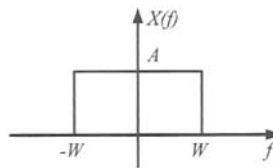


Παράδειγμα 6.6

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος που δίνεται από τη σχέση:

$$X(f) = \begin{cases} A \dots\dots\dots |f| < W \\ 0 \dots\dots\dots |f| > W \end{cases}$$

Λύση:



$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-W}^W A e^{j2\pi ft} df = \\ &= \frac{A}{j2\pi} \left[e^{j2\pi ft} \right]_{-W}^W = \frac{A}{j2\pi} (e^{j2\pi Wt} - e^{-j2\pi Wt}) = \\ &= \frac{A}{\pi} \sin(2\pi Wt) = 2AW \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt} = \\ &= 2AW \operatorname{sinc}(2Wt) \end{aligned}$$

Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούμε μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας στην οποία στο εξής θα την καλούμε δυαδικότητα (duality). Ουσιαστικά μια συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου έχει συγκεκριμένο φάσμα το οποίο αν

θεωρηθεί ως χρονική συνάρτηση θα έχει φάσμα την αρχική συνάρτηση. •

Παράδειγμα 6.7

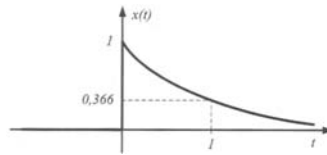
Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του φθίνοντος εκθετικού παλμού

$x(t) = e^{-t}u(t)$, όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι:

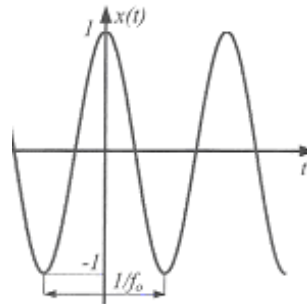
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{1+j2\pi f} \left[e^{-(1+j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$



Παράδειγμα 6.8

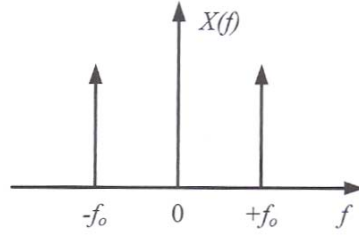
Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

Λύση :



Αναπτύσσοντας το συνημίτονο σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών και σύμφωνα με την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\cos(2\pi f_0 t)] &= \mathfrak{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \end{aligned}$$



Ασκήσεις

1. Βασισμένοι στο παράδειγμα 6.1 παίξτε με τις τιμές των τ και T ξεχωριστά και μελετήστε την επίδρασή τους στο διακριτό φάσμα της περιοδικής παλμοσειράς.
2. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του αύξοντος εκθετικού παλμού $x(t) = e^t u(-t)$ όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.
3. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

Κεφάλαιο 7.

Συστήματα

Η έννοια του συστήματος είναι γενικά μια ευρεία έννοια, είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του σήματος και χρησιμοποιείται σε διάφορους τομείς. Έτσι μιλάμε για το οικολογικό σύστημα, το ηλεκτρικό ή μηχανικό σύστημα, το οικονομικό σύστημα, το ηλεκτρονικό σύστημα κλπ. Το αυτοκίνητο, το αεροπλάνο, η τηλεόραση, το ραδιόφωνο, ο Η/Υ κλπ. είναι μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα συστημάτων από τον τομέα της τεχνολογίας.

Ένα σύστημα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι είναι μια εξελικτική διαδικασία (process), που στην είσοδο (input) εισάγει κάποια σήματα $x(t)$ και, αφού τα «μετασχηματίζει», εξάγει στην έξοδο (output) κάποια άλλα σήματα $y(t)$.

Άρα:

«Σύστημα, ονομάζουμε τη διαδικασία, που μετατρέπει ένα σήμα σε ένα άλλο».

Ή αλλιώς

«Ως σύστημα ορίζεται ένας νόμος μέσω του οποίου συνδέεται η έξοδος (απόκριση) $y(t)$ με την είσοδο (διέγερση) $x(t)$ του συστήματος».

Στην Εικόνα 42 φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος συνεχούς χρόνου μιας εισόδου και μιας εξόδου.



Εικόνα 42. Σύστημα συνεχούς χρόνου

Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου μετασχηματίζει το σήμα εισόδου $x(t)$ στο σήμα εξόδου $y(t)$ ως εξής:

$$y(t) = \Gamma(x(t)) \quad (7.1)$$

Ομοίως, ένα σύστημα διακριτού χρόνου μετασχηματίζει το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ (διέγερση) στο σήμα διακριτού χρόνου $y(n)$ (απόκριση) ως εξής:

$$y(n) = \Gamma(x(n)) \quad (7.2)$$

7.1 Ταξινόμηση συστημάτων

Τα συστήματα διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με την αντίστοιχη κατηγορία των σημάτων εισόδου και εξόδου, σε χρονοσυνεχή (Αναλογικά) ή χρονοδιακριτά (Ψηφιακά). Ακόμη, μιλάμε για τα υβριδικά συστήματα, όπου τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικά είδη.

Τα χρονοσυνεχή (αναλογικά) συστήματα, κατά τη μελέτη τους, συνήθως καταλήγουν να εκφράζονται Μαθηματικά από «Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές», που λύνονται καλύτερα για τις Τεχνολογικές Εφαρμογές όχι μέσω των κλασσικών μαθηματικών μεθόδων, όπως των προσδιοριστέων συντελεστών ή του Lagrange, αλλά μέσω των Μετασχηματισμών Laplace και Fourier.

Αντίθετα, τα χρονοδιακριτά (ψηφιακά) συστήματα καταλήγουν να εκφράζονται μαθηματικά από «Γραμμικές εξισώσεις Διαφορών με σταθερούς συντελεστές», που οι λύσεις τους αντιμετωπίζονται καλύτερα μέσω του αντίστοιχου Μετασχηματισμού Z (Ζήτα).

Ο σκοπός της χρήσης ενός μετασχηματισμού γενικά στις τεχνολογικές

εφαρμογές, όπως είδαμε διεξοδικά στα προηγούμενα, είναι να δημιουργηθεί ένα νέο πεδίο, όπου εκεί είναι ευκολότερο να μελετηθεί το εξεταζόμενο πρόβλημα απ' ότι στο αρχικό πεδίο (συνήθως από το αρχικό πεδίο σημάτων ως προς τον χρόνο t πάμε στο νέο πεδίο σημάτων ως προς τη συχνότητα s ή ω). Οπότε, παίρνοντας τα μετασχηματισμένα αποτελέσματα, μπορούμε μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού να έχουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα στο αρχικό πεδίο και αμφίδρομα.

Επίσης, ένα σύστημα μπορεί να δέχεται στην είσοδο την εισαγωγή ενός σήματος ή και περισσότερων και να εξάγει ένα ή περισσότερα σήματα στην έξοδο. Εμείς θα αναφερθούμε σε συστήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (συστήματα SISO, Single Input - Single Output).

Συστήματα με πολλές εισόδους και μια έξοδο (αθροιστής), αναφέρονται ως MISO (Multi Input - Single Output), ενώ αυτά με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους ως MIMO (Multi Input - Multi Output). Βέβαια, στην πράξη έχουμε διασύνδεση πολλών συστημάτων μεταξύ τους, όπως π.χ. σ' ένα ηχητικό σύστημα, όπου διασυνδέονται τα υποσυστήματα ενός ραδιοφώνου, ενός cd player ή ενός μαγνητοφώνου με ενισχυτή και διάφορα μεγάφωνα.

7.1.1 Συστήματα με ή χωρίς μνήμη

Ένα σύστημα ανήκει στην κατηγορία των συστημάτων χωρίς μνήμη, όταν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της εισόδου στην ίδια χρονική στιγμή.

Ένα σύστημα, του οποίου η έξοδος εξαρτάται και από τις προηγούμενες τιμές της εισόδου, ονομάζεται σύστημα με μνήμη ή δυναμικό σύστημα. Για παράδειγμα, το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = \alpha x^2(t) + \beta x(t) \quad (7.3)$$

είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^n a_i x(i) \quad (7.4)$$

είναι ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου.

7.1.2 Αιτιοκρατικά συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται αιτιοκρατικό αν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνον από παρούσες ή προηγούμενες τιμές της εισόδου του. Έτσι, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση:

$$y(t) = ax^2(t) + bx(t-1) \quad (7.5)$$

είναι αιτιοκρατικό, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y(t) = ax(t+1) + bx(t+2) \quad (7.6)$$

χαρακτηρίζεται ως μη αιτιοκρατικό, διότι η έξοδος του εξαρτάται από επόμενες τιμές της εισόδου του.

7.1.3 Ευσταθή συστήματα

Ένα σύστημα είναι ευσταθές, όταν για κάθε απολύτως φραγμένη είσοδο του παρουσιάζει επίσης απολύτως φραγμένη έξοδο. Δηλαδή όταν:

$$|x(t)| < k_x \quad \text{είναι και} \quad |y(t)| < k_y$$

Για παράδειγμα, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (7.9).

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (7.9)$$

είναι ασταθές, διότι για τη φραγμένη είσοδο του $x(t) = u(t)$ (βηματική συνάρτηση) παρουσιάζει τη μη φραγμένη έξοδο $y(t) = t$ για $t > 0$.

Το σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τη σχέση (7.10)

$$y(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m a_i x(n-1), \quad \text{όπου } a_i \in \mathfrak{R} \quad (7.10)$$

είναι ευσταθές, διότι αν $x(i)$ είναι φραγμένη τότε και η έξοδος του είναι φραγμένη ως γραμμικός συνδυασμός φραγμένων συναρτήσεων.

7.1.4 Χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε χρονική στιγμή t η οποιαδήποτε χρονική ολίσθηση t_0 στο σήμα εισόδου προκαλεί την ίδια χρονική ολίσθηση στο σήμα εξόδου.

$$\Gamma(x(t-t_0)) = y(t-t_0) \quad (7.11)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η κατηγορία συστημάτων υπάρχει και για τα συστήματα διακριτού χρόνου.

$$\Gamma(x(n-n_0)) = y(n-n_0) \quad (7.12)$$

7.1.5 Γραμμικά Συστήματα

Η κατηγορία αυτή συστημάτων υπάρχει τόσο για συστήματα συνεχούς χρόνου όσο και για συστήματα διακριτού χρόνου. Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό, όταν ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\Gamma(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (7.13)$$

όπου $y_1(t) = \Gamma(x_1(t)), y_2(t) = \Gamma(x_2(t))$

Παράδειγμα:

Τα παρακάτω συστήματα χαρακτηρίζονται ως εξής:

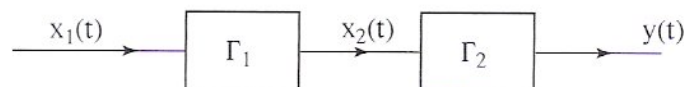
$$y(n) = ax(n-m) \quad \text{γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο.}$$

$$y(t) = t^2x(t) \quad \text{γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο.}$$

$$y(t) = |x(t)| \quad \text{μη γραμμικό.}$$

7.1.6 Διασύνδεση Συστημάτων

Κάθε σύστημα, το οποίο περιλαμβάνει επί μέρους υποσυστήματα, είναι δυνατόν να παρασταθεί με ένα σχηματικό διάγραμμα ροής σήματος. Στην Εικόνα 43 φαίνεται η σειριακή διασύνδεση δύο υποσυστημάτων (ή σύνδεση σε διαδοχή).



Εικόνα 43. Σειριακή διασύνδεση δύο υποσυστημάτων

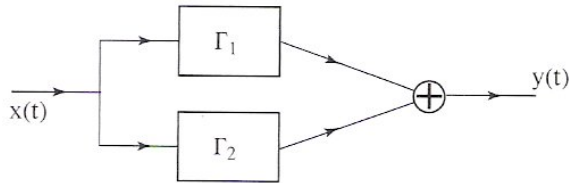
Προφανώς:

$$x_2(t) = \Gamma_1(x_1(t)) \quad (7.14)$$

και

$$y(t) = \Gamma_2(x_2(t)) = \Gamma_2[\Gamma_1(x_1(t))] \quad (7.15)$$

Αντίστοιχα, στην Εικόνα 44 φαίνεται η παράλληλη διασύνδεση δύο υποσυστημάτων.



Εικόνα 44. Παράλληλη διασύνδεση δύο υποσυστημάτων

Προφανώς:

$$y(t) = \Gamma_1(x(t)) + \Gamma_2(x(t)) \quad (7.16)$$

7.1.7 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Η γραμμικότητα και η χρονική σταθερότητα των συστημάτων παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι πολλές φυσικές διαδικασίες είναι δυνατό να προτυποποιηθούν χρησιμοποιώντας γραμμικά - χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Για το λόγο αυτό, τα συστήματα αυτά θα εξετασθούν με λίγο περισσότερες λεπτομέρειες.

7.2 Κρουστική απόκριση

α. Συστήματα συνεχούς χρόνου

Η απόκριση ενός συστήματος, όταν στην είσοδο του εφαρμόζεται η συνάρτηση $\delta(t)$, ορίζεται ως η κρουστική απόκριση του συστήματος:

$$h(t) = \Gamma(\delta(t)) \quad (7.17)$$

Για τα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα ισχύει:

$$h(t - \tau) = \Gamma(\delta(t - \tau)) \quad (7.18)$$

β. Συστήματα διακριτού χρόνου

Η κρουστική απόκριση ορίζεται μέσω της σχέσης (7.19).

$$h(n) = \Gamma(\delta(n)) \quad (7.19)$$

Το συνελικτικό ολοκλήρωμα – άθροισμα

Η απόκριση ενός γραμμικού - χρονικά αμετάβλητου συστήματος Γ σε κάθε σήμα εισόδου $X(t)$ δίδεται από τη σχέση (7.20).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (7.20)$$

ή συμβολικά

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (7.21)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση και με (*) συμβολίζεται η συνέλιξη δύο συναρτήσεων. Ισχύουν οι παρακάτω βασικές ιδιότητες της συνέλιξης:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

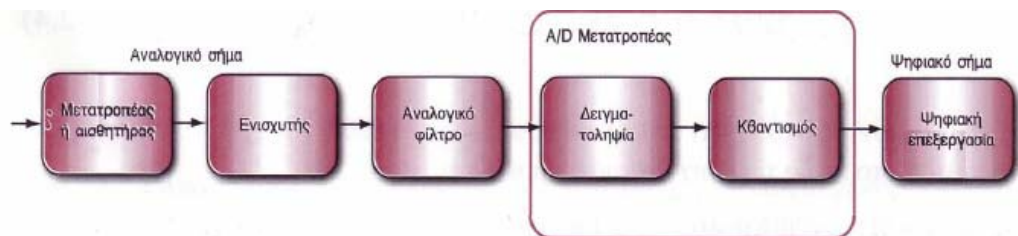
$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Κεφάλαιο 8.

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία είναι η μία εκ των τριών (Δειγματοληψία (Sampling), Κβαντοποίηση (Quantization) και Κωδικοποίηση (Encoding)) βασικών διαδικασιών επεξεργασίας στην παλμοκωδική διαμόρφωση PCM, η οποία με τη σειρά της αποτελεί μία εκ των δύο διαδικασιών μετατροπής αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά (η άλλη είναι η διαμόρφωση Δ).



Εικόνα 45. Διαδικασία μετατροπής αναλογικού σήματος σε ψηφιακό

Δειγματοληψία, λοιπόν, είναι η επεξεργασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχές στο πεδίο του χρόνου δειγματοληπτείται μετρώντας το πλάτος του επιλεκτικά σε διακριτές τιμές του χρόνου. Όταν αυτές οι χρονικές στιγμές

επιλεγούν μάλιστα να ισαπέχουν μεταξύ τους, τότε έχουμε τη λεγόμενη «ομοιόμορφη δειγματοληψία». Η παρουσίαση των τιμών πλάτους με ένα πεπερασμένο πλήθος σταθμών πλάτους, λέγεται κβαντοποίηση. Η αντιστοιχία κάθε στάθμης πλάτους με ένα κώδικα λέγεται κωδικοποίηση και θα την δούμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Δηλαδή, η δειγματοληψία μετατρέπει ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε σήμα διακριτού χρόνου. Η κβαντοποίηση μετατρέπει συνεχές πλάτος σε διακριτές τιμές πλάτους.



Εικόνα 46. Ρόλος δειγματοληψίας

8.1 Δειγματοληψία αναλυτικά

Η διαδικασία της δειγματοληψίας, για να είναι αξιόπιστη και αποτελεσματική, απαιτεί προϋποθέσεις που εκφράζονται συνήθως μέσω μαθηματικών σχέσεων (πχ. Θεώρημα Shannon, η συχνότητα αποκοπής Nyquist) και που αποτελούν κυρίως το αντικείμενο της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων. Η χρήση του διακριτού σήματος αντί του αναλογικού είναι δυνατή, γιατί, υπό ορισμένες παραδοχές, το διακριτό σήμα είναι απόλυτα αντιπροσωπευτικό του αντίστοιχου συνεχούς, αυτού δηλαδή από το οποίο υπολογίσθηκε.

Θα πρέπει, επίσης, να υπάρχει η δυνατότητα ακριβούς αναπαράστασης και ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από τα δείγματα του ψηφιακού σήματος.

8.1.1 Σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης

Ένα σήμα $m(t)$ λέγεται περιορισμένου εύρους ζώνης, όταν έχει μία μέγιστη συχνότητα f_m . Δηλαδή, όλες οι φασματικές συνιστώσες του

σήματος έχουν συχνότητα μικρότερη από f_m . Αν $M(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $m(t)$ τότε για ένα σήμα περιορισμένου εύρους ισχύει:

$$M(f) = 0 \text{ για } f > f_m \quad (8.1)$$

8.1.2 Διαδικασία δειγματοληψίας

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε το θεώρημα της δειγματοληψίας, ας θεωρήσουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ με μέγιστη συχνότητα f_0 , του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ φαίνεται στην Εικόνα 47, και ας υποθέσουμε ότι το δειγματοληπτούμε ομοιόμορφα.

Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τον πολλαπλασιασμό του σήματος επί την παρακάτω συνάρτηση:

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

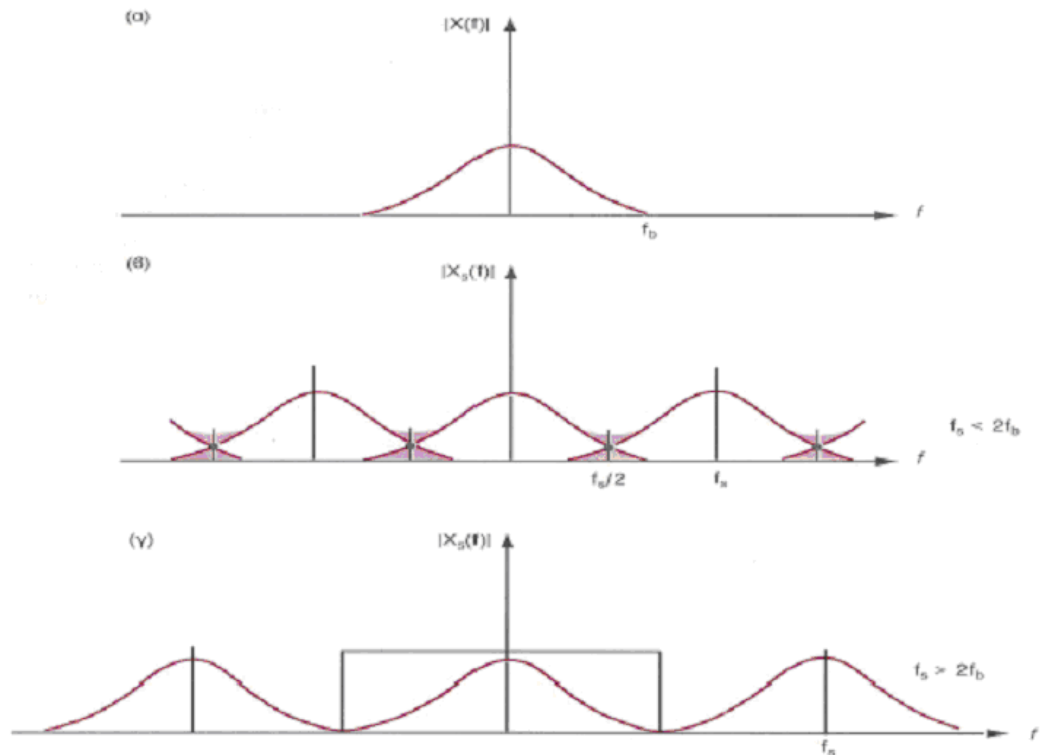
όπου $\delta(t)$ είναι η συνάρτηση Dirac, k ένας ακέραιος και T_s η περίοδος δειγματοληψίας. Το διακριτό σήμα προκύπτει ως εξής:

$$x_s(t) = x(t)i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου συνεπάγεται συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων, προκύπτει:

$$X_s(f) = X(f) * I(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) \quad (8.2)$$

όπου $f_s = \frac{1}{T_s}$ είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.



(α) Μετασχηματισμός Fourier του αρχικού σήματος, (β) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν $f_s < 2f_b$ (γ) Μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος όταν $f_s > 2f_b$. Οι σκούρες περιοχές στο (β) υποδηλώνουν τις αναδιπλούμενες συχνότητες.

Εικόνα 47. Αποτέλεσμα της συχνότητας δειγματοληψίας f_s σε σήμα μέγιστης συχνότητας f_b

Έτσι, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 47, στις περιπτώσεις β και γ ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $X_s(f)$ είναι και αυτός περιοδικός και αποτελείται από μια σειρά πανομοιότυπων επαναλήψεων του $X(f)$, που έχουν ως κέντρο πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας.

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι αρμονικές συχνότητες του $X(f)$, που είναι μεγαλύτερες από την $f_s/2$, εμφανίζονται, όταν $f_s < 2f_b$ διπλωμένες στις χαμηλότερες αρμονικές.

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται επικάλυψη και, όταν συμβαίνει, η αρχική πληροφορία δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί, γιατί οι αρμονικές του αρχικού σήματος είναι ανεπανόρθωτα αλλοιωμένες από τις επικαλύψεις των μετατοπισμένων εκδόσεων του $X(f)$.

Μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το φαινόμενο, όταν το αρχικό σήμα έχει πεπερασμένο εύρος συχνοτήτων ($X(f) = 0$ για $f > f_b$) και η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s > 2f_b$.

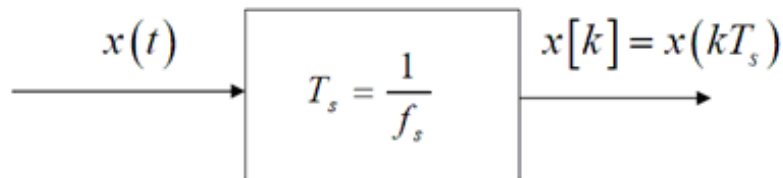
Σε αυτή την περίπτωση (όπως φαίνεται και στην περίπτωση (γ)) δε συμβαίνει επικάλυψη και η αρχική κυματομορφή μπορεί να ανακατασκευαστεί από το διακριτό σήμα με χρήση βαθυπερατών φίλτρων.

Η υπόθεση του πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων του σήματος συνήθως δεν ισχύει στην πράξη, λόγω των χαρακτηριστικών του σήματος και της επίδρασης θορύβου μεγάλου εύρους.

Είναι πάντα ανάγκη πριν από τη δειγματοληψία το σήμα να φιλτράρεται, ακόμα και όταν υποθέτουμε ότι το σήμα μας είναι ήδη πεπερασμένης συχνότητας.

8.1.3 Παράδειγμα

Στο παρακάτω παράδειγμα αναφέρουμε αναλυτικά επακριβώς το θεώρημα δειγματοληψίας, τις συνθήκες που αυτό προδιαγράφει, καθώς και τις επιπτώσεις που προκύπτουν με μαθηματική ανάλυση (φαινόμενο επικάλυψης), αν αυτές οι συνθήκες δεν ικανοποιούνται.



Εικόνα 48. Σύστημα ιδανικής δειγματοληψίας

Η παραπάνω εικόνα δείχνει ένα σύστημα ιδανικής δειγματοληψίας και άρα μετατροπής σημάτων συνεχούς χρόνου σε σήματα διακριτού χρόνου.

Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ή} \quad x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad \text{όπου}$$

ω_0 : η κυκλική συχνότητα (σε ακτίνια/sec) και

f_0 : η συχνότητα (σε Hz) του σήματος.

Το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου $X[k]$ προκύπτει από τη δειγματοληψία του $X(f)$ μέσω του συστήματος ιδανικής δειγματοληψίας περιόδου δειγματοληψίας T . Άρα, τα δείγματα θα δίνονται από την:

$$x[k] = x(kT_s) = A \cos(\omega_0 kT_s + \varphi)$$

$$x[k] = A \cos(2\pi f_0 kT_s + \varphi) = A \cos\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s} + \varphi\right)$$

όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

Τα δείγματα $x[k]$ δεν μπορούν πάντα να χρησιμοποιηθούν για την αξιόπιστη ανακατασκευή του αρχικού σήματος $x(t)$. Αυτό συμβαίνει, διότι σε σχέση με τη συχνότητα f_0 ενός σήματος και τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s , περισσότερα από ένα σήματα $x(t) \neq y(t)$ συνεχούς χρόνου μπορούν να έχουν τα ίδια δείγματα διακριτού χρόνου $x[k] = y[k]$.

Άρα, για την ανακατασκευή ενός σήματος $x(t)$ από τα δείγματα του $x[k]$ πρώτα από όλα χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε την συχνότητα δειγματοληψίας f_s .

Μια άλλη χρήσιμη πληροφορία είναι η επιλογή της συχνότητας δειγματοληψίας. Πόσο συχνά, δηλαδή, θα πρέπει να λαμβάνουμε δείγματα ενός σήματος, έτσι ώστε να είναι δυνατή η αξιόπιστη αναπαραγωγή του από τα δείγματα.

Τη συνθήκη, που θα πρέπει να ικανοποιεί η συχνότητα δειγματοληψίας f_s , μας δίνει το Θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, το οποίο λέει ότι :

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $X(f)$, το οποίο περιέχει συχνότητες όχι υψηλότερες της f_{max} , μπορεί να αναπαραχθεί επακριβώς από τα δείγματα του $x[k] = X(kT_s)$, αν τα δείγματα λαμβάνονται με συχνότητα $f_s = \frac{1}{T_s}$, η

οποία είναι μεγαλύτερη από $2f_{max}$.

Η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται συχνότητα Nyquist.

Άρα, κατά το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, για να είναι εφικτή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος από τα δείγματα του, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist .

$$f_s > 2f_{\max}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα τι γίνεται, αν η παραπάνω συνθήκη δεν ισχύει. Τι γίνεται, δηλαδή, αν δεν εκτελούμε τις δειγματοληψίες αρκετά γρήγορα. Προσεγγίζουμε αρχικά το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου και στη συνέχεια θα το εξετάσουμε στο πεδίο της συχνότητας, για να δούμε την επίδραση της επιλογής της συχνότητας δειγματοληψίας.

Θεωρήστε ένα άλλο συνημιτονικό σήμα συνεχούς χρόνου συχνότητας $f_0 + nf_s$, που είναι το:

$$y(t) = A \cos[2\pi(f_0 + nf_s)t + \varphi]$$

όπου f_0 είναι η συχνότητα του σήματος και n είναι ακέραιος.

Αν θεωρήσουμε τη δειγματοληψία $y[k]$ του σήματος $y(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας f_s ίση με αυτήν του αρχικού σήματος τότε είναι εύκολο να δούμε ότι τα δύο δείγματα $x[k]$ και $y[k]$ είναι τα ίδια:

$$\begin{aligned} y[k] &= y(kt_s) \\ &= A \cos[2\pi(f_0 + nf_s)kt_s + \varphi] \\ &= A \cos[2\pi f_0 kt_s + 2\pi n f_s kt_s + \varphi] \\ &= A \cos[2\pi f_0 kt_s + 2\pi n f_s k \frac{1}{f_s} + \varphi] \\ &= A \cos[2\pi f_0 kt_s + 2\pi nk + \varphi] \\ &= A \cos[2\pi f_0 kt_s + \varphi] \\ &= x[k] \end{aligned}$$

Άρα η δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = \frac{1}{T_s}$ των συνημιτονικών σημάτων

$x(t)$ και $y(t)$, όπως τα παραπάνω, με συχνότητες

$$f_0, f_0 \pm f_s, f_0 \pm 2f_s, f_0 \pm 3f_s$$

θα δημιουργήσει τα ίδια δείγματα $x[k]$. Το ίδιο θα γίνει με τη

δειγματοληψία με συχνότητα $f_s = \frac{1}{T_s}$ συνημιτονικών σημάτων με συχνότητες

$$-f_0, -f_0 \pm f_s, -f_0 \pm 2f_s, -f_0 \pm 3f_s$$

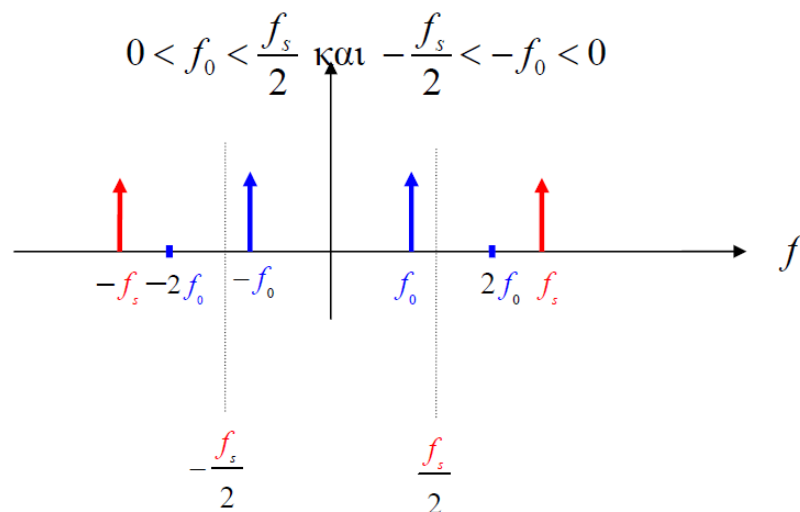
Τα σήματα με συχνότητες $\pm f_0, \pm n f_s$ για $n=1,2,\dots$ τα ονομάζουμε «ψευδώνυμα» (aliases) του αρχικού σήματος $x(t)$ με συχνότητα f .

Σκοπός μας είναι η αναπαραγωγή του αρχικού σήματος $x(t)$ από τα δείγματα $x[k]$ και όχι των ψευδωνύμων.

Για την καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος δειγματοληψίας του Shannon κάνουμε τώρα χρήση των γραμμικών φασμάτων συχνοτήτων των παραπάνω σημάτων.

Όπως αναφέρεται στο θεώρημα του Shannon, αν η συχνότητα δειγματοληψίας f_s είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της συχνότητας f_0 του σήματος $x(t)$, τα προβλήματα που συνδέονται με τα δείγματα των ψευδωνύμων σημάτων μπορούν να αποφευχθούν.

Έστω, λοιπόν, ότι η συχνότητα δειγματοληψίας f_s ικανοποιεί τη σχέση $f_s > 2f_0$, η οποία συνεπάγεται τις σχέσεις:



Τότε τα δείγματα θα είναι:

$$x[k] = x(kT_s) = A \cos(\omega_0 kT_s + \varphi)$$

$$x[k] = A \cos(2\pi f_0 kT_s + \varphi) = A \cos\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s} + \varphi\right)$$

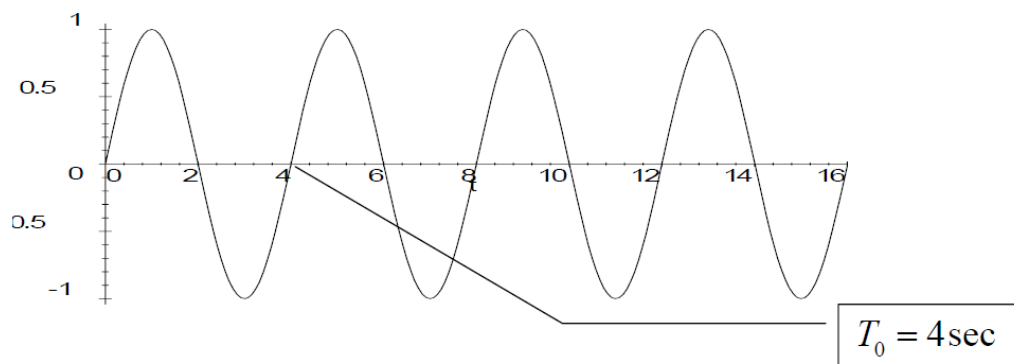
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ημιτονικό σήμα $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ με περίοδο $T_0 = 4\text{sec}$, όπως φαίνεται

στο σχήμα, άρα συχνότητα $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4}\text{Hz}$ και γωνιακή συχνότητα

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2 \times \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \text{rad/sec}$$

έτσι ώστε το σήμα να γράφεται $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.



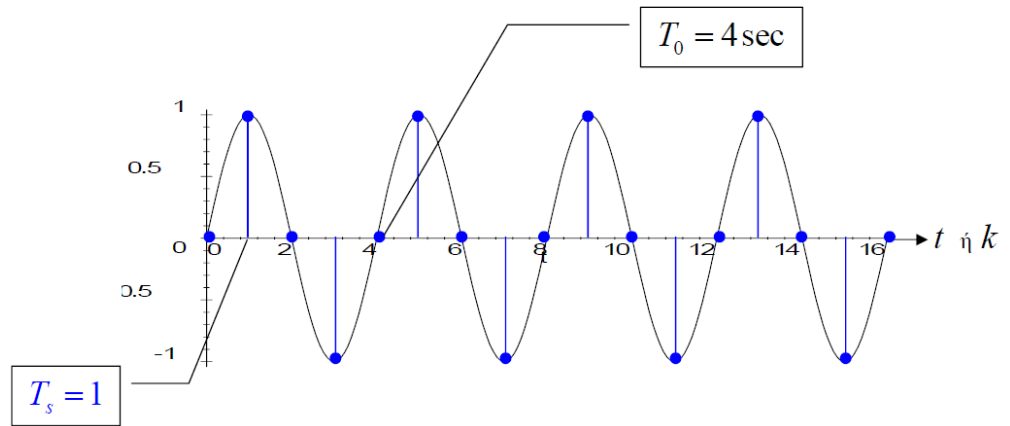
Για το παραπάνω σήμα είναι $2f_0 = 0,5$.

Έστω ότι για το παραπάνω σήμα επιλέγουμε συχνότητα δειγματοληψίας f_s , η οποία ικανοποιεί την απαίτηση του θεωρήματος Shannon και είναι $F_s = 1)0,5 = 2f_0$.

Η περίοδος δειγματοληψίας, που αντιστοιχεί, είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = 1\text{sec}$ και τα

δείγματα θα είναι :

$$x[k] = \sin\left(\frac{\pi}{2}kT_s\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k \frac{1}{f_s}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$



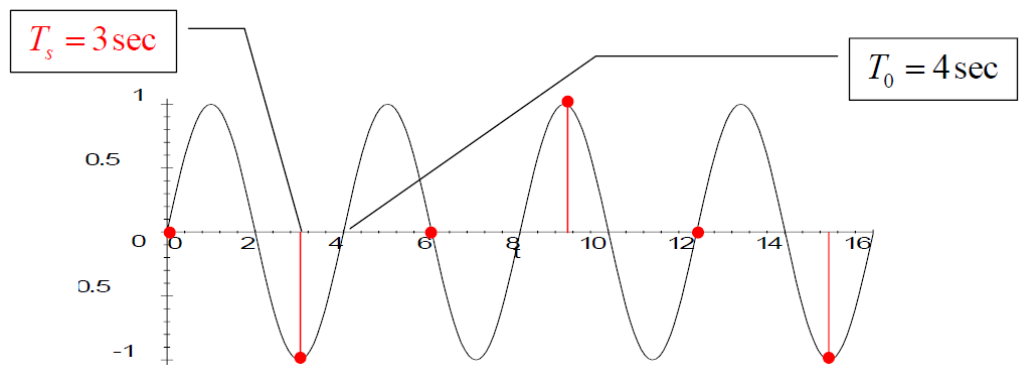
Πρόκειται για ημιτονικό σήμα με περίοδο $T_0 = 4\text{sec}$ και η δειγματοληψία του με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1\text{sec}$.

Αν όμως επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας, η οποία δεν ικανοποιεί την απαίτηση του θεωρήματος του Shannon, αν δηλαδή επιλέξουμε

$$F_s = \frac{1}{3} \langle 0,5 = 2f_0$$

τότε η περίοδος δειγματοληψίας θα είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = 3\text{sec}$ και τα δείγματα θα είναι όπως στο σχήμα που ακολουθεί.

$$x[k] = x(kT_s) = \sin(\omega_0 kT_s) = \sin(2\pi f_0 kT_s) = \sin\left(2\pi k \frac{f_0}{f_s}\right) = \sin\left(2\pi k \frac{4}{1} \frac{1}{3}\right) = \sin\left(\pi k \frac{3}{2}\right)$$

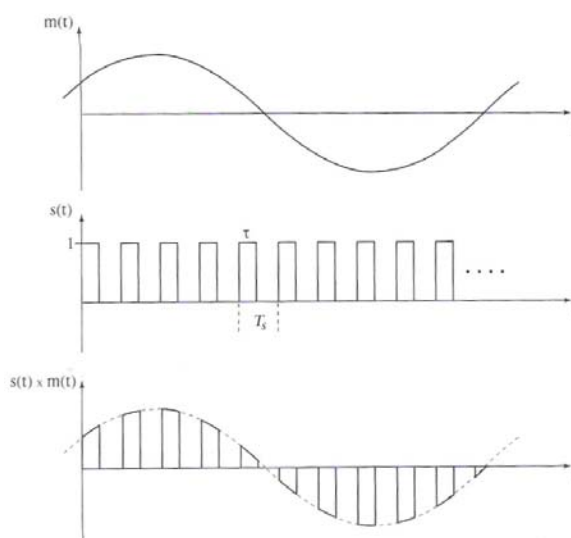


Δηλαδή ημιτονικό σήμα με περίοδο $T_0 = 4\text{sec}$ και η δειγματοληψία του με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 3\text{sec}$.

8.2 Φυσική δειγματοληψία

Επειδή στην πράξη τόσο στενοί παλμοί είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν, η δειγματοληψία γίνεται με πραγματικούς παλμούς, οι οποίοι έχουν κάποιο περιορισμένο χρονικό εύρος τ . Στην περίπτωση αυτή ονομάζεται φυσική δειγματοληψία (natural sampling).

Στη φυσική δειγματοληψία τα δείγματα $m(nT_s)$ δεν έχουν σταθερό πλάτος, όπως συμβαίνει στην ιδανική δειγματοληψία, αλλά ακολουθούν τη μεταβολή του σήματος $m(t)$ στο χρονικό διάστημα τ . Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας φαίνεται στην Εικόνα 49.

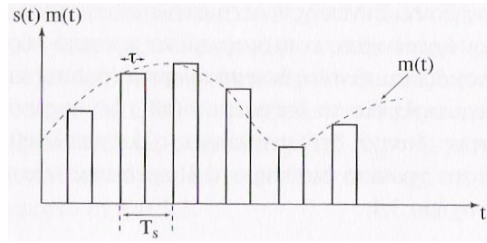


Εικόνα 49. Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας

8.3 Δειγματοληψία σταθερού πλάτους

Στη φυσική δειγματοληψία τα δείγματα έχουν πλάτος, το οποίο μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια τ . Στην πράξη όμως προτιμώνται δείγματα σταθερού πλάτους.

Για το σκοπό αυτό, κατά την έναρξη της δειγματοληψίας διατηρείται η αρχική τιμή του δείγματος σταθερή σε όλη την διάρκεια του παλμού τ . Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας με δείγματα σταθερού πλάτους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 50).



Εικόνα 50. Παράδειγμα φυσικής δειγματοληψίας με δείγματα σταθερού πλάτους

Ασκήσεις

1. Δίνεται το αναλογικό σήμα $x(t) = 2 \cos 100\pi t$.

(α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται, ώστε να αποφύγουμε το φαινόμενο της χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας (aliasing),

(β) Θεωρήστε ότι λαμβάνονται δείγματα του σήματος με ρυθμό $F_s = 200\text{Hz}$. Ποιο το σήμα διακριτού χρόνου το οποίο θα προκύψει μετά τη δειγματοληψία;

(γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) για ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 75\text{Hz}$.

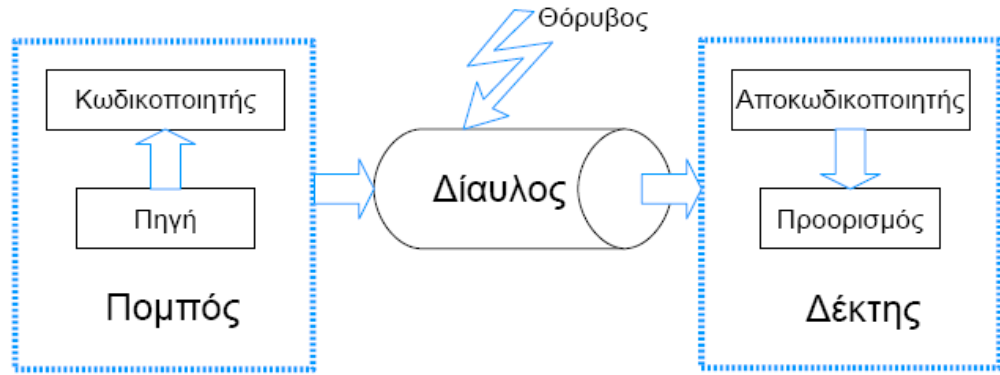
(δ) Για $F_s = 75\text{Hz}$, ποια η συχνότητα F_0 , όπου $-F_s/2 \leq F_0 \leq F_s/2$ του ημιτονοειδούς το οποίο δίνει τα ίδια ακριβώς δείγματα με εκείνα που πήραμε στην περίπτωση (γ);

Κεφάλαιο 9.

Κανάλι-Σύστημα

Εισαγωγικά

Ο δίαυλος επικοινωνίας ή κανάλι είναι υπεύθυνο για τη μεταφορά της πληροφορίας από την είσοδο στην έξοδο του. Η πηγή πληροφορίας A , $P(A)$, που προσαρμόζεται στην είσοδο του, εμφανίζεται στην έξοδο του σαν πηγή πληροφορίας B , $P(B)$. Η μεταφορά πληροφορίας είναι μια φυσική διαδικασία, η οποία επηρεάζεται από τον περιβάλλοντα θόρυβο και άλλες ατέλειες της ίδιας της διαδικασίας. Συνεπώς, γενικά οι δύο πηγές πληροφορίας A και B θα είναι διαφορετικές. Η επικοινωνία θεωρείται επιτυχημένη, όταν ο πομπός συμφωνεί με τον δέκτη σχετικά με το περιεχόμενο του μηνύματος που στάλθηκε. Στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 51) φαίνεται ένα σύστημα επικοινωνίας.



Εικόνα 51. Σύστημα επικοινωνίας

Η κάθε πιθανή ακολουθία συμβόλων στην είσοδο συνεπάγεται μια κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων στην έξοδο. Δύο διαφορετικές ακολουθίες εισόδου μπορεί να δημιουργήσουν την ίδια ακολουθία στην έξοδο και άρα δεν θα είναι ξεκάθαρο ποια ακολουθία ήταν στην είσοδο. Ένα από τα προβλήματα που αφορούν τη σχεδίαση ενός συστήματος επικοινωνίας είναι η επιλογή ενός υποσυνόλου των πιθανών ακολουθιών συμβόλων στην είσοδο, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε μεταξύ τους, να υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα ανακατασκευής της ακολουθίας εισόδου με βάση την παρατήρηση στην έξοδο με αμελητέα πιθανότητα σφάλματος. Ο μέγιστος ρυθμός, στον οποίο μπορούμε να το πετύχουμε αυτό, ονομάζεται χωρητικότητα του καναλιού.

Δίαυλος επικοινωνίας

Πολύ σημαντική είναι η σχέση της θεωρίας κωδίκων με το δίαυλο που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση της πληροφορίας. Η θεωρία κωδίκων και οι λύσεις που προσφέρει χαρακτηρίζονται από άμεση εξάρτηση από το είδος του καναλιού, διαμέσου του οποίου πραγματοποιείται η διάδοση της πληροφορίας. Αν ανατρέξουμε στο μοντέλο του τυπικού τηλεπικοινωνιακού συστήματος, παρατηρούμε ότι μεταξύ του κωδικοποιητή και του αποκωδικοποιητή παρεμβάλλονται τρεις επιπλέον δομές, ο διαμορφωτής, ο δίαυλος και ο αποδιαμορφωτής. Οι δομές αυτές αποτελούν το διακριτό δίαυλο. Η είσοδος και η έξοδος του διακριτού

διαύλου είναι δυαδικές ακολουθίες με ρυθμό δεδομένων r_c bps. Αν η έξοδος του αποκωδικοποιητή εξαρτάται αποκλειστικά από την ακολουθία δυαδικών ψηφίων που μεταδίδεται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και όχι από μπλοκ δεδομένων που προηγήθηκαν, ο εν λόγω διάυλος δεν έχει μνήμη.

Δεδομένου ότι ο θόρυβος ασκεί την ίδια επίδραση σε όλα τα μεταδιδόμενα δυαδικά ψηφία, διαδίδεται δηλαδή με την ίδια πιθανότητα σε όλα τα bits χωρίς να υπάρχει μνήμη της επίδρασης, αναφερόμαστε στον Διακριτό Δίαυλο Χωρίς Μνήμη (Discrete Memoryless Channel, DSC).

Η πιθανότητα λήψης ενός εσφαλμένου δυαδικού ψηφίου, εξαιτίας της επίδρασης του θορύβου, είναι ίση για όλα τα μεταδιδόμενα ψηφία, ανεξάρτητα από τη θέση που κατέχουν μέσα στο μεταδιδόμενο μπλοκ. Η πιθανότητα ορθής λήψης ενός συμβόλου αναπαρίσταται με το σύμβολο p και, επειδή η πιθανότητα αυτή είναι ίδια για όλα τα σύμβολα, ο διάυλος ονομάζεται συμμετρικός. Αν θεωρήσουμε ότι το πλήθος των δυνατών τιμών που μπορούν να πάρουν τα ψηφία που μεταδίδονται είναι m , το κανάλι αποκαλείται m -συμμετρικό (m -symmetric channel). Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι η μετάδοση δυαδικών ψηφίων, δηλαδή μόνο των ψηφίων 0 και 1 και το κανάλι ονομάζεται Δυαδικό Συμμετρικό (Binary Symmetric Channel, BSC). Στην απλή θεωρία της κωδικοποίησης όλα τα κανάλια θεωρούνται δυαδικά συμμετρικά. Η αξιοπιστία του διαύλου επικοινωνίας εκφράζεται με την πιθανότητα ορθής λήψης p , δηλαδή με το κατά πόσο το ψηφίο που στέλνει η πηγή είναι ίδιο με αυτό που έφτασε στην πλευρά του δέκτη. Ένα κανάλι με πιθανότητα $p=1$ είναι το πλέον αξιόπιστο, καθώς δεν εισάγει καθόλου θόρυβο, ενώ αντίθετα το κανάλι με πιθανότητα $p = 0$ δεν έχει κανένα νόημα, καθώς οδηγεί στη εσφαλμένη μετάδοση όλων των ψηφίων που αποστέλλονται. Στην πράξη, όλοι οι τηλεπικοινωνιακοί δίαυλοι έχουν πιθανότητα με τιμές που κυμαίνονται από $\frac{1}{2}$ ως 1 ($\frac{1}{2} < p < 1$).

9.1 Διακριτά κανάλια επικοινωνίας

Διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη έχουμε, όταν η κατανομή των

πιθανοτήτων της εξόδου εξαρτάται από την είσοδο μόνο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή και είναι ανεξάρτητη από τα σύμβολα εισόδου ή εξόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Χωρητικότητα πληροφοριακού καναλιού, ενός διακριτού και χωρίς μνήμη καναλιού:

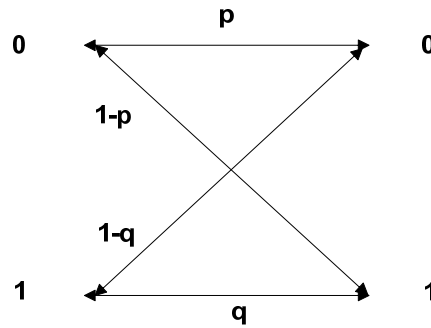
$$C = \max_{p(x)} I(X; Y)$$

$$= \max_{p(x)} \{H(X) - H(X/Y)\} = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y/X)\} \text{ bits/symbol}$$

όπου η μέγιστη τιμή προσδιορίζεται από τη σύγκριση όλων των δυνατών κατανομών εισόδου $p(x)$.

Όπως αναφέραμε, η πληροφορία που εκπέμπει η πηγή υπόκειται σε ειδική επεξεργασία, την κωδικοποίηση, ώστε να λάβει κατάλληλη για τη μετάδοσή της από το κανάλι μορφή. Ένα σύμβολο (ακολουθία συμβόλων), λοιπόν, μετά από αυτή την επεξεργασία αναπαρίσταται από μία κωδική λέξη, δηλαδή ακολουθία κωδικών συμβόλων, η οποία αποτελεί και την είσοδο του καναλιού επικοινωνίας. Αντίστοιχα, η έξοδος του καναλιού είναι επίσης μια ακολουθία κωδικών συμβόλων. Ωστόσο, η ακολουθία κωδικών συμβόλων εξόδου μπορεί να διαφέρει από την ακολουθία εισόδου, γεγονός που οφείλεται στα σφάλματα που προκύπτουν στο κανάλι εξαιτίας του θορύβου.

Το διακριτό κανάλι επικοινωνίας αποτελεί στοιχείο ενός συστήματος επικοινωνίας, όπως αυτό της εικόνας 51, όπου η πηγή πληροφορίας είναι μια διακριτή πηγή. Η μετάδοση δεδομένων μέσα από ένα διακριτό κανάλι χαρακτηρίζεται από τις πιθανότητες p_i και p_{ij} , με p_i η πιθανότητα στην είσοδο του καναλιού να βρίσκεται το i -οστό σύμβολο του κωδικού αλφαβήτου και p_{ij} η πιθανότητα το i -οστό σύμβολο, που βρισκόταν στην είσοδο, να ληφθεί σαν j -οστό σύμβολο στην έξοδο. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε δυαδικό αλφάβητο για την κωδικοποίηση δεδομένων, η μετάδοση των συμβόλων 0 και 1 μαζί με τις πιθανότητες για την ορθή ή με σφάλμα λήψη τους αναπαρίσταται στο παρακάτω σχήμα.



Έτσι, στην είσοδο του καναλιού έχουμε μια δυαδική τυχαία μεταβλητή X με δύο δυνατές τιμές και στην έξοδο επίσης μια δυαδική τυχαία μεταβλητή Y με επίσης δύο δυνατές τιμές, οι οποίες δείχνουν αν το κωδικό σύμβολο εισόδου εξέρχεται αναλλοίωτο από το κανάλι επικοινωνίας ή αν έχει υποστεί αλλοίωση και εξέρχεται από αυτό με διαφορετική τιμή. Συμβολίζουμε με x_i το κωδικό σύμβολο εισόδου και y_i το κωδικό σύμβολο εξόδου, με $i, j = 1, 2$, $x_1 = y_1 = 0$ και $x_2 = y_2 = 1$. Παράλληλα, έχουμε $p(x_i)$ και $p(y_j)$ για τις πιθανότητες να έχουμε στην είσοδο την τιμή x_i και στην έξοδο την τιμή y_i αντίστοιχα και $p_{ij} = p(y_j / x_i) = p(x_i / y_j)$, όπως έχει ειπωθεί, για την πιθανότητα το i -οστό σύμβολο στην είσοδο του καναλιού να λαμβάνεται στην έξοδο αυτού ως το j -οστό σύμβολο. Βάσει αυτών και του παραπάνω σχήματος για τη μετάδοση δεδομένων στο δυαδικό κανάλι, έχουμε $p_{11} = p$, $p_{12} = 1 - p$, $p_{21} = 1 - q$ και $p_{22} = q$. Στην περίπτωση που οι πιθανότητες ορθής μετάδοσης του 0 και του 1 μέσα από το κανάλι είναι ίσες, δηλαδή αν ισχύει $p = q$, το κανάλι μετάδοσης χαρακτηρίζεται ως δυαδικό συμμετρικό, οπότε και η πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος είναι ίση με $1 - p$. Γενικά στο δυαδικό συμμετρικό κανάλι, η πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος p_e υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 p_e &= p(X = x_1 = 0, Y = y_2 = 1) + p(X = x_2 = 1, Y = y_1 = 0) \\
 &= p(x_1)p_{12} + p(x_2)p_{21}
 \end{aligned}$$

Στηριζόμενοι στις σχέσεις που δίνουν την εντροπία ή μέση ποσότητα πληροφορίας, μπορούμε να υπολογίσουμε την εντροπία ή μέση ποσότητα πληροφορίας ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο της εισόδου και της

εξόδου του καναλιού, την υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορία της εξόδου, δεδομένης της εισόδου του καναλιού, και τη συνδυασμένη και αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^2 p(x_i) \log p(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^2 p(y_j) \log p(y_j)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i) p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i)$$

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(y_j) p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j)$$

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

$$= -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(y_j) p(x_i/y_j) \log p(y_j) p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p(x_i) \log p(y_j/x_i) \log p(x_i) p(y_j/x_i)$$

$$= H(X/Y) + H(Y) = H(Y/X) + H(X)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

Η υπό συνθήκη εντροπία $H(X/Y)$ εκφράζει το πόσο αβέβαιοι είμαστε για το σύμβολο της εισόδου x αν στην έξοδο έχει ληφθεί το y . Γι'αυτό καλείται και αβεβαιότητα και αποτελεί έναν τρόπο μέτρησης της μέσης αβεβαιότητας ως προς X , όταν είναι γνωστό το Y . Κατ'άναλογο τρόπο, η $H(Y/X)$ εκφράζει τη μέση αβεβαιότητα του Y , όταν είναι γνωστό το X , κάτι που οφείλεται στην επίδραση του θορύβου. Οι μέσες ποσότητες πληροφορίας $H(X)$ και $H(Y)$ δίνουν το μέσο αριθμό bits ανά σύμβολο, που απαιτούνται για την κωδικοποίηση της εισόδου και της εξόδου του καναλιού αντίστοιχα.

Όσον αφορά στην αμοιβαία πληροφορία $I(X; Y)$ μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού, αυτή εκφράζει την αβεβαιότητα που έχουμε για το

σύμβολο X πριν από τη λήψη του Y , μειωμένη κατά την αβεβαιότητα που εξακολουθούμε να έχουμε για το X μετά τη λήψη του και με δεδομένο το Y . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, πως η αμοιβαία πληροφορία σχετίζεται με την ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται από το κανάλι επικοινωνίας και για το λόγο αυτό μιλάμε για το ρυθμό μετάδοσης και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό R , αντί του $I(X;Y)$. Σε ένα κανάλι χωρίς θόρυβο οι υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/Y)$ και $H(Y/X)$ είναι ίσες με μηδέν, μιας και η έλλειψη του θορύβου δεν αλλοιώνει τη μετάδοση του συμβόλου, οπότε σ'αυτή την περίπτωση η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, η οποία είναι $H(X)$. Τονίζουμε πως η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας $I(X;Y)$ εξαρτάται επίσης από τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο $p(x_i)$ και για το λόγο αυτό είναι διαφορετική για διαφορετικές πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εισόδου σε ένα συγκεκριμένο κανάλι.

Η επίδραση του θορύβου στο κανάλι επικοινωνίας εκφράζεται από τις πιθανότητες p_{ij} (ή $p(y_j/x_i)$ ή $p(x_i/y_j)$), οι οποίες σχηματίζουν τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού, που ονομάζεται και πίνακας μετάβασης του καναλιού.

Παράδειγμα 9.4

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο πιθανά σύμβολα 0 και 1 και μεταδίδονται με ρυθμό 1000 σύμβολα ανά δευτερόλεπτο με πιθανότητες $p_0 = p_1 = 1/2$. Έτσι, η πηγή παράγει πληροφορίες με ρυθμό 1000 bits ανά δευτερόλεπτο. Κατά τη διάρκεια της μετάδοσης ο θόρυβος εισάγει λάθη, έτσι ώστε κατά μέσο όρο 1 στα 100 να λαμβάνονται με λάθη (το 0 ως 1 ή 1 ως 0). Ποιος λοιπόν είναι ο ρυθμός της μετάδοσης των πληροφοριών;

Λύση :

Σίγουρα λιγότερο από 1000 bits ανά δευτερόλεπτο, καθώς περίπου το 1% των ληφθέντων συμβόλων είναι λανθασμένα. Μια πρώτη εκτίμηση θα μπορούσε να είναι ότι ο ρυθμός είναι 990 bits ανά δευτερόλεπτο, αφαιρώντας τον αναμενόμενο αριθμό των λαθών. Αυτό όμως δεν είναι

αποδεκτό, δεδομένου ότι δεν γίνεται γνωστό ποια αιτία προκάλεσε τα σφάλματα. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο θόρυβος είναι τόσο μεγάλος που τα ληφθέντα σύμβολα είναι εντελώς ανεξάρτητα από τα μεταδιδόμενα σύμβολα. Η πιθανότητα λήψης 1 είναι $\frac{1}{2}$, όποια σύμβολα και να στάλθηκαν, ομοίως για 0. Έτσι, το ήμισυ περίπου των ληφθέντων συμβόλων είναι σωστά, αυτό βεβαίως αποτελεί ένα τυχαίο γεγονός.

Προφανώς, η κατάλληλη διόρθωση, που εφαρμόζεται στο ποσό των πληροφοριών που μεταδίδονται, είναι η ποσότητα των πληροφοριών που λείπει από το λαμβανόμενο σήμα ή εναλλακτικά η αβεβαιότητα, όταν λάβαμε ένα μήνυμα από αυτό που όντως εστάλη. Η εντροπία ως μέτρο της αβεβαιότητας είναι λογικό να χρησιμοποιεί την υπό συνθήκη εντροπία του μηνύματος, όντας γνωστό το λαμβανόμενο σήμα, ως το μέτρο των στοιχείων που υπολείπονται. Οπότε, ο ρυθμός μετάδοσης R μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο

$$R = H(x) - H(x|y)$$

Αν το 0 παραληφθεί, η «εκ των υστέρων» πιθανότητα θα είναι ότι το 0 διαβιβάστηκε 0,99 και ότι το 1 διαβιβάστηκε 0,01. Τα στοιχεία αυτά αντιστρέφονται αν φτάσει στο δέκτη το 1. Ως εκ τούτου:

$$H(x|y) = -[0.99 \log 0.99 + 0.01 \log 0.01] = 0.81 \text{ bits/symbol}$$

ή 81 bits ανά δευτερόλεπτο. Μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα εκπέμπει με ρυθμό $1.000 - 81 = 919$ bits ανά δευτερόλεπτο. Στην περίπτωση, όπου το 0 είναι εξίσου πιθανό να ληφθεί ως ένα 0 ή 1 και ομοίως το 1, οι «εκ των υστέρων» πιθανότητες είναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ και

$$H(x|y) = -\left[\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right] = 1 \text{ bit per symbol}$$

ή 1000 bits ανά δευτερόλεπτο. Ο ρυθμός μετάδοσης τότε είναι 0. •

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε την έννοια της χωρητικότητας. Η χωρητικότητα είναι η πιο σημαντική παράμετρος ενός καναλιού επικοινωνίας, αφού υποδηλώνει το μέγιστο ρυθμό με τον οποίο μπορούν να μεταδοθούν δεδομένα μέσω αυτού. Επίσης, στη μελέτη μας θα λάβουμε υπόψη το θόρυβο ως παράμετρο που συμβάλλει στον

περιορισμό της χωρητικότητας.

9.1.1 Χωρητικότητα καναλιού χωρίς μνήμη

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο (αβεβαιότητα) συμβόλου ή μηνύματος, που βρίσκεται στην είσοδο του καναλιού αλλά δεν έχει ληφθεί ακόμα στην έξοδο, είναι $H(X)$, ενώ μετά τη μετάδοση και τη λήψη στην έξοδο είναι $H(X/Y)$. Συνεπώς, το πληροφοριακό περιεχόμενο που μεταδόθηκε μέσω του καναλιού είναι ίσο με τη διαφορά των παραπάνω ποσοτήτων, $H(X)-H(X/Y)$. Η χωρητικότητα του ενθόρυβου καναλιού ορίζεται ως το μέγιστο πληροφοριακό περιεχόμενο που μπορεί να μεταδοθεί από το κανάλι.

Χωρητικότητα ενθόρυβου καναλιού

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(X) - H(X/Y)\}$$

$$= \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y/X)\} \text{ bits/σύμβολο}$$

Η χωρητικότητα ενός καναλιού χωρίς θόρυβο θα ισούται με τη μέγιστη τιμή του $H(X)$ με ίσες πιθανότητες για όλα τα κωδικά σύμβολα, μιας και στην περίπτωση αυτή ισχύει $H(X/Y) = 0$. Συγκεκριμένα για αθόρυβο δυαδικό κανάλι, τα σύμβολα που μεταδίδονται είναι τα 0 και 1, και μάλιστα χωρίς σφάλμα λόγω της μη επίδρασης κανενός είδος θορύβου.

0 → 0

1 → 1

Έτσι, για δυαδικό κανάλι $C = \log 2 = 1 \text{ bit/σύμβολο}$, αφού

$$C = \max_{p(x)} (H(X) - H(X|Y)) = \max_{p(x)} H(X)$$

$$= \max_p (-p \log p - (1-p) \log(1-p)) = 1 \quad (\text{επιτυγχάνεται για } p = \frac{1}{2})$$

και για κανάλι με q κωδικά σύμβολα ισχύει $C = \log q \text{ bits/σύμβολο}$.

Μπορούμε να ορίσουμε τη χωρητικότητα διακριτού καναλιού χωρίς θόρυβο με την ακόλουθη σχέση

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N(T)}{T} \text{ bits/sec}$$

όπου $N(T)$ το πλήθος των επιτρεπτών μηνυμάτων διάρκειας T .

9.1.2 Περιορισμός Της Χωρητικότητας Καναλιού Λόγω Θορύβου

Ένα σήμα που στέλνεται σε έναν δέκτη μπορεί να θεωρηθεί σαν μια τυχαία μεταβλητή, έστω X . Το X λοιπόν εκφράζεται απόλυτα μέσω της πιθανότητας να στείλει ο αποστολέας στον παραλήπτη την αλληλουχία γραμμάτων x . Αν το κανάλι έχει θόρυβο η τελευταία θα αλλάξει, εξαιτίας των σφαλμάτων που κάνουν το $0 \rightarrow 1$ και αντιστρόφως. Το σήμα λοιπόν που θα λάβει ο δέκτης μπορεί να θεωρηθεί σε μια άλλη τυχαία μεταβλητή Y . Το πόσο συσχετίζονται τα X και Y είναι ουσιαστικά η χωρητικότητα του καναλιού, μιας και η χωρητικότητα εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό bits της αρχικής πληροφορίας που μπορεί να σταλθεί στον δέκτη. Με άλλα λόγια, η χωρητικότητα του καναλιού είναι ίση με την κοινή εντροπία των X και Y . Αν ο πομπός στείλει στον δέκτη ένα bit και αυτό που θα παραληφθεί είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε η χωρητικότητα είναι ίση με 1 bit, ομοίως και η συσχέτιση τους. Αν το bit αυτό έχει πιθανότητα $1/2$ να αλλάξει τότε ο παραλήπτης δεν είναι σε θέση να γνωρίζει το αρχικό bit της πληροφορίας και συνεπώς η χωρητικότητα είναι 0.

Καθώς, όμως, ο αριθμός των συμβολικών καταστάσεων αυξάνει, η ικανότητα του δέκτη για το διαχωρισμό αυτών ελαττώνεται με την εμφάνιση θορύβου ή/και παρεμβολών. Επομένως, ο λόγος σήματος προς θόρυβο παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του αριθμού των συμβολικών καταστάσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ώστε να επιτευχθεί επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα. Η συνδυασμένη επίδραση του θορύβου και του εύρους ζώνης στο ρυθμό μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι επικοινωνίας συνοψίζεται στη διάσημη πια σχέση των Shannon και Hartley:

$$C = B \cdot \log_2 \left(\frac{S}{N} + 1 \right), \text{bits} / \text{s} \quad (9.1)$$

Το θεώρημα των Shannon-Hartley δηλώνει ότι αν ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης B και για δεδομένο λόγο σήματος προς θόρυβο S/N είναι μικρότερος από το προβλεπόμενο όριο χωρητικότητας C τότε η επικοινωνία είναι απαλλαγμένη από σφάλματα. Η σχέση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε την εφικτότητα κάθε ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας, διότι επιτρέπει άμεσα τον καθορισμό του θεωρητικού άνω ορίου της χωρητικότητας, καθώς υποθέτει ότι η επικοινωνιακή ζεύξη είναι πλήρως απαλλαγμένη από αλλοιώσεις και παρεμβολές και υφίσταται μόνο την επίδραση AWGN θορύβου.

Παράδειγμα 9.1

Υποτίθεται μια γραμμή PSTN στην οποία το εύρος ζώνης είναι 3000Hz και ο λόγος σήματος προς θόρυβος είναι $S/N = 20 \text{ dB}$. Ζητείται η χωρητικότητα της γραμμής.

Λύση:

Ο θόρυβος θα πρέπει να μετατραπεί σε καθαρό αριθμό από dB. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$\frac{S}{N}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right)$$

Από την εξίσωση προκύπτει τελικά: $\frac{S}{N} = 100$.

Επομένως, από τον τύπο του Shannon προκύπτει ότι η χωρητικότητα είναι: $C = 3000 \cdot \log_2(100 + 1) = 19963 \text{ bps}$. •

9.1.3 Θεώρημα κωδικοποίησης

Η χωρητικότητα ενός καναλιού με θόρυβο είναι σαφώς μικρότερη από αυτή ενός καναλιού χωρίς θόρυβο. Ο λόγος, για τον οποίο ορίζουμε τη χωρητικότητα ενός ενθόρυβου καναλιού, αφού κατά τη μετάδοση προκύπτουν σφάλματα, είναι γιατί έχουμε κάποιες φορές τη δυνατότητα να

μειώσουμε την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος κατά τη μετάδοση. Η μείωση της πιθανότητας σφάλματος επιτυγχάνεται με την αύξηση του πλεονασμού κατά την κωδικοποίηση, αντικείμενο του θεωρήματος κωδικοποίησης του Shannon, που περιγράφεται παρακάτω.

Θα περιμέναμε για τη μείωση της πιθανότητας εμφάνισης σφάλματος σχεδόν στο μηδέν να απαιτείται ενσωμάτωση πλεονασμού, που θα οδηγούσε σε ρυθμό μετάδοσης επίσης στο μηδέν. Ωστόσο, σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας με ρυθμό C μέσω διακριτού ενθόρυβου καναλιού χωρίς μνήμη με όσο μικρή πιθανότητα σφάλματος επιθυμούμε.

Στην προσπάθεια να γίνει κατανοητή η έννοια και η λειτουργία της μετάδοσης μέσω ενός ενθόρυβου καναλιού θεωρούμε μια είσοδο, η οποία παράγει στην έξοδο διαφορετικές ακολουθίες. Η πηγή θα παράγει περίπου $2^{H(X)}$ ακολουθίες εισόδου μήκους l , ενώ το πλήθος των πιθανών ακολουθιών εξόδου θα είναι κατά προσέγγιση ίσο με $2^{H(Y)}$. Για κάθε πιθανή ακολουθία εισόδου X μήκους l συμβόλων, υπάρχουν $2^{H(Y|X)}$ δυνατές ακολουθίες εξόδου με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Αυτό που επιθυμούμε είναι να μην υπάρχουν δύο ακολουθίες εισόδου X που οδηγούν στην ίδια ακολουθία εξόδου Y , μιας και σ' αυτή την περίπτωση δε θα μπορούμε να συμπεράνουμε από την ακολουθία εξόδου ποια ακολουθία εισόδου μεταδόθηκε. Οι ακολουθίες εισόδου μήκους l συμβόλων, που μπορούμε να μεταδώσουμε και είναι αναγνωρίσιμες στην έξοδο, είναι $2^{H(X)} / 2^{H(Y|X)} = 2^{[H(X)-H(Y|X)]} = 2^{H(X;Y)}$. Η παραπάνω περιγραφή της διαδικασίας μετάδοσης αναφέρεται σε ένα άνω φράγμα της χωρητικότητας του καναλιού.

Δεύτερο Θεώρημα κωδικοποίησης του Shannon ή Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Πληροφορίας

Σε ένα κανάλι χωρίς μνήμη χωρητικότητας C , είναι δυνατή η μετάδοση ποσότητας πληροφορίας $H(X)$ διακριτής πηγής με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος επιθυμούμε, αν ισχύει $H(X) \leq C$.

Αντίστροφα, είναι αδύνατο να μεταδοθεί πληροφορία με ρυθμό

μεγαλύτερο της χωρητικότητας, $H(X) > C$, ανεξαρτήτως της κωδικοποίησης που χρησιμοποιείται, χωρίς να αυξάνεται ανεξέλεγκτα ο αριθμός των σφαλμάτων.

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θεωρούμε διακριτή πηγή με εντροπία $H(X)$ και χωρητικότητα $C = H(X) - H(X/Y)$. Το πλήθος των πιθανών μηνυμάτων συμβόλων μήκους l στην είσοδο του καναλιού είναι ίσο με $M_x = 2^{lH(X)}$, ενώ στην έξοδο αυτού τα πιθανά μηνύματα ίδιου μήκους είναι $M_y = 2^{lH(Y)}$, όπου όλα τα μηνύματα είναι ισοπίθανα. Ένα μήνυμα $m(y)$, που λαμβάνεται στην έξοδο του ενθόρυβου καναλιού, μπορεί να προέρχεται από περισσότερα από ένα μηνύματα εισόδου $m(x)$, εξαιτίας του θορύβου. Το πλήθος των πιθανών μηνυμάτων εισόδου που δίνουν το ίδιο μήνυμα εξόδου είναι $M_{x/y} = 2^{lH(X/Y)}$. Επιλέγοντας τυχαία ένα μήνυμα εισόδου $m(x_i)$, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα άλλο μήνυμα $m(x_j)$ που μπορεί να οδηγήσει στη λήψη του ίδιου μηνύματος εξόδου $m(y_i)$, τότε μπορεί να συμβεί σφάλμα.

Αφού ισχύει $R < C$, έχουμε $R = C - \varepsilon = H(X) - H(X/Y) - \varepsilon$, όπου ε είναι ένας θετικός σταθερός αριθμός. Άρα η πιθανότητα σφάλματος ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$P_{error} \leq \left\{ 2^{lH(X/Y)} - 1 \right\} 2^{l(-H(X/Y) - \varepsilon)} \leq 2^{-l\varepsilon}$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα εμφάνισης λάθους μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή επιθυμούμε, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλο μήκος l .

Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, ότι δηλαδή πράγματι ισχύει $H(X) > C$, θα πρέπει η αβεβαιότητα $H(X/Y)$ να είναι μεγαλύτερη του μηδενός και τουλάχιστον ίση με $H(X) - C$. Για να το αποδείξουμε, υποθέτουμε αρχικά το ακριβώς αντίθετο, ότι δηλαδή η αβεβαιότητα $H(X/Y)$ είναι μικρότερη της ποσότητας $H(X) - C$. Αλλά τότε

θα έπρεπε να ισχύει $H(X/Y) = H(X) - C - \varepsilon$, για κάποιο θετικό αριθμό ε , οπότε και $H(X) - H(X/Y) = C + \varepsilon$. Αφού, όμως, η χωρητικότητα είναι η μέγιστη τιμή της ποσότητας $H(X) - H(X/Y)$, η τελευταία σχέση δεν είναι δυνατό να ισχύει. Επομένως η αβεβαιότητα $H(X/Y)$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός και τουλάχιστον ίση της ποσότητας $H(X) - C$, δηλαδή $H(X/Y) = H(X) - C + \varepsilon$. Συνεπώς, όπως υποστηρίζει και το θεώρημα, δεν είναι δυνατή η μετάδοση σε κανάλι με ρυθμό $H(X) > C$.

Σημειώνουμε ότι η χωρητικότητα C εκφράζεται σε bits/σύμβολο. Αν λάβουμε υπόψη και το ρυθμό μετάδοσης r , τότε η χωρητικότητα θα εκφράζεται σε bits/sec.

Από την ανάλυση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι σε ένα κανάλι μετάδοσης μπορούν να επιτευχθούν όλοι οι ρυθμοί μετάδοσης, που είναι μικρότεροι της χωρητικότητας αυτού. Συγκεκριμένα για ρυθμό μετάδοσης για τον οποίο ισχύει $R < C$, υπάρχει μέθοδος κωδικοποίησης καναλιού με μέγιστη πιθανότητα σφάλματος κατά τη μετάδοση, η οποία τείνει στο μηδέν. Αντίστροφα, για οποιαδήποτε κωδικοποίηση καναλιού, για την οποία η μέγιστη πιθανότητα σφάλματος θέλουμε να τείνει στο μηδέν, θα πρέπει ο ρυθμός μετάδοσης να είναι μικρότερος ή ίσος της χωρητικότητας. Για να έχουμε μετάδοση χωρίς σφάλματα, θα πρέπει να έχουμε πολύ μεγάλα μήκη μηνυμάτων (και κωδικών λέξεων), κάτι που δεν είναι πάντα εφικτό ή επιθυμητό. Γι'αυτό θα πρέπει να υπολογίζουμε μετάδοση με κάποιες πιθανότητες σφαλμάτων, που κυμαίνονται ανάλογα με την εφαρμογή μεταξύ 10^{-14} και 10^{-3} . Στην πράξη η μείωση των σφαλμάτων, που εμφανίζονται κατά τη μετάδοση στα κανάλια επικοινωνίας, γίνεται χρησιμοποιώντας **κώδικες ελέγχου σφάλματος (κωδικοποίηση καναλιού)**, οι οποίοι αναλύονται στο επόμενο κεφάλαιο.

9.1.4 Διακριτά κανάλια με μνήμη

Τα κανάλια επικοινωνίας που εξετάσαμε μέχρι τώρα χαρακτηρίζονται ως κανάλια χωρίς μνήμη, μιας και θεωρείται πως η εμφάνιση ενός σφάλματος κατά τη μετάδοση συμβόλου δεν επιδρά στη μετάδοση των επόμενων

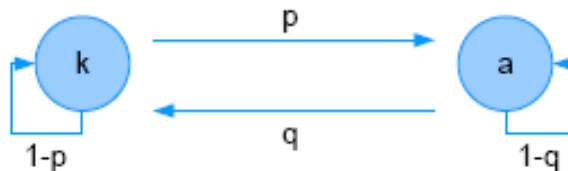
συμβόλων. Κι ενώ οι περισσότεροι κώδικες ελέγχου σφάλματος που εφαρμόζονται θέτουν ως δεδομένο πως τα σφάλματα εμφανίζονται ως ανεξάρτητα τυχαία γεγονότα, στην πραγματικότητα σε πολλά κανάλια τα σφάλματα φαίνεται να συσχετίζονται. Αυτό οφείλεται και στο ότι χρησιμοποιούνται πολύ υψηλοί ρυθμοί μετάδοσης, που έχουν ως αποτέλεσμα ατέλειες των επικοινωνιακών συστημάτων να προκαλούν σειρές διαδοχικών σφαλμάτων. Στα κανάλια με μνήμη εκδηλώνονται ορισμένες φορές ξαφνικοί θόρυβοι, που επικρατούν του θορύβου Gauss και προκαλούν καταιγισμούς σφαλμάτων.

Η χωρητικότητα διακριτού καναλιού με μνήμη για ακολουθίες συμβόλων στην είσοδο και την έξοδο μήκους L , ορίζεται ως εξής:

$$C = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \max_{p(x_1 \dots x_L)} I(X_1 \dots X_L; Y_1 \dots Y_L)$$

Η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας προκύπτει από τη σύγκριση των κατανομών πιθανοτήτων όλων των κωδικών ακολουθιών εισόδου μήκους L .

Η εμφάνιση μιας ακολουθίας συσχετισμένων σφαλμάτων ονομάζεται «καταιγισμός», με μήκος αυτού το μήκος από το πρώτο μέχρι και το τελευταίο σφάλμα. Προκειμένου να μελετηθούν κανάλια με μνήμη, χρησιμοποιούνται υποδείγματα που αποτελούνται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης, δηλαδή υποδείγματα (μοντέλα) και στατιστικές μέθοδοι που δημιουργούν ακολουθίες σφαλμάτων παρόμοιες με αυτές των καναλιών. Αυτά ονομάζονται και «υποδείγματα Gilbert». Το πιο απλό μοντέλο αυτού του τύπου φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 52. Μαθηματικό υπόδειγμα για κανάλια με μνήμη

Το μοντέλο αυτό έχει δύο καταστάσεις, την κατάσταση k και την κατάσταση a , οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις πιθανότητες μετάπτωσης p και q και την πιθανότητα λάθους λ στην κατάσταση a . Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μετάδοσης των δυαδικών ψηφίων είναι ίσος με 1 symbol/sec. Αν είμαστε στην κατάσταση k στην αρχή του χρονικού διαστήματος συμβόλου $t = n$, τότε το δυαδικό ψηφίο που μεταδίδεται λαμβάνεται χωρίς λάθος στην έξοδο. Αμέσως μετά, στην αρχή του επόμενου χρονικού διαστήματος συμβόλου $t = n + 1$, αποφασίζεται αν θα παραμείνει στην κατάσταση k με πιθανότητα $1 - p$ ή θα μεταπέσει στην κατάσταση a με πιθανότητα p . Αν παραμείνει στην κατάσταση k , έχουμε και πάλι ορθή μετάδοση ενός δυαδικού ψηφίου. Αντίθετα, αν μεταπέσει στην κατάσταση a , τότε θεωρούμε ότι η μετάδοση του δυαδικού ψηφίου είναι ορθή με πιθανότητα $1 - \lambda$ και εσφαλμένη με πιθανότητα λ . Μετά τη μετάδοση, στην αρχή του χρονικού διαστήματος συμβόλου $t = n + 2$ αποφασίζεται αν θα παραμείνει στην κατάσταση a με πιθανότητα $1 - q$ ή θα μεταπέσει στην κατάσταση k με πιθανότητα q . Παρατηρούμε ότι το μοντέλο προβλέπει πάντα ορθή μετάδοση στην κατάσταση k και ορθή ή εσφαλμένη μετάδοση στην κατάσταση a .

Αναλύοντας το μοντέλο Gilbert, μπορούμε να υπολογίζουμε τις πιθανότητες να βρίσκεται το κανάλι στις καταστάσεις k και a , όπως επίσης και την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος κατά τη μετάδοση, από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$p(k) + p(a) = 1,$$

$$p(k)p + p(k)(1-p) = p(k)(1-p) + p(a)q,$$

$$p(a)q + p(a)(1-q) = p(a)(1-q) + p(k)p$$

Από τις εξισώσεις αυτές μπορούν να υπολογιστούν οι πιθανότητες των καταστάσεων k και a και από την πιθανότητα $p(a)$, δεδομένης της πιθανότητας εσφαλμένης μετάδοσης στην κατάσταση a , υπολογίζεται η πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος κατά τη μετάδοση, p_{error} .

$$p(k) = \frac{q}{p+q},$$

$$p(a) = \frac{p}{p+q},$$

$$p_{error} = \lambda p(a) = \lambda \frac{p}{p+q}.$$

Τονίζεται ότι, ενώ η πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης, όταν το κανάλι είναι στην κατάσταση a , χαρακτηρίζεται ως λ , η p_{error} αφορά στην πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης, ανεξαρτήτως της κατάστασης στην οποία βρίσκεται.

9.2 Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

Στις παρακάτω παραγράφους θα εξετάσουμε θέματα σχετικά με τη χωρητικότητα συνεχών καναλιών χωρίς μνήμη και με μνήμη. Τα συνεχή επικοινωνιακά κανάλια εξετάζονται χωριστά από τα διακριτά, καθώς παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές, τόσο στην κωδικοποίηση όσο και στη διαμόρφωση του σήματος. Επίσης, στη μελέτη μας θα λάβουμε υπόψη το θόρυβο ως παράγοντα που επηρεάζει τη μετάδοση δεδομένων και θα διατυπώσουμε το θεώρημα κωδικοποίησης συνεχών καναλιών.

Ένα συνεχές κανάλι χαρακτηρίζεται από συνεχή μηνύματα, παράγοντας έτσι μια συνεχή κυματομορφή σε συνάρτηση του χρόνου. Όπως στην περίπτωση του διακριτού καναλιού, κατά τη μετάδοση του σήματος στο συνεχές κανάλι επενεργεί προσθετικός, που συναντάται και πιο συχνά, ή και πολλαπλασιαστικός θόρυβος. Για το λόγο αυτό το μεταδιδόμενο σήμα θα πρέπει να ανακατασκευαστεί στην έξοδο από το διαστρεβλωμένο σήμα που λαμβάνεται.

Ο προσθετικός θόρυβος, που είναι πιο συχνός στα συνεχή κανάλια και στον οποίο αναφερόμαστε παρακάτω, μπορεί αν είναι γκαουσιανός ή κρουστικός. Ο γκαουσιανός θόρυβος μπορεί αν είναι θερμικός ή βολής από τις διατάξεις, ηλεκτρονικά στοιχεία και ενισχυτές που προηγούνται ή βρίσκονται μέσα στο δέκτη και από την ακτινοβολία που λαμβάνεται από την κεραία λήψης. Επειδή το μοντέλο αυτό καναλιού προσθετικού γκαουσιαν θορύβου, όπως ονομάζεται, εφαρμόζεται με επιτυχία σε ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων φυσικών επικοινωνιακών καναλιών και λόγω

της μαθηματικής του απλότητας, είναι το μοντέλο που η χρήση του επικρατεί στη σχεδίαση και ανάλυση των συστημάτων επικοινωνίας. Παράλληλα, ο κρουστικός θόρυβος οφείλεται σε μεταβατικά φαινόμενα στη λειτουργία των διακοπών και χαρακτηρίζεται από μεγάλα διαστήματα χωρίς θόρυβο, που διακόπτονται από καταιγισμούς παλμών θορύβου μεγάλου πλάτους.

9.2.1 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού

Σε ένα συνεχές κανάλι η εισροή ή η μετάδοση σημάτων θα είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου $f(t)$ ενός συγκεκριμένου συνόλου, ενώ οι εκροές ή το λαμβανόμενο σήμα θα είναι οι διαταραγμένες εκδόσεις του. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση κατά την οποία και η μετάδοση και η λήψη των σημάτων περιορίζονται σε ορισμένο εύρος ζώνης W . Στη συνέχεια θα οριστεί για χρόνο T και με $2TW$ αριθμούς η στατιστική δομή της μετάδοσης και του λαμβανόμενου σήματος. Έτσι, οι στατιστικές του εκπεμπόμενου σήματος θα καθοριστούν από την

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x). \quad (9.25)$$

κι εκείνων του θορύβου από την υπό συνθήκη κατανομή των πιθανοτήτων

$$P_{x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, Y_n) = P_x(y) \quad (9.26)$$

Ο ρυθμός μετάδοσης των πληροφοριών για συνεχή κανάλια ορίζεται κατά ανάλογο τρόπο με αυτό του διακριτού καναλιού, δηλαδή

$$R = H(x) - H(x|y), \quad (9.27)$$

όπου $H(x)$ είναι η εντροπία της εισόδου και η $H(x|y)$ εκφράζει την αμφιβολία της αντιστοιχίας των συμβόλων, όπως θεωρούνται κατά την αντίστροφη φορά από την έξοδο. Πρόκειται, δηλαδή, για την αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας, που εκφράζει την ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται μέσω του καναλιού.

$$I(X; Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} dx dy$$

Η χωρητικότητα του καναλιού C ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας

πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ή του ρυθμού μετάδοσης κι επιτυγχάνεται με τη σύνδεση όλων των πηγών της πληροφορίας στο κανάλι, έχοντας λάβει υπόψη τους υφιστάμενους περιορισμούς.

$$C = \max_{f(x)} I(X;Y)$$

Σχέση που διαμορφώνεται ανάλογα με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων μεταξύ της αμοιβαίας ποσότητας πληροφορίας και των εντροπιών και των υπό συνθήκη ποσοτήτων πληροφορίας ή της συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

Πιο αναλυτικά:

$$I(X;Y) = -\int P(x) \log P(x) dx + \iint P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} dx dy \quad (9.28)$$

Η σχέση αυτή γράφεται και ως εξής:

$$\iint P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} dx dy \quad (9.29)$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\iint P(x,y) \log P(x) dx dy = \int P(x) \log P(x) dx \quad (9.30)$$

Οπότε η χωρητικότητα εκφράζεται ως εξής:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{P(x)} \frac{1}{T} \iint P(x,y) \log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} dx dy \quad (9.31)$$

9.2.2 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Χωρίς Μνήμη

Είναι προφανές ότι στον προηγούμενο τύπο η R και C είναι ανεξάρτητες από το σύστημα συντεταγμένων, από την στιγμή που ο αριθμητής και ο παρονομαστής του $\log \frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}$ θα πολλαπλασιαστεί με τους ίδιους παράγοντες, όταν τα x και y μετατραπούν ένα-προς-ένα. Η συγκεκριμένη έκφραση της χωρητικότητας C είναι πιο γενική από την $H(x) - H(x|y)$.

Αν η λογαριθμική βάση, που χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό της H(x) και της H(x|y), έχει δυο αποτελέσματα, τότε η C είναι ο μέγιστος αριθμός

των δυαδικών ψηφίων που μπορούν να σταλούν ανά δευτερόλεπτο μέσω του καναλιού με μικρή πιθανότητα εμφάνισης λάθους της αντιστοιχίας κατά την αμφίδρομη διαδικασία.

Από μαθηματικής πλευράς, μπορεί να αποδειχτεί ότι αν u είναι το μήνυμα, x είναι το σήμα, y είναι το λαμβανόμενο σήμα (με την παρουσία θορύβου) και v είναι το ανακτημένο μήνυμα τότε

$$H(x) - H(x|y) \geq H(u) - H(u|v) \quad (9.32)$$

ανεξάρτητα από το τι εργασίες πραγματοποιούνται σε u για την απόκτηση του x ή στο y για την ανάκτηση του v . Δεν έχει σημασία το πώς θα κωδικοποιηθούν τα δυαδικά ψηφία για την απόκτηση του σήματος ή το πώς θα αποκωδικοποιηθεί το λαμβανόμενο σήμα για την ανάκτηση του μηνύματος, η διακριτή τιμή για τα δυαδικά ψηφία δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα καναλιού που έχουμε ορίσει. Από την άλλη πλευρά, είναι δυνατόν κάτω από πολύ ορισμένες συνθήκες να βρεθεί ένα σύστημα κωδικοποίησης για τη διαβίβαση δυαδικών ψηφίων με ρυθμό C με ελάχιστη συχνότητα σφαλμάτων. Αυτό ισχύει σε ένα κατά προσέγγιση πεπερασμένο χώρο διαστάσεων για την συνάρτηση του σήματος, $P(x,y)$, τόσο το x και το y είναι συνεχείς εκτός από το σύνολο των σημείων της μηδενικής πιθανότητας.

Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι όταν ο θόρυβος, που προστίθεται στο σήμα, είναι ανεξάρτητος από αυτό (με την έννοια της πιθανότητας). Τότε $P(y,x)$ είναι η συνάρτηση της διαφοράς $n = (y - x)$,

$$P_x(y) = Q(y - x) \quad (9.33)$$

Έτσι μπορεί να οριστεί μια εντροπία για τον θόρυβο (ανεξάρτητα από τα στατιστικά στοιχεία του σήματος), δηλαδή η εντροπία της κατανομής $Q(n)$. Αυτή η εντροπία θα συμβολίζεται με $H(n)$.

Ορισμός

Αν το σήμα και ο θόρυβος είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το λαμβανόμενο σήμα είναι το άθροισμα του εκπεμπόμενου σήματος και του

θορύβου, ο ρυθμός μετάδοσης είναι

$$R = H(y) - H(n) \quad (9.34)$$

δηλαδή, η εντροπία του ληφθέντος σήματος μείον την εντροπία του θορύβου. Η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι:

$$C = \underset{P(x)}{\text{Max}} H(y) - H(n) \quad (9.35)$$

Οπότε από $y = x + n$, έχουμε:

$$H(x, y) = H(x, n) \quad (9.36)$$

Επεκτείνοντας την αριστερή πλευρά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα x και n είναι ανεξάρτητα, προκύπτει:

$$H(y) + H_y(x) = H(x) + H(n) \quad (9.37)$$

Οπότε:

$$R = H(x) - H_y(x) = H(y) - H(n) \quad (9.38)$$

Δεδομένου ότι $H(n)$ είναι ανεξάρτητη από $P(x)$, μεγιστοποιώντας το R απαιτείται η μέγιστη δυνατή $H(y)$, η εντροπία του λαμβανόμενου σήματος. Αν υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί, όσον αφορά το σύνολο των μεταδιδόμενων σημάτων, η εντροπία του ληφθέντος σήματος πρέπει να μεγιστοποιηθεί ως αποτέλεσμα αυτών των περιορισμών.

Η περίπτωση Γκαουσιανού Λευκού Θορύβου

Στη περίπτωση που ο θόρυβος είναι λευκός θερμικός, τα διαβιβασμένα σήματα περιορίζονται σε μια συγκεκριμένη μέση ισχύ P . Τότε τα λαμβανόμενα σήματα έχουν μέση ισχύ $P + N$, όπου N είναι η μέση ισχύς του θορύβου. Η μέγιστη εντροπία για τα ληφθέντα σήματα εμφανίζεται όταν στα σήματα εμπεριέχεται ένα σύνολο λευκού θορύβου, έτσι αποτελεί τη μεγαλύτερη δυνατή εντροπία για την ισχύ $P + N$ και μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη επιλογή των μεταδιδόμενων σημάτων. Η εντροπία (ανά δευτερόλεπτο) των λαμβανόμενων στοιχείων είναι:

$$H(y) = W \log 2\pi e(P + N) \quad (9.39)$$

Και η εντροπία του θορύβου είναι:

$$H(n) = W \log 2\pi eN \quad (9.40)$$

Η χωρητικότητα του καναλιού είναι:

$$C = H(y) - H(n) = W \log \frac{P + N}{N} \quad (9.41)$$

Ορισμός

Η χωρητικότητα του καναλιού με εύρος ζώνης W , που επηρεάζεται από λευκό θόρυβο ισχύος N , όταν η μέση ισχύς του πομπού περιορίζεται σε P , δίνεται από τον τύπο :

$$C = W \log \frac{P + N}{N} \quad (9.42)$$

Αυτό σημαίνει ότι με την χρήση συστημάτων κωδικοποίησης μπορούν να μεταδοθούν δυαδικά ψηφία με ρυθμό $W \log_2 \frac{P + N}{N}$ bits ανά δευτερόλεπτο, με μικρή συχνότητα λαθών. Δεν είναι δυνατή η μετάδοση ενός υψηλότερου ποσοστού από οποιοδήποτε σύστημα κωδικοποίησης, χωρίς μια σαφή θετική συχνότητα σφαλμάτων.

Ένα σύστημα που προσεγγίζει τον ιδανικό ρυθμό μετάδοσης περιγράφεται ως εξής:

Έστω $M = 2^s$ δείγματα λευκού θορύβου διάρκειας T το κάθε ένα. Πρόκειται για δυαδικούς αριθμούς από το 0 έως $M - 1$. Στον πομπό οι ακολουθίες των μηνυμάτων διασπώνται σε ομάδες s και μεταδίδονται με τον προσθετικό θόρυβο. Στο δέκτη τα μηνύματα M είναι γνωστά και το πραγματικό λαμβανόμενο σήμα, που περιέχει θόρυβο, συγκρίνεται με κάθε ένα από αυτά. Το δείγμα, που έχει τη λιγότερη απόκλιση από το λαμβανόμενο σήμα, επιλέγεται ως το εκπεμπόμενο σήμα και ο αντίστοιχος δυαδικός αριθμός ανακατασκευάζεται. Ο αριθμός M των δειγμάτων του θορύβου θα εξαρτηθεί από μια ανεκτή συχνότητα ϵ σφαλμάτων, αλλά για όλες σχεδόν τις επιλογές των δειγμάτων που έχουμε:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log M(\epsilon, T)}{T} = W \log \frac{P + N}{N} \quad (9.43)$$

Έτσι, δεν έχει σημασία πόσο μικρή είναι η συχνότητα ϵ που θα επιλεγεί,

γιατί θέτοντας ένα αρκετά μεγάλο T , μεταφέρονται αναλόγως $TW \log \frac{P+N}{N}$

δυναμικά ψηφία σε χρόνο T .

Η χωρητικότητα ενός καναλιού εύρους W , που διαταράσσεται από τυχαίο θόρυβο, οριοθετείται από τις ανισότητες:

$$W \log \frac{P + N_1}{N_1} \leq C \leq W \log \frac{P + N}{N_1} \quad (9.44)$$

όπου P = η μέση ισχύς πομπού, N = μέση ισχύς του θορύβου, N_1 = η εντροπία της ισχύς του θορύβου.

Εδώ, η μέση ισχύς των διαταραγμένων μηνυμάτων θα είναι $P + N$. Η μέγιστη εντροπία για την ισχύ που θα προκύψει, αν το λαμβανόμενο σήμα συνοδεύεται από λευκό θόρυβο, θα είναι $W \log 2\pi e (P + N)$. Στην περίπτωση όμως που δεν υπάρξει κανένα σύνολο μεταδιδόμενων σημάτων με διαταραχές θορύβου, θα έχουμε παραγωγή λευκού θερμικού θορύβου στο δέκτη, κατά συνέπεια αυτό θέτει ένα άνω όριο για την $H(y)$. Οπότε:

$$C = \text{Max}H(y) - H(n) \leq W \log 2\pi e(P + N) - W \log 2\pi eN_1 \quad (9.45)$$

Αυτό είναι το ανώτατο όριο που αναφέρεται στο θεώρημα. Το κατώτερο όριο μπορεί να βρεθεί από την εξέταση του ρυθμού με την δημιουργία μεταδιδόμενων σημάτων με λευκό θόρυβο, ισχύος P . Στην περίπτωση αυτή, η εντροπία της ισχύος του ληφθέντος σήματος πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο αυτή του λευκού θορύβου της ισχύος $P + N_1$, αφού ισχύει ότι η εντροπία της ισχύος του αθροίσματος των δύο συνόλων είναι μεγαλύτερη ή ίση με το άθροισμα των ξεχωριστών εντροπιών της ισχύος. Ως εκ τούτου:

$$\text{Max}H(y) \geq W \log 2\pi e(P + N_1) \quad (9.46)$$

και

$$C \geq W \log 2\pi e(P + N_1) - W \log 2\pi eN_1 = W \log \frac{P + N_1}{N_1} \quad (9.47)$$

Όσο το P αυξάνεται, στο άνω και κάτω όριο κατά προσέγγιση έχουμε:

$$W \log \frac{P + N}{N_1} \quad (9.48)$$

Αν ο θόρυβος είναι λευκός, τότε $N = N_1$. Έτσι:

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N} \right) \quad (9.49)$$

Αν ο θόρυβος είναι Gaussian, αλλά με ένα φάσμα που δεν είναι απαραίτητα επίπεδο, N_1 είναι η γεωμετρική μέση ισχύς του θορύβου κατά τις διάφορες συχνότητες του εύρους W . Έτσι:

$$N_1 = \exp \frac{1}{W} \int \log N(f) df \quad (9.50)$$

όπου $N(f)$ είναι η ισχύς θορύβου στην συχνότητα f .

9.2.3 Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για Τα Συνεχή Κανάλια

Όπως στην περίπτωση των διακριτών καναλιών, έτσι και στην περίπτωση των συνεχών καναλιών είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος.

Ορισμός

Είναι δυνατή η μεταφορά ποσότητας πληροφορίας $H(X)$ (bits/sec) μέσω συνεχούς καναλιού χωρητικότητας C , στο οποίο επενεργεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος, με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος επιθυμούμε, αν ισχύει $H(X) < C$.

9.2.4 Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Με Μνήμη

Στη συνέχεια θα εξεταστούν συνεχή κανάλια, στα οποία επενεργεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος, χωρίς όμως επίπεδη φασματική πυκνότητα ισχύος. Τα δείγματα, λοιπόν, δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητα, δηλαδή έχουμε κανάλι με μνήμη. Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας συνεχούς καναλιού με μνήμη θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τις φασματικές πυκνότητες ισχύος του στοχαστικού σήματος εισόδου και του θορύβου.

Σε μερικές εφαρμογές ο πομπός δεν περιορίζεται από τη μέση ισχύ της εξόδου, αλλά από την ανώτατη στιγμιαία ισχύ. Το πρόβλημα του υπολογισμού της χωρητικότητας του καναλιού είναι σε αυτή την

περίπτωση η μεγιστοποίηση της (με την διακύμανση του συνόλου των μεταδιδόμενων συμβόλων).

$$H(y) - H(n) \quad (9.51)$$

υπό τον περιορισμό ότι όλες οι συναρτήσεις $f(t)$ στο σύνολο είναι μικρότερες ή ίσες με το \sqrt{S} για όλα τα t . Ένας περιορισμός αυτού του τύπου δεν λειτουργεί τόσο καλά μαθηματικά όσο ο μέσος όρος του περιορισμού της ισχύος. Επιπλέον για την περίπτωση αυτή έχουμε κατώτερο όριο, που ισχύει για όλα τα S/N , ένα "ασυμπτωτικό" άνω όριο (ισχύει για τα μεγάλα S/N) και μια ασυμπτωτική τιμή της C για μικρό S/N .

Ορισμός

Η χωρητικότητα C του καναλιού για εύρος W , που συνταράχθηκε από λευκό θερμικό θόρυβο ισχύος N , περιορίζεται από:

$$C \geq W \log \frac{2}{\pi e^3} \frac{S}{N} \quad (9.52)$$

όπου S είναι η μέγιστη επιτρεπτή ισχύς του πομπού.

Για αρκετά μεγάλο S/N , έχουμε:

$$C \leq W \log \frac{\frac{2}{\pi e} S + N}{N} (1 + \varepsilon) \quad (9.53)$$

Όταν $S/N \rightarrow 0$ (και εφόσον το εύρος W ξεκινά από το 0), τότε:

$$C / W \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \rightarrow 1 \quad (9.54)$$

Η εντροπία των εκροών μπορεί να υπολογιστεί από αυτή του συνόλου των εισροών. Η εντροπία των εκροών ισούται με την εντροπία των εισροών συν το κέρδος του γεωμετρικού μέσου:

$$\int_0^W \log G^2 df = \int_0^W \log \left(\frac{W-f}{W} \right)^2 df = -2W \quad (9.55)$$

Οπότε η εντροπία της εξόδου είναι:

$$W \log 4S - 2W = W \log \frac{4S}{e^2} \quad (9.56)$$

Με την χωρητικότητα να είναι μεγαλύτερη από:

$$W \log \frac{2}{\pi e^3} \frac{S}{N} \quad (9.57)$$

Αποδεικνύεται ότι, για μικρό S/N (Με μέγιστη ισχύ σήματος και τη μέση ισχύ του λευκού θορύβου), η χωρητικότητα του καναλιού είναι περίπου:

$$C = W \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (9.58)$$

Περισσότερο η $C/W \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \rightarrow 1$ με $\frac{S}{N} \rightarrow 0$. Όταν η μέση ισχύς του σήματος P είναι μικρότερη ή ίση με την ανώτερη, ισχύει (για όλες τις περιπτώσεις S / N):

$$C \leq W \log \left(1 + \frac{P}{N} \right) \leq W \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (9.59)$$

Συμπερασματικά, η χωρητικότητα εξαρτάται από το φάσμα του σήματος εισόδου, καθώς και από το φάσμα του θορύβου. Τα ερωτήματα, που συνήθως γεννιούνται, αναφέρονται από τη μια πλευρά στη μέγιστη τιμή της χωρητικότητας, όταν δίνονται τα φάσματα εισόδου και θορύβου, και από την άλλη πλευρά στο φάσμα του σήματος εισόδου που οδηγεί σε μεγιστοποίηση της χωρητικότητας, όταν δίνεται μόνο το φάσμα του θορύβου.

Η χωρητικότητα του καναλιού λαμβάνει τη μέγιστη τιμή αν το άθροισμα των φασμάτων του σήματος εισόδου και του θορύβου είναι ίσο με το λόγο του αθροίσματος των ισχύων τους προς το διπλάσιο του εύρους ζώνης και σταθερό.

9.3 Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τα χαρακτηριστικά ενός Gaussian καναλιού επικοινωνίας, καθώς και με τον ορισμό της χωρητικότητας του.

Το Gaussian κανάλι αποτελεί ένα χρόνο-διακριτό κανάλι με έξοδο Y_i σε χρόνο i , όπου Y_i είναι το άθροισμα των συμβόλων εισόδου X_i και του θορύβου Z_i . Ο θόρυβος Z_i προέρχεται από μια Gaussian κατανομή με

διακύμανση N .

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim N(0, N) \quad (9.3)$$

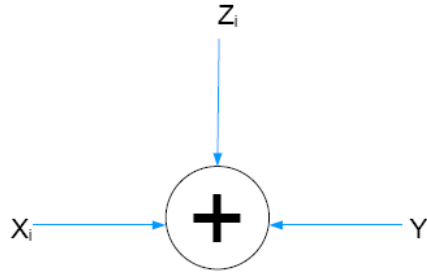
Ο θόρυβος Z_i υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητος από το σήμα X_i . Το συγκεκριμένο κανάλι αποτελεί ένα πρότυπο για ορισμένα κοινά κανάλια επικοινωνίας, όπως τα ενσύρματα και ασύρματα τηλεφωνικά κανάλια και οι δορυφορικές συνδέσεις. Χωρίς περαιτέρω προϋποθέσεις, η χωρητικότητα αυτού του καναλιού μπορεί να είναι άπειρη. Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδέν, ο δέκτης λαμβάνει τα σύμβολα μεταφοράς χωρίς σφάλματα. Από τη στιγμή που τα σύμβολα X μπορούν να πάρουν κάθε πραγματική τιμή, το κανάλι μπορεί να μεταδώσει ένα αυθαίρετο πραγματικό αριθμό χωρίς λάθη.

Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδενική και δεν υπάρχει περιορισμός στην είσοδο, μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα ένα άπειρο υποσύνολο συμβόλων στην είσοδο με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, έτσι ώστε να είναι διακριτά στην έξοδο με μικρή πιθανότητα λάθους, με αποτέλεσμα ένα τέτοιο σύστημα να έχει άπειρη χωρητικότητα. Έτσι, αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδέν ή η είσοδος είναι χωρίς περιορισμούς, η χωρητικότητα του καναλιού είναι άπειρη.

Ο πιο συνηθισμένος περιορισμός της εισόδου είναι ο περιορισμός της ισχύος. Υποθέτουμε μέση ισχύ που πληροί τους περιορισμούς. Για οποιοδήποτε κωδικοποιημένο σύμβολο (x_1, x_2, \dots, x_n) , που μεταδίδεται μέσω του καναλιού, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq P \quad (9.4)$$

Πάνω στο συγκεκριμένο κανάλι επικοινωνίας μοντελοποιούνται αρκετά κανάλια, συμπεριλαμβανομένου του ραδιοφώνου και των δορυφορικών συνδέσεων. Ο προσθετικός θόρυβος στα κανάλια μπορεί να οφείλεται σε διάφορες αιτίες.



Εικόνα 53. Αναπαράσταση προσθετικού θορύβου

Ωστόσο, από το κεντρικό θεώρημα, η σωρευτική επίδραση ενός μεγάλου αριθμού μικρών τυχαίων αποτελεσμάτων πλησιάζει αρκετά στα πραγματικά μεγέθη, οπότε η Γκαουσιανή υπόθεση ισχύει σε ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων.

Αναλύοντας ένα πιο απλοποιημένο τρόπο χρησιμοποίησης αυτού του καναλιού, αρχικά στέλνεται 1 bit πληροφορίας με μια χρήση του καναλιού. Δεδομένου του περιορισμού της ισχύος, το καλύτερο που μπορεί να γίνει είναι να σταλθεί ένα από τα δύο μεγέθη, $+\sqrt{P}$ ή $-\sqrt{P}$. Ο δέκτης εξετάζει τα αντίστοιχα Y που έλαβε και προσπαθεί να αποφασίσει ποιο από τα δύο μεγέθη έχει ληφθεί. Υποθέτοντας ότι και τα δύο αυτά μεγέθη έχουν εξίσου πιθανότητες να σταλθούν (αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που σταλθεί ακριβώς 1 bit πληροφορίας), η βέλτιστη σχέση αποκωδικοποίησης είναι να αποφασιστεί ότι το $+\sqrt{P}$ εστάλη στην περίπτωση που $Y > 0$ και το $-\sqrt{P}$ εστάλη αν ισχύει $Y < 0$. Η πιθανότητα σφάλματος με ένα τέτοιο σύστημα αποκωδικοποίησης είναι:

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2} \Pr(Y < 0 \mid X = +\sqrt{P}) + \frac{1}{2} \Pr(Y > 0 \mid X = -\sqrt{P}) \\
 &= \frac{1}{2} \Pr(Z < -\sqrt{P} \mid X = +\sqrt{P}) + \frac{1}{2} \Pr(Z > \sqrt{P} \mid X = -\sqrt{P}) \\
 &= \Pr(Z > \sqrt{P}) \\
 &= 1 - \Phi(\sqrt{P/N})
 \end{aligned}$$

όπου $\Phi(x)$ είναι η αθροιστική κανονική συνθήκη:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)} dt \quad (9.5)$$

Χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο σύστημα, έχουμε μετατρέψει το Gaussian κανάλι σε ένα διακριτό δυαδικό συμμετρικό κανάλι με 'crossover' πιθανότητα P_e . Ομοίως, με τη χρήση τεσσάρων-τιμών στο σήμα εισόδου, μπορούμε να μετατρέψουμε το Gaussian κανάλι σε ένα διακριτό κανάλι τεσσάρων-εισόδων. Σε ορισμένα πρακτικά συστήματα διαμόρφωσης, χρησιμοποιούνται παρόμοιες ιδέες για τη μετατροπή του συνεχούς καναλιού σε ένα διακριτό κανάλι. Το βασικό πλεονέκτημα ενός διακριτού καναλιού είναι η εύκολη επεξεργασία του σήματος εξόδου για διόρθωση λαθών, αλλά ορισμένες πληροφορίες χάνονται κατά την μεταφορά.

Ορισμοί

Ορίζοντας την (πληροφορία) χωρητικότητα του καναλιού ως το μέγιστο της κοινής πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, ικανοποιώντας τον περιορισμό της ισχύος στην είσοδο:

Η χωρητικότητα πληροφορίας στο Gaussian κανάλι με τους περιορισμούς της ισχύος P είναι:

$$C = \max_{f(x): E \cdot X^2 \leq P} I(X; Y) \quad (9.6)$$

Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε την χωρητικότητα της πληροφορίας αναπτύσσοντας την $I(X; Y)$:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y | X) \\ &= H(Y) - H(X + Z | X) \\ &= H(Y) - H(Z | X) \\ &= H(Y) - H(Z) \quad (9.7) \end{aligned}$$

όπου το Z εξαρτάται από το X . Με $H(Z) = \frac{1}{2} \log 2\pi eN$ και

$$EY^2 = E(X + Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N \quad (9.8)$$

όπου το X και το Z είναι εξαρτώμενα και $EZ = 0$.

Από την σχέση $EY^2 = P + N$, η εντροπία του Y ορίζεται από την

$$\frac{1}{2} \log 2\pi e(P+N) \quad (9.9)$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στον ορισμό της κοινής πληροφορίας, έχουμε επιτύχει:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Z) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2} \log 2\pi eN \\ &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right) \quad (9.10) \end{aligned}$$

Άρα η χωρητικότητα της πληροφορίας ενός Gaussian καναλιού είναι:

$$C = \max_{E \cdot X^2 \leq P} I(X;Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right) \quad (9.11)$$

Η μεγιστοποίηση επιτυγχάνεται, όταν $X \sim N(0, P)$.

Η χωρητικότητα C ενός καναλιού με εύρος ζώνης B με προσθετικό θόρυβο και με κατανομή Gauss περιορισμένου εύρους ζώνης είναι:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right), \text{ bits / second, bps} \quad (9.12)$$

όπου S είναι η μέση ισχύς του σήματος και N η μέση ισχύς του θορύβου στην έξοδο του καναλιού. Αν και περιορίζεται για την περίπτωση Gaussian θορύβου, η συνέπειά του θεωρήματος αυτού είναι γενική, αφού στα περισσότερα συστήματα τηλεπικοινωνιών το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα Gaussian κανάλι. Επίσης το θεώρημα εφαρμόζεται και σε διακριτά και σε συνεχή κανάλια.

Το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σπουδαίες συνέπειες. Πρώτον, δίνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του ρυθμού μετάδοσης αξιόπιστων δεδομένων μέσα από ένα Gaussian κανάλι. Έτσι, κάθε σχεδιασμός συστήματος πρέπει να γίνεται, ώστε η χωρητικότητα C να πλησιάζει την τιμή της παραπάνω εξίσωσης με έναν αποδεκτό ρυθμό σφαλμάτων. Η δεύτερη συνέπεια του θεωρήματος αυτού έχει να κάνει με την ανταλλαγή σήματος-προς-θόρυβο με το εύρος ζώνης.

Παράδειγμα 9.2

Να βρεθεί η απαιτούμενη χωρητικότητα καναλιού εύρους ζώνης $B = 3 \text{ kHz}$ για την ασφαλή μεταφορά δεδομένων με ρυθμό 10 kbps . Επίσης, να υπολογίσετε τη μεταβολή του SNR, όταν το $B = 10 \text{ kHz}$.

Λύση:

Επειδή $R = 10000 \text{ bps} \Rightarrow C \geq 10000 \text{ bps}$.

Όταν $B=3 \text{ kHz} \Rightarrow \text{SNR}=2^{(C/B)} - 1 \approx 9$

ενώ όταν $B = 10 \text{ kHz} \Rightarrow \text{SNR} = 1$. Δηλαδή, μια αύξηση του εύρους ζώνης από 3 kHz σε 10 kHz , οδηγεί σε μείωση του SNR από 9 σε 1 .

Στο παραπάνω παράδειγμα δόθηκε η κλειστή σχέση, που συνδέει την ποσότητα της μεταφερόμενης πληροφορίας, του εύρους ζώνης του καναλιού και του λόγου σήματος-προς-θόρυβο. Συγκεκριμένα, αύξηση του εύρους ζώνης μπορεί να εκμεταλλευθεί με ελάττωση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο και αντίστροφα ελάττωση του εύρους ζώνης πρέπει να πληρωθεί με αύξηση του λόγου σήματος-προς-θόρυβο, για δεδομένη ποσότητα μεταφερόμενης πληροφορίας. •

Παράδειγμα 9.3

Υπολογίστε τη χωρητικότητα ενός καναλιού χαμηλών συχνοτήτων με διαθέσιμο εύρος ζώνης 3000 Hz και λόγο σήματος-προς-θόρυβο $\text{SNR}=10^3$ στην έξοδό του. Υποτίθεται ότι ο θόρυβος του καναλιού είναι Gaussian.

Λύση:

Η χωρητικότητα του καναλιού C δίνεται από την εξίσωση:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 3000 \times \log_2 (1 + 1000) \cong 29902 \text{ bps} \quad \bullet$$

Παράδειγμα 9.4

Υπολογίστε τη χωρητικότητα ενός καναλιού με κατανομή θορύβου τύπου Gauss, εύρος ζώνης 1 MHz και λόγο σήματος προς θόρυβο $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται για τη μετάδοση ενός εκατομμυρίου χαρακτήρων ASCII με το παραπάνω κανάλι

(Σημειώνεται ότι στον κώδικα ASCII κάθε χαρακτήρας είναι κωδικοποιημένος σε δυαδικά ψηφία των 8-bits).

Λύση:

Η χωρητικότητα του καναλιού δίνεται από τη σχέση

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) = 10^6 \log_2 (1 + 10^{30/10}) \cong 9,97 * 10^6 \text{ bps}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για τη μετάδοση του ενός εκατομμυρίου χαρακτήρων δίνεται από το λόγο του συνολικού αριθμού των bits προς τη χωρητικότητα του καναλιού, ουσιαστικά του αντίστροφου του ρυθμού μετάδοσης δεδομένων, δηλαδή

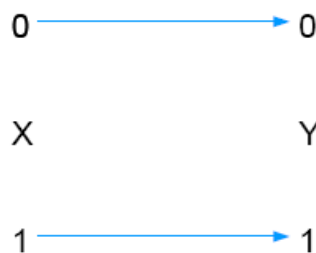
$$T = \frac{1}{r_s} = \frac{H}{R} = \frac{H}{C} = \frac{8 * 10^6 \text{ bits}}{9,97 * 10^6 \text{ bps}} = 0,802 \text{ sec}$$

9.5 Παραδείγματα Χωρητικότητας Καναλιού

Στην παράγραφο που ακολουθεί παραθέτονται κάποια παραδείγματα καναλιών με διαφορετικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες υπολογίζοντας σε κάθε ένα από αυτά την χωρητικότητά τους.

9.5.1 Αθόρυβο Δυαδικό Κανάλι

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κανάλι του οποίου η δυαδική είσοδος επαναλαμβάνεται ακριβώς στην έξοδο. Στην περίπτωση αυτή, κάθε bit έχει μεταδοθεί χωρίς λάθος. Ως εκ τούτου, ένα bit που δεν εμφανίζει σφάλμα μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού με την χωρητικότητά του να είναι 1 bit.



Εικόνα 54. Αθόρυβο δυαδικό κανάλι

Η χωρητικότητα C μπορεί να υπολογιστεί, με τη χρήση του $p(x) = (1/2, 1/2)$, ως εξής :

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(Y) = \log 2 = 1 \text{ bit}$$

Εφόσον θα ισχύει:

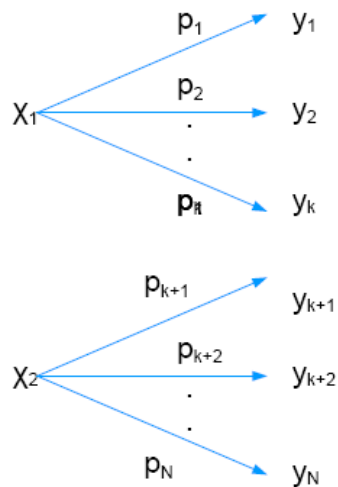
$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X) \text{ και } H(X|Y)=H(Y|X)=0 \text{ με } p(x_i|y_j)=0 \text{ ή } 1.$$

9.5.2 Θορυβώδες Κανάλι Με Μη-Επικαλυπτόμενες Εξόδους

Το συγκεκριμένο κανάλι έχει δύο πιθανά αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις δύο εισόδους. Το κανάλι φαίνεται να είναι θορυβώδες, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Ακόμα και αν η παραγωγή του καναλιού είναι μια τυχαία συνέπεια της εισαγωγής, η είσοδος μπορεί να καθοριστεί από το αποτέλεσμα και επομένως κάθε κομμάτι που διαβιβάζεται μπορεί να ανακτηθεί χωρίς σφάλμα. Η χωρητικότητα του καναλιού είναι 1 bit ανά μετάδοση. Μπορεί επίσης να υπολογιστεί η χωρητικότητα , $C = \max I(X : Y) = 1 \text{ bit}$, με τη χρήση του $p(x) = (1/2, 1/2)$.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) \quad (9.60)$$

Με $C=1\text{bit}$



Εικόνα 55. Θορυβώδες κανάλι με μη-επικαλυπτόμενες εξόδους

$$\sum_{i=1}^K \rho_i = 1 \quad (9.61)$$

$$\sum_{i=\kappa+1}^N \rho_i = 1 \quad (9.62)$$

9.5.3 Θορυβώδης Γραφομηχανή

Αν χρησιμοποιήσουμε μόνο τα $\chi_1, \chi_3, \chi_5, \dots, \chi_{N-1}$, τότε έχουμε ένα κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους, άρα

$$C' = \max_{P_x} \{I(x; y)\} = \max_{P_x} \{H(x) - H(x|y)\} = \max_{P_x} \{H(x)\} = \log_2 \frac{N}{2} = \log_2 N - 1$$

$$\text{Επομένως έχουμε, } C' = \log_2 N - 1 \text{ και } C \geq C' \Rightarrow C \geq \log_2 N - 1, \quad (9.63)$$

Για το αρχικό κανάλι ισχύει:

$$\begin{aligned} C' &= \max_{P_x} \{I(x; y)\} = \max_{P_x} \{H(y) - H(y|x)\} = \\ &= \max_{P_x} \left\{ H(y) - H\left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \left. \begin{aligned} &\max_{P_x} \{H(Y)\} - H\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\max_{P_x} \{H(Y)\} \leq \log_2 N \end{aligned} \right\} \Rightarrow C \leq \log_2 N - 1, \quad (9.64) \end{aligned}$$

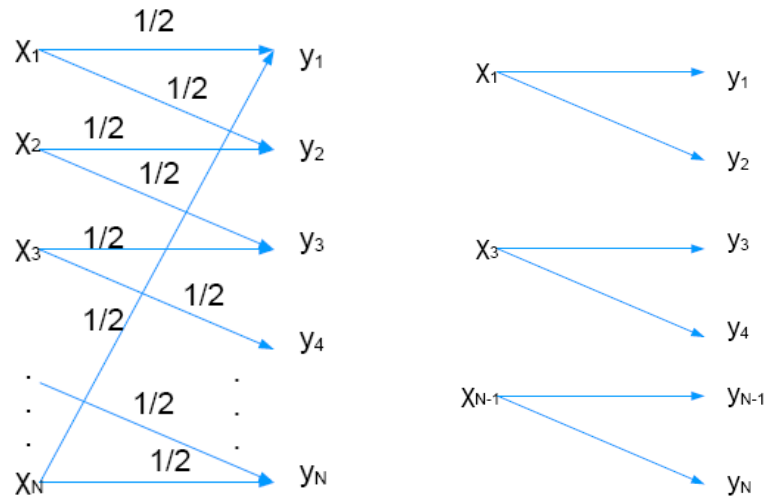
Από τις σχέσεις (9.63) και (9.64), για $N=|X|$, παίρνουμε:

$$C = \log_2 |X| - 1 \quad \text{bits/channel use} \quad (9.65)$$

$$\text{για } P_x(k) = \begin{cases} \frac{2}{N}, & k = 1, 3, \dots, N-1 \\ 0, & k = 2, 4, \dots, N-1 \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή το σύμβολο εισόδου είτε μεταφέρεται στην έξοδο με πιθανότητα 1/2 είτε μετασχηματίζεται σε ένα επόμενο γράμμα με πιθανότητα 1/2. Αν η είσοδος έχει 26 σύμβολα χρησιμοποιώντας ένα παρά ένα τα σύμβολα στην είσοδο, τότε μπορούν να μεταδοθούν 13 σύμβολα χωρίς σφάλμα σε κάθε μετάδοση. Οπότε η χωρητικότητα του εν λόγω καναλιού είναι $\log 13$ bit ανά μετάδοση. Συγκεκριμένα από τον τύπο της χωρητικότητας έχουμε:

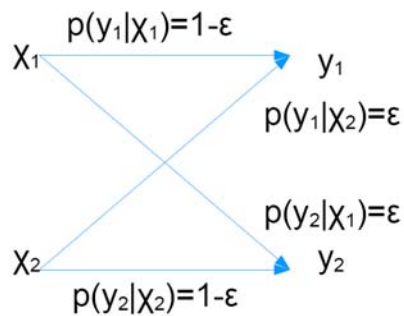
$$C = \max I(X; Y) = \max (H(Y) - H(Y|X)) = \max H(Y) - 1 = \log 26 - 1 = \log 13, \text{ θεωρώντας τις πιθανότητες στα σύμβολα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένες.}$$



Εικόνα 56. Θορυβώδης γραφομηχανή

9.5.4 Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC), το οποίο εμφανίζεται στην Εικόνα 57, αποτελεί το πιο απλό μοντέλο ενός καναλιού με σφάλμα, εμφανίζοντας όμως το μεγαλύτερο μέρος της πολυπλοκότητας του γενικότερου προβλήματος, αυτού της μετάδοσης με θόρυβο. Εξαιτίας της εμφάνισης σφάλματος, τα bits που λαμβάνονται δεν μπορούν να αποκαλύψουν που σημειώθηκαν τα λάθη. Κατά συνέπεια, όλα τα σύμβολα της πληροφορίας είναι αναξιόπιστα.



Εικόνα 57. Δυαδικό συμμετρικό κανάλι

Ωστόσο, υπάρχει η δυνατότητα σε ένα δυαδικό κανάλι να στείλουμε πληροφορία με μη μηδενικό ρυθμό μετάδοσης και απείρως μικρή πιθανότητα σφάλματος. Συνεπώς, στο συγκεκριμένο κανάλι θα ισχύει:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y | X) = H(Y) - \sum_x p_x(x) \cdot H(Y | X = x)$$

$$= H(Y) - \sum_x p_x(x) \cdot H(\varepsilon) = H(Y) - H(\varepsilon)$$

$$C = \max_{P_x} \{I(X;Y)\} = \max_{P_x} \{H(Y)\} - H(\varepsilon)$$

$$H(Y) \leq \log |y| = 1$$

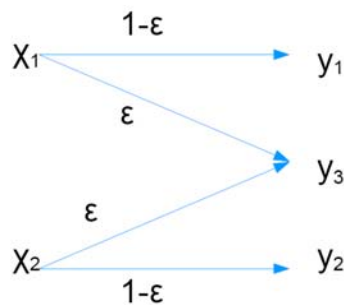
Προκύπτει ανισότητα επειδή η τυχαία μεταβλητή Y είναι δυαδική. Ισότητα θα έχουμε, όταν η κατανομή εισόδου είναι ομοιόμορφη.

Άρα $C=1-H(\varepsilon)$ bits /channel use .

Παρατήρηση: Αν $\varepsilon=1/2$ τότε η χωρητικότητα του καναλιού είναι $C=0$, κατά συνέπεια το κανάλι είναι άχρηστο.

9.5.5 Δυαδικό Κανάλι Διαγραφής

Αν σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι χαθούν κάποια bits, χωρίς όμως να καταστραφούν, τότε έχουμε το δυαδικό κανάλι διαγραφής. Σε αυτό το κανάλι, το ε μέρος των bits διαγράφονται. Ο δέκτης γνωρίζει ποια κομμάτια έχουν σβηστεί. Το δυαδικό κανάλι διαγραφής έχει δύο εισόδους και τρεις εξόδους (Εικόνα 58).



Εικόνα 58. Δυαδικό κανάλι διαγραφής

Υπολογίζουμε τη χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού διαγραφής ως εξής:

1^{ος} Τρόπος

$$C = \max_{P_x} \{I(X;Y)\} = \max_{P_x} \{H(Y) - H(X | Y)\} = \max_{P_x} \{H(Y) - H(\varepsilon)\} = \max_{P_x} \{H(Y)\} - H(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow C < \log_2 3 - H(\varepsilon) \quad (10.66)$$

2^{ος} Τρόπος

Εισάγουμε μια νέα Τ.Μ. : $E = \begin{cases} 1, \text{αν } Y = y_3 \\ \emptyset, \text{αν } Y \neq y_3 \end{cases}$, με $p_\varepsilon(1) = \varepsilon, p_\varepsilon(\emptyset) = 1 - \varepsilon$

Έχουμε ,

$$H(Y, \varepsilon) = H(Y) + H(\varepsilon | Y) = H(\varepsilon) + H(Y | \varepsilon) \Rightarrow$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + p_\varepsilon(\emptyset) \cdot H(Y | \varepsilon) + p_\varepsilon(1) \cdot H(Y | \varepsilon) \Rightarrow \text{ με το } \varepsilon = \emptyset \text{ και } \varepsilon = 1$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cdot H(Y | Y \neq y_3) + \varepsilon \cdot H(Y | Y = y_3) \Rightarrow$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cdot H(X | Y \neq y_3) \Rightarrow$$

$$H(Y) = H(\varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cdot H(X) \quad (10.67)$$

Άρα, από τις σχέσεις (10.66) και (10.67)

$$\Rightarrow C = \max_{P_x} \{ H(\varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cdot H(X) \} - H(\varepsilon) = (1 - \varepsilon) \max_{P_x} \{ H(X) \} \Rightarrow$$

$$C = 1 - \varepsilon \text{ bits}$$

Παρατηρήσεις:

Η πρώτη υπόθεση για τη μέγιστη του $H(Y)$ θα μπορούσε να είναι $\log 3$. Όμως, όποια κατανομή εισόδου και να χρησιμοποιήσουμε, δεν μπορούμε να την πετύχουμε.

Δεδομένου ότι ένα ε μέρος των bits χάνονται στο κανάλι, μπορεί να ανακτηθεί το πολύ, ένα ποσοστό $1 - \varepsilon$ των bits. Γι' αυτό και η χωρητικότητα είναι το πολύ $1 - \varepsilon$. Δεν είναι αμέσως προφανές ότι είναι δυνατόν η επίτευξη αυτού του ποσοστού.

Σε πολλά κανάλια πρακτικά, ο αποστολέας λαμβάνει κάποια ανατροφοδότηση από το δέκτη. Οπότε αν ένα κομμάτι της πληροφορίας χαθεί κατά την αποστολή, τότε διαβιβάζονται εκ νέου μέχρι να ολοκληρωθεί η λήψη τους. Με ανατροφοδότηση λοιπόν είναι εφικτό να επιτευχτεί χωρητικότητα ίση με $1 - \varepsilon$.

9.5.6 Γενικευμένο Συμμετρικό Κανάλι

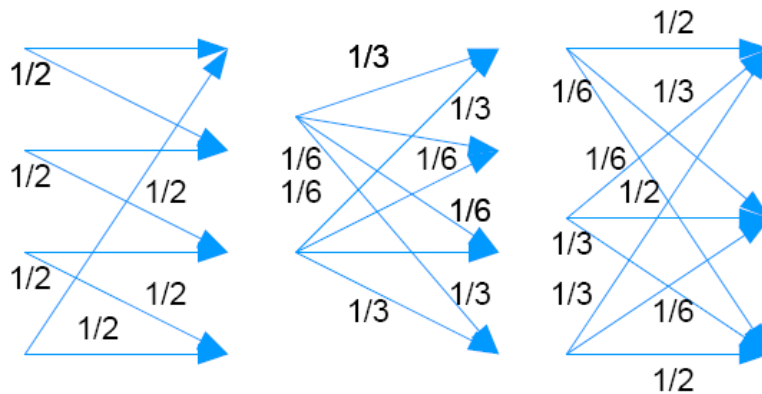
Υποθέτουμε ότι το πλήθος M των συμβόλων σε μια είσοδο , μπορεί να είναι διαφορετικό από το πλήθος N των συμβόλων στην έξοδο ενός καναλιού. Τότε, η μήτρα μεταφοράς γράφεται ως εξής:

$$P = \begin{bmatrix} P(y_1 | x_1)P(y_2 | x_1)...P(y_N | x_1) \\ P(y_1 | x_2)P(y_2 | x_2)...P(y_N | x_2) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ P(y_1 | x_M)P(y_2 | x_M)...P(y_N | x_M) \end{bmatrix}, \text{ για } \begin{matrix} X \in x, |x| = M \\ Y \in y, |y| = N \end{matrix} \quad (9.68)$$

Για την περίπτωση που το κανάλι είναι αθόρυβο, θα ισχύει $M=N$ και η μήτρα μεταφοράς θα έχει διαγώνιο μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} P(y_1 | x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(y_2 | x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(y_M | x_M) \end{bmatrix} \quad (9.69)$$

Οι συγκεκριμένες συνθήκες μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια διαγραμμάτων, όπως το παράδειγμα της Εικόνας 59.



Εικόνα 59. Συμμετρικά κανάλια με θόρυβο

Προφανώς, ισχύει $\sum_{j=1}^N p(y_j | x_i) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (9.70)$

Συγκεκριμένα, η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού είναι $C = 1 - H(p)$ bits ανά μετάδοση και η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού διαγραφής είναι $C = 1 - a$ bits ανά μετάδοση. Εξετάζοντας το κανάλι με τη μήτρα μεταφοράς:

$$p(y|x) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \quad (9.71)$$

το περιεχόμενο στην x-οστή γραμμή και την y-στήλη δηλώνει την υπό συνθήκη πιθανότητα $p(y|x)$ ότι δηλαδή η y λαμβάνεται όταν το x έχει αποσταλεί. Σε αυτό το κανάλι, όλες οι σειρές της μήτρας μεταφοράς είναι ίδιες αλλά με διαφορετική μεταξύ τους διάταξη ισχύοντας έτσι το ίδιο και για τις στήλες. Ένα τέτοιο κανάλι λέγεται ότι είναι συμμετρικό. Ένα άλλο παράδειγμα ενός συμμετρικού καναλιού είναι με την μορφή:

$$Y = X + Z \pmod{c} \quad (9.72)$$

όπου το Z κατανέμεται στους ακέραιους αριθμούς $\{0, 1, 2, \dots, c-1\}$, το X έχει το ίδιο αλφάβητο όπως το Z , και το Z είναι ανεξάρτητο του X .

Από τις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε εύκολα να βρούμε μια ρητή έκφραση για τη χωρητικότητα του καναλιού. Έστω ότι το r αποτελεί μια γραμμή της μήτρας μεταφοράς, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(r) \\ &\leq \log |Y| - H(r) \end{aligned} \quad (9.73)$$

Η ισότητα ισχύει αν η κατανομή της εξόδου είναι ομοιόμορφη. Αλλά για $p(x) = 1/|X|$ επιτυγχάνεται μια ομοιόμορφη κατανομή του Y , όπως φαίνεται από:

$$p(y) = \sum_{x \in X} p(y|x)p(x) = \frac{1}{|X|} \sum p(y|x) = c \frac{1}{|X|} = \frac{1}{|Y|} \quad (9.74)$$

όπου c είναι το άθροισμα των συμβόλων που εισήρθαν σε μια στήλη της μήτρας μεταφοράς.

Έτσι, η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι (9.71) :

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) = \log 3 - H(0.5, 0.3, 0.2)$$

Η χωρητικότητα C χαρακτηρίζεται από μια ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων εισόδου.

Κατά τον υπολογισμό της χωρητικότητας, ισχύει ότι οι σειρές έχουν

υποστεί μια διαφορετική διάταξη μεταξύ τους και ότι το άθροισμα των στηλών είναι όμοιο. Λαμβάνοντας υπόψη όλες αυτά τα χαρακτηριστικά, ισχύει:

Ορισμός

Αν όλες οι γραμμές έχουν τα ίδια στοιχεία με διαφορετική διάταξη και όλες οι στήλες έχουν επίσης τα ίδια στοιχεία με διαφορετική διάταξη, τότε το κανάλι ονομάζεται συμμετρικό.

Αν όλες οι γραμμές έχουν τα ίδια στοιχεία με διαφορετική όμως διάταξη και

$$\sum_{i=1}^N p(y_j | x_i) = \sum_{j=1}^M p(y_k | x_i), \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (9.75)$$

τότε το κανάλι ονομάζεται ασθενώς συμμετρικό.

Για παράδειγμα, ένα κανάλι με αυτή τη μήτρα μεταφοράς είναι ασθενώς συμμετρικό, αλλά όχι συμμετρικό.

$$p(y|x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Οπότε για ένα ασθενή συμμετρικό κανάλι, ισχύει: $C = \log |y| - H$ (η γραμμή της μήτρας μεταφοράς) και αυτό επιτυγχάνεται από μια ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων στην είσοδο τους.

Και στις δύο όμως περιπτώσεις, αποδεικνύεται ότι:

$$C = \log_2 |y| - H(p(y_1 | x_i), \dots, p(y_M | x_i)) \text{ bits/channel use}$$

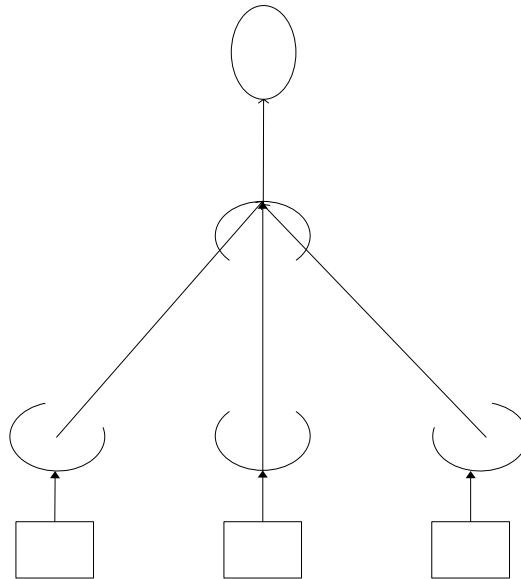
9.5.7 Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων

Ένα σύστημα με πολλούς αποστολείς και παραλήπτες προσθέτει πολλά νέα στοιχεία στο πρόβλημα της επικοινωνίας: παρεμβολή, συνεργασία και ανατροφοδότηση. Αυτά είναι και τα κύρια θέματα της θεωρίας πληροφορίας δικτύων. Το γενικό πρόβλημα περιγράφεται με απλό τρόπο ως εξής: δεδομένου ενός συνόλου αποστολέων και παραληπτών και ενός πίνακα μετάβασης δικτύου, που περιγράφει τα αποτελέσματα των

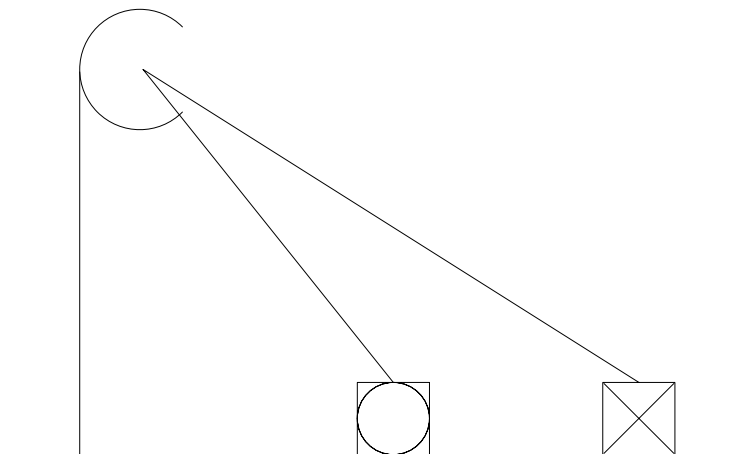
παρεμβολών και του θορύβου στο δίκτυο, καλούμαστε να αποφασίσουμε εάν οι πηγές μπορούν να διαβιβάσουν πληροφορία μέσω του καναλιού. Αυτό το γενικό πρόβλημα δεν έχει ακόμα λυθεί, οπότε παρακάτω εξετάζονται διάφορες ειδικές περιπτώσεις.

Παραδείγματα μεγάλων επικοινωνιακών δικτύων περιλαμβάνουν δίκτυα υπολογιστών, δορυφορικά δίκτυα και το τηλεφωνικό σύστημα. Ακόμη και μέσα σε έναν υπολογιστή υπάρχουν διάφορα εξαρτήματα που «μιλάνε» μεταξύ τους. Μια πλήρης θεωρία όσον αφορά τη θεωρία πληροφορίας δικτύων θα είχε ευρεία εφαρμογή στο σχεδιασμό των επικοινωνιακών και υπολογιστικών δικτύων.

Υποθέτουμε ότι m σταθμοί επιθυμούν να επικοινωνήσουμε με έναν κοινό δορυφόρο μέσω ενός κοινού καναλιού, όπως φαίνεται στην Εικόνα 60. Αυτό είναι γνωστό σαν κανάλι πολλαπλής πρόσβασης (multi channel access). Τα ζητήματα που προκύπτουν είναι πώς οι διάφοροι αποστολείς συνεργάζονται μεταξύ τους για να στείλουν πληροφορίες στον δέκτη, τι ποσοστά επικοινωνίας επιτυγχάνονται ταυτόχρονα, τι περιορισμούς θέτουν οι παρεμβολές μεταξύ των αποστολέων στο συνολικό ποσοστό επικοινωνίας. Επίσης, μπορούμε να αντιστρέψουμε το δίκτυο και να θεωρήσουμε ένα τηλεοπτικό σταθμό, ο οποίος στέλνει πληροφορία σε m τηλεοπτικούς δέκτες, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 61. Πώς όμως ο αποστολέας κωδικοποιεί πληροφορία που απευθύνεται σε διαφορετικούς δέκτες μέσω ενός απλού σήματος και ποια είναι τα ποσοστά που στέλνεται η πληροφορία σ'αυτούς τους δέκτες; Για το κανάλι αυτό οι απαντήσεις είναι γνωστές για συγκεκριμένες περιπτώσεις.



Εικόνα 60. Κανάλι πολλαπλής πρόσβασης

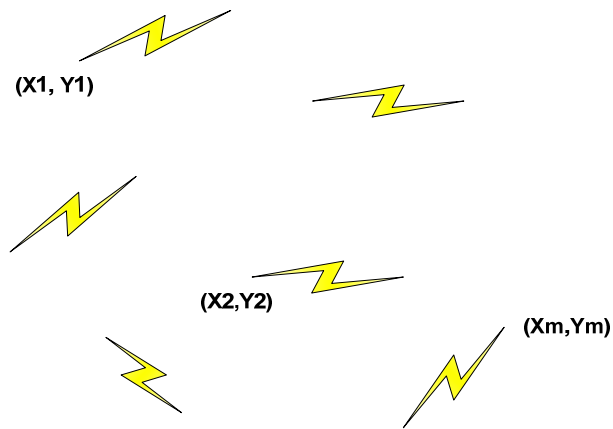


Εικόνα 61. Κανάλι εκπομπής σήματος

Υπάρχουν άλλα κανάλια, όπως το κανάλι αναμετάδοσης (όπου υπάρχει μια πηγή κι ένας προορισμός, αλλά επιπλέον και ένα ή περισσότερα ζεύγη αποστολέα-δέκτη, που δρουν ως αναμεταδότες, για να διευκολύνουν την επικοινωνία μεταξύ πηγής και προορισμού), το κανάλι παρεμβολής (δύο αποστολείς και δύο παραλήπτες με crosstalk παρεμβολή) και το διπλό-two way κανάλι (δύο ζεύγη αποστολέα-παραλήπτη που ανταλλάσσουν μεταξύ τους πληροφορία). Για όλα αυτά τα κανάλια υπάρχουν απαντήσεις σε κάποιες μόνο από τις ερωτήσεις που αφορούν τα ποσοστά της

επιτυχημένης επικοινωνίας και τις στρατηγικές κατάλληλης κωδικοποίησης.

Τα κανάλια, που αναφέραμε, μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις ενός γενικού επικοινωνιακού δικτύου, το οποίο αποτελείται από m κόμβους που προσπαθούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, κάτι που φαίνεται στην Εικόνα 62. Σε κάθε χρονική στιγμή ο κόμβος i στέλνει ένα σύμβολο x_i , το οποίο εξαρτάται από το μήνυμα που θέλει να στείλει, καθώς και από παλαιότερα ληφθέντα σύμβολα στον κόμβο. Η ταυτόχρονη μετάδοση των συμβόλων (x_1, x_2, \dots, x_m) οδηγούν σε τυχαία λαμβανόμενα σύμβολα (Y_1, Y_2, \dots, Y_m) , με υπό συνθήκη κατανομή πιθανότητας $p(y_1, y_2, \dots, y_m | x_1, x_2, \dots, x_m)$.

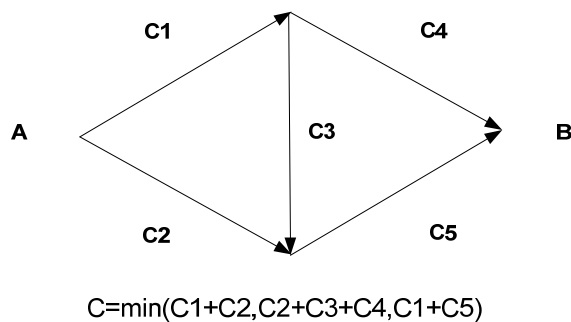


Εικόνα 62. Επικοινωνιακό δίκτυο

Η πιθανότητα $p(y_j | x_i)$ εκφράζει την επίδραση του θορύβου και των παρεμβολών που υπάρχουν στο δίκτυο. Εάν η πιθανότητα $p(y_j | x_i)$ παίρνει μόνο τιμές 0 και 1, τότε το δίκτυο είναι ντετερμινιστικό. Εάν οι πηγές είναι ανεξάρτητες, τα μηνύματα που στέλνονται από τους κόμβους είναι επίσης ανεξάρτητα. Ωστόσο, για να επιτύχουμε πλήρη γενικότητα στη μελέτη, πρέπει να θεωρήσουμε ότι οι πηγές είναι εξαρτημένες. Γεννάται όμως το ερώτημα πώς αυτή η ύπαρξη εξάρτησης παίζει ρόλο στη μείωση της ποσότητας της πληροφορίας που μεταδίδεται. Από την άλλη μεριά, με δεδομένη τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της πηγής και τη

συνάρτηση μετάδοσης στο κανάλι, πρέπει να εξεταστεί αν μπορεί η πηγή να μεταδώσει πληροφορία μέσα από το κανάλι και να γίνει ανάκτηση αυτής στον προορισμό με την κατάλληλη παραμόρφωση.

Η θεωρία της ροής στα δίκτυα έχει ικανοποιητικές απαντήσεις σε θέματα όπως στη θεωρία κυκλωμάτων και στα δίκτυα σωλήνων νερού. Για παράδειγμα, για δίκτυο σωλήνων με μια πηγή και έναν προορισμό, που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, η μέγιστη ροή από το A στο B μπορεί να υπολογισθεί εύκολα με το θεώρημα των Ford-Fulkerson. Πρόκειται για το θεώρημα Μέγιστης Ροής και Ελάχιστη Τομής, σύμφωνα με το οποίο σε ένα δίκτυο μεταφοράς η μέγιστη τιμή ροής είναι ίση με την ελάχιστη από τις χωρητικότητες όλων των δυνατών τομών του δικτύου (διευκρινίζεται ότι τομή ενός δικτύου μεταφοράς είναι μια τομή του γραφήματος, η οποία διαχωρίζει την είσοδο από την έξοδο και η χωρητικότητα μιας τομής είναι το άθροισμα των χωρητικότητων των κλάδων που τέμνει και που έχουν κατεύθυνση από την είσοδο προς την έξοδο). Υποθέτουμε πως οι ακμές έχουν χωρητικότητα C_i , όπως φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.



Εικόνα 63. Δίκτυο σωληνώσεων

Είναι φανερό ότι η μέγιστη ροή κατά μήκος κάθε τομής δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από άθροισμα των χωρητικότητων των ακμών της τομής. Έτσι, ελαχιστοποιώντας τη μέγιστη ροή που διέρχεται από τις τομές προκύπτει ένα άνω όριο στη χωρητικότητα του καναλιού. Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson αποδεικνύει πως αυτή η χωρητικότητα μπορεί να επιτευχθεί.

Η θεωρία της ροής πληροφορίας στα δίκτυα δεν έχει τις ίδιες απλές απαντήσεις όπως η θεωρία στα δίκτυα σωληνώσεων. Παρόλο που αποδεικνύεται ένα ανώτατο όριο στο ποσοστό της πληροφορίας που μεταδίδεται, αυτά τα όρια δεν είναι εφικτά σε γενικές γραμμές. Μία ολοκληρωμένη θεωρία, που συνδυάζει την κωδικοποίηση πηγής και την κωδικοποίηση καναλιού, αποτελεί ζητούμενο και απώτερο σκοπό της Θεωρίας Πληροφορίας.

Διάφορα παραδείγματα καναλιών που περιλαμβάνουν γκαουσιανό θόρυβο αποτελούν μερικά από τα βασικά κανάλια για τη μελέτη της θεωρίας πληροφορίας δικτύων, καθώς προσεγγίζουν τις πραγματικές συνθήκες και μας οδηγούν σε συγκεκριμένες και εύκολα αποκωδικοποιήσιμες απαντήσεις. Τα κανάλια πολλαπλής πρόσβασης, η κωδικοποίηση συσχετιζόμενων πηγών, το κανάλι αναμετάδοσης, το κανάλι αναμετάδοσης, η κωδικοποίηση τυχαίας μεταβλητής με επιπρόσθετη πληροφορία και το πρόβλημα του ποσοστού παραμόρφωσης είναι μερικά από τα θέματα που αναλύονται στο συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο. Ωστόσο, υπάρχει ένας αριθμός από «ανοικτά» προβλήματα, ενώ δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα μια περιεκτική θεωρία για τα δίκτυα πληροφορίας. Ακόμα κι αν μια τέτοια θεωρία βρεθεί, θα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη για εύκολες εφαρμογές. Παρόλ'αυτά, η θεωρία θα μπορεί να υποδείξει στους σχεδιαστές των επικοινωνιών πόσο κοντά είναι στη βελτιστοποίηση και πιθανώς να προτείνει κάποια μέσα για να βελτιωθούν τα ποσοστά μετάδοσης επικοινωνίας.

Ασκήσεις

1. Σε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι εισέρχονται σύμβολα με ρυθμό $r_s = 1000$ σύμβολα/δευτερόλεπτο. Αν γνωρίζουμε πως τα σύμβολα 0 και 1 είναι ισοπίθανα, να υπολογιστεί ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι αυτό για κάθε μια από τις περιπτώσεις $p = 0.9$, $p = 0.8$ και $p = 0.6$, όπου p η πιθανότητα σωστής μετάδοσης.

2. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C ενός διακριτού συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη (Binary Symmetric Channel, BSC).

3. Ένα τερματικό CRT χρησιμοποιείται για την αποστολή αλφαριθμητικών δεδομένων σε έναν υπολογιστή. Το CRT είναι συνδεδεμένο με τον υπολογιστή με μια τηλεφωνική γραμμή που έχει εύρος ζώνης 3000Hz και SNR εξόδου 10 dB. Δεχόμαστε πως το τερματικό έχει 128 χαρακτήρες και ότι η αποστολή δεδομένων από τον τερματικό αποτελείται από ακολουθίες ανεξάρτητων ισοπίθανων χαρακτήρων.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

(β) Βρείτε το μέγιστο (θεωρητικό) ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δεδομένα από τον τερματικό στον υπολογιστή χωρίς σφάλματα.

4. Τηλεοπτικό σήμα με εύρος ζώνης 10 MHz οδηγείται σε κύκλωμα δειγματοληψίας που λειτουργεί με ρυθμό ίσο με 1.2 φορές το ρυθμό Nyquist. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη n δειγματοληψία (υποθέτουμε πως είναι στατιστικά ανεξάρτητα) κβαντίζονται με την χρήση ενός κβαντιστή 8 bits. Η δυαδική ακολουθία που προκύπτει, μεταδίδεται δια μέσου ιδανικού χαμηλοπερατού διαύλου με εύρος ζώνης 30MHz και προσθετικό λευκό θόρυβο με κατανομή Gauss και ισχύς τέτοια ώστε να είναι $SNR=20dB$. Είναι δυνατή η χωρίς σφάλματα μετάδοση της δυαδικής ακολουθίας μέσα από το συγκεκριμένο δίαυλο;

5. Ένας φίλος σου διατείνεται ότι μπορεί να σχεδιάσει ένα σύστημα για τη διαβίβαση της εξόδου ενός μίνι υπολογιστή σε έναν εκτυπωτή γραμμών που λειτουργεί με την ταχύτητα 30 γραμμών ανά λεπτό μέσω μιας κοινής τηλεφωνικής γραμμής εύρους ζώνης 3.5 KHz με λόγο σήματος προς θόρυβο $SNR=30$ dB. Ας δεχθείτε ότι ο εκτυπωτής αυτός χρειάζεται

δεδομένα των 8 bits ανά χαρακτήρα και τυπώνει γραμμές των 80 χαρακτήρων. Τον πιστεύεις;

6. Η έξοδος μιας ψηφιακής κάμερας διοχετεύεται σε τηλεπικοινωνιακό κανάλι με θόρυβο τέτοιας ισχύος ώστε να έχουμε $SNR=20dB$ και το μέσο ρυθμό πληροφορίας να είναι $R = I \cdot r = 374.8 \cdot 10^5 \text{ bits / sec}$. Να υπολογιστεί το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης ώστε να μεταδοθεί η πληροφορία χωρίς σφάλματα.

7. Ένας τεχνικός επικοινωνίας σχεδίασε ένα σύστημα διασύνδεσης της εξόδου ενός μικροεπεξεργαστή με έναν εκτυπωτή που βρίσκεται σε άλλη θέση και έχει ταχύτητα εκτύπωσης 50 γραμμές/min με 400 χαρακτήρες/γραμμή. Επιτυγχάνει τη διασύνδεση αυτή μέσω τηλεφωνικής γραμμής με εύρος ζώνης $B=3.4 \text{ kHz}$, με τέτοια ισχύ που το σήμα να φτάνει στον εκτυπωτή με ποιότητα $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 3dB$. Ο κώδικας που χρησιμοποιεί είναι `ascii`, δηλαδή 8bits/χαρακτήρα. Ποιά η γνώμη σας για την αποτελεσματικότητα της σύνδεσης αυτής;

8. Δίδεται το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη (κανάλι προσθετικού θορύβου), του οποίου η τυχαία μεταβλητή των τιμών εξόδου Y δίνεται από τη σχέση $Y=X+Z$. Η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $\{0,1\}$ με την ίδια πιθανότητα, ενώ η Z παίρνει τις τιμές $\{0, \alpha\}$, με πιθανότητες $P(Z=0)=P(Z=\alpha)=1/2$, όπου το α ανήκει στο σύνολο των ακεραίων $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Να σχεδιάσετε τα διαφορετικά κανάλια που είναι δυνατόν να προκύψουν για τις διαφορετικές τιμές του α , και να βρείτε τη χωρητικότητά τους.

(Υπόδειξη: Να παρατηρήσετε ότι σημαντικές για την απάντησή σας είναι οι τιμές του α , $0, \pm 1, \neq \pm 1$.)

9. Από την μία άκρη ενός επιταχυντή σωματιδίων εκπέμπονται στην αρχή πρωτόνια και νετρόνια, με πιθανότητες $3/4$, και $1/4$ αντίστοιχα, τα οποία παραλαμβάνονται στην έξοδο του επιταχυντή. Στη συνέχεια διεξάγεται πείραμα στη διάρκεια του οποίου εκπέμπονται όχι μόνο τα πρωτόνια και νετρόνια με τις ανωτέρω πιθανότητες, αλλά και συνεχής δέσμη ηλεκτρονίων με την αντίθετη όμως κατεύθυνση από αυτή των σωματιδίων. Έχει παρατηρηθεί ότι με πιθανότητα $f=1/4$ τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με

τα δύο αυτά σωματίδια με αποτέλεσμα την καταστροφή των σωματιδίων πριν αυτά προλάβουν και φτάσουν στον προορισμό τους (έξοδο επιταχυντή). Να βρείτε ποιο είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι (επιταχυντή) καθώς και την χωρητικότητα του καναλιού (για κατάλληλες πιθανότητες εκπομπής πρωτονίων και νετρονίων), στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

α) Πριν από τη διεξαγωγή του πειράματος, όταν δηλαδή δεν εκπέμπονται ηλεκτρόνια από την αντίθετη κατεύθυνση, και,

β) Κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του πειράματος, όταν δηλαδή έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων από την αντίθετη κατεύθυνση. Με ποιο είδος καναλιού θα μοντελοποιούσατε τον επιταχυντή; Φτιάξτε το κατάλληλο σχήμα.

(Υπόδειξη: Δίδεται ότι $H(Y/X)=H(f)=0,811$ bits και ότι $\log_2 3=1,585$)

10. Υποθέστε ότι μεταφέρεται ψηφιοποιημένη τηλεοπτική εικόνα από μία πηγή η οποία χρησιμοποιεί ανάλυση 480×500 pixels και για κάθε pixel η χρωματική πληροφορία μπορεί να πάρει 32 διαφορετικές τιμές έντασης. Στη διάρκεια του δευτερολέπτου μεταδίδονται 30 πλαίσια.

Βρείτε το ρυθμό, R , μετάδοσης της πηγής.

Αν η τηλεοπτική εικόνα μεταδοθεί σε κανάλι εύρους ζώνης 4.5 MHz με signal-to-noise ratio 35 dB, να βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού σε bps.

11. Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα x_i , $i=1, 2$, με πιθανότητα εμφάνισης του x_1 , $p(x_1)=a$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα y_j , $j=1, 2, 3, 4$ όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, $H(Y)$.

Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα $H(Y/X)$.

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

12. Θεωρούμε ένα ενθόρυβο κανάλι, την ενθόρυβη γραφομηχανή, της

οποίας τα σύμβολα – γράμματα εισόδου και εξόδου είναι τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφάβητου.

Ποια η χωρητικότητα του καναλιού αν κάθε γράμμα που πληκτρολογείται εκτυπώνεται αναλλοίωτο;

Ποια η χωρητικότητα του καναλιού αν η πληκτρολόγηση ενός γράμματος οδηγεί με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στην εκτύπωση του ίδιου γράμματος και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στην εκτύπωση του επόμενου στο αλφάβητο γράμματος; Για παράδειγμα, η πληκτρολόγηση του Z οδηγεί με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στην εκτύπωση του Z και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στην εκτύπωση του A.

13. Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα $x_i = \{0, 1, 2\}$, $i=0, 1, 2$, με πιθανότητες εμφάνισης $p(x_0)=\alpha$, $p(x_1)=(2/3)-\alpha$ και $p(x_2)=1/3$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα $y_j = \{0, 1, 2\}$, $j=0, 1, 2$. Ισχύει $Y=X+Z \pmod{3}$, όπου η Z είναι ανεξάρτητη της X και λαμβάνει τις τιμές $z_i = \{0, 1, 2\}$ $i=0, 1, 2$ με τις ακόλουθες πιθανότητες: $P(z_0)=1/2$, $P(z_1)=1/4$, $P(z_2)=1/4$.

Ζητείται

A) Να καταρτιστεί ο πίνακας μετάβασης του καναλιού.

B) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, $H(Y)$.

Γ) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα $H(Y/X)$.

Δ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

(Υπόδειξη: η πράξη $u \pmod{p}$ δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του u δια του p . Για παράδειγμα, $7 \pmod{7}=0$, $8 \pmod{7}=1$, $9 \pmod{7}=2$, $10 \pmod{7}=3$, $11 \pmod{7}=4$, κοκ.)

14. Έστω ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{0,1\}$ με πιθανότητες εμφάνισης $P(X=0)=1/2$, $P(X=1)=1/2$, ενώ η τυχαία μεταβλητή $Y=\{0,1\}$ συμβολίζει τις τιμές εξόδου. Ο πίνακας μετάβασης του καναλιού είναι

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

A) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της X δεδομένου ότι γνωρίζουμε την Y.

B) Να υπολογιστεί η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού.

Γ) Για ποια τιμή του 'ε', η $H(X/Y)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της;

Δ) Για ποια τιμή του 'ε', η $I(X;Y)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

Το *δυσιαδικό κανάλι διαγραφής* είναι ένα κανάλι που έχει δύο εισόδους, τις $X_1=0$ και $X_2=1$ και τρεις εξόδους, τις $Y_1=0$, $Y_2=\epsilon$ και $Y_3=1$, εκ των οποίων η $Y_2=\epsilon$ είναι αμφίβολη και επομένως πρέπει να διαγραφεί. Εάν ένα τέτοιο κανάλι έχει τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης καναλιού:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & p \end{bmatrix}$$

Ε) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα καναλιού.

ΣΤ) Αν η πηγή έχει ισοπίθανες εισόδους, να υπολογιστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου του καναλιού για $p=0.8$.

15. Έστω ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{0,1,2,3\}$ με πιθανότητες εμφάνισης $P(X=0)=1/2$, $P(X=1)=1/4$, $P(X=2)=3/16$, $P(X=3)=1/16$. Το κανάλι είναι ενθόρυβο με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y=\{0,1,2,3\}$ στην έξοδο του καναλιού.

β) Εάν το σύμβολο που λαμβάνουμε κατά την έξοδο του καναλιού είναι το $Y=0$, υπολογίστε τις πιθανότητες το σύμβολο που μεταδόθηκε να ήταν είτε το $X=0$, είτε το $X=1$, είτε το $X=2$, είτε το $X=3$. Υπολογίστε την $H(X/Y=0)$.

γ) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι.

δ) Εάν θεωρήσουμε ότι το κανάλι είναι **χωρίς θόρυβο** ποια είναι η ροή πληροφορίας στο κανάλι και ποια μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού;

ε) Ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα του **ενθόρυβου** καναλιού καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού;

(Υπόδειξη: Για να απαντήσετε το υποερώτημα (ε), να κάνετε χρήση της σχέσης

$$H(Y/X) = \sum_i P(X=i) H(Y/X=i) = -\sum_i P(X=i) \sum_j P(Y=j/X=i) \log P(Y=j/X=i) = -\sum_i P(X=i) \sum_j p_{ij} \log p_{ij}$$

στην οποία παρατηρείτε ότι η $H(Y/X)$ είναι ανεξάρτητη από τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού όταν οι $\sum_j p_{ij} \log p_{ij}$ έχουν πάντα το ίδιο άθροισμα για κάθε i πράγμα που συμβαίνει στην περίπτωση του πίνακα μετάβασης της άσκησης.)

16. Θεωρούμε το *δυαδικό κανάλι διαγραφής* που είναι ένα κανάλι με δύο εισόδους, τις X_1 και X_2 , με πιθανότητες $p(X_1)=\alpha$ και $p(X_2)=1-\alpha$, αντίστοιχα, και τρεις εξόδους, τις Y_1 , Y_2 και Y_3 . Ακολουθώς δίνεται ο πίνακας μετάβασης του καναλιού:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α. Να υπολογιστεί

(i). η $H(Y)$,

(ii). η υπό συνθήκη πληροφορία $H(Y/X)$.

β. Να υπολογιστεί η εντροπία $H(X)$ και να βρεθεί το μέγιστό της, καθώς και οι συνθήκες που αυτό συμβαίνει.

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα ε του πίνακα μετάβασης δεδομένου ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι $C=0.531$.

17. Θεωρούμε κανάλι επικοινωνίας με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

όπου $X, Y \in \{0, 1\}$

Ζητείται να

A) Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού καθώς και την κατανομή πιθανοτήτων εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη χωρητικότητα.

B) Δίδεται ένα Z κανάλι με πίνακα μετάβασης $P = (p_{ij})$. Βρείτε την περιοχή των πιθανοτήτων εισόδου και πίνακα μετάβασης για τις οποίες είναι δυνατόν να επιτευχθεί η μέγιστη χωρητικότητα. Τι παρατηρείτε;

{Υπόδειξη: δημιουργήστε έναν πίνακα ο οποίος στη μία στήλη θα έχει τις τιμές του p στο διάστημα $[0.01, 0.99]$ στη δεύτερη στήλη τις τιμές του a και στην τρίτη στήλη τις τιμές της μέγιστης χωρητικότητας. Για τη δημιουργία του πίνακα χρησιμοποιείτε βηματισμό 0.05, δηλαδή κάνετε χρήση των τιμών $p=0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, \dots, 0.95, 0.99$ }

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Για το ερώτημα 1, ανατρέξτε στον ορισμό της χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού, εκφράστε την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού και προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της. Για το ερώτημα 2, ακολουθείστε την υπόδειξη.

18. Δίνεται το δυαδικό (erasure) κανάλι χωρίς μνήμη, με αλφάβητο εισόδου $\{0, 1\}$, δηλαδή $x_1=0$ και $x_2=1$ και πιθανότητα εμφάνισης καθενός από αυτά στην είσοδο του καναλιού ίση με $1/2$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα $0, 1$ και $*$, δηλαδή $y_1=0, y_2=1$ και $y_3=*$, όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Στην περίπτωση του καναλιού αυτού ισχύει ακόμα: $p(x_1/y_1)=p(x_2/y_2)=1$, $p(x_1/y_2)=p(x_2/y_1)=0$ και $p(x_1/y_3)=p(x_2/y_3)=1/2$.

A) Να υπολογιστεί η $H(X)$.

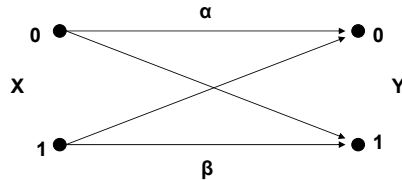
B) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα $H(X/Y)$.

Γ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

19. Δίδεται ένα δυαδικό κανάλι Z, το οποίο χαρακτηρίζεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ (στον πίνακα μετάβασης έχουμε $P_{ij} =$

$P(\text{έξοδος}=j/\text{είσοδος}=i)$). Ζητείται η χωρητικότητα του καναλιού θεωρώντας ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων '0' και '1' στην είσοδο του καναλιού είναι ίσες.

20. Ο πομπός (X) ενός επικοινωνιακού συστήματος παράγει πληροφορία με βάση τις καταστάσεις 0 και 1. Ο δέκτης (Y) του συγκεκριμένου επικοινωνιακού συστήματος λαμβάνει την πληροφορία μέσω ενός καναλιού του οποίου το διάγραμμα μετάβασης παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογισθούν:

(i) $P(Y=0)$ και $P(Y=1)$, όταν $P(X=0)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{3}{4}$, $a=0.75$ και $\beta=0.9$

(ii) $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$ και $H(Y/X)$

(iii) Ο ρυθμός της μεταδιδόμενης πληροφορίας στο κανάλι, όταν ο ρυθμός της παραγόμενης πληροφορίας της πηγής, είναι $r_s = 1000 \dots symbol/sec$

21. Έστω ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{0,1,2,3\}$ με πιθανότητες εμφάνισης $P(X=0)=1/2$, $P(X=1)=1/4$, $P(X=2)=3/16$, $P(X=3)=1/16$. Το κανάλι είναι ενθόρυβο με πίνακα μετάβασης τον ακόλουθο:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(A) Να βρεθούν οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y=\{0,1,2,3\}$ στην έξοδο του καναλιού καθώς και η $H(Y)$.

(B) Εάν το σύμβολο που λαμβάνουμε στην έξοδο του καναλιού είναι το $Y=0$, υπολογίστε τις 4 παρακάτω πιθανότητες: το σύμβολο που μεταδόθηκε να ήταν το $X=0$, το $X=1$, το $X=2$, και το $X=3$. Υπολογίστε

επίσης την $H(X/(Y=0))$.

(Γ) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται μέσα από το κανάλι.

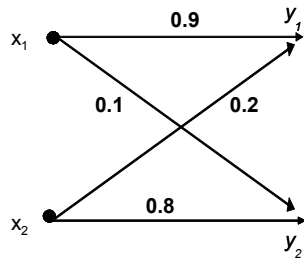
(Δ) Να βρεθεί η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού παρουσία θορύβου βάσει του παραπάνω πίνακα μετάβασης, καθώς επίσης η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού απουσία θορύβου στο κανάλι.

22. Έστω ένα διακριτό κανάλι C_1 χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{x_1, x_2\}$ με πιθανότητες εμφάνισης

$P(X=x_1)=P(X=x_2)=0.5$, ενώ ο πίνακας μετάβασης του καναλιού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

(α) Ζητούνται τα εξής:

i) Οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y=\{y_1, y_2\}$ στην έξοδο του καναλιού καθώς και η $H(Y)$.



ii) Να βρεθεί η $H(Y/X=x_1)$ και στη συνέχεια υπολογίστε την $H(Y/X)$ αν γνωρίζετε ότι η $H(Y/X=x_2)=0,722$ bits.

iii) Η χωρητικότητα του καναλιού C_1 .

(β) Στο προηγούμενο κανάλι C_1 συνδέουμε σε σειρά ένα δεύτερο όμοιο κανάλι C_2 , έτσι ώστε οι έξοδοι $Y=\{y_1, y_2\}$ του πρώτου να αποτελούν τις εισόδους του δεύτερου. Οι έξοδοι του καναλιού C_2 είναι οι $Z=\{z_1, z_2\}$. Ζητούνται τα εξής:

i) Θεωρώντας τη σύνδεση των καναλιών C_1 και C_2 ως το σύνθετο κανάλι C_{1+2} , το οποίο επομένως έχει εισόδους τις $X=\{x_1, x_2\}$ και εξόδους τις $Z=\{z_1, z_2\}$, να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης του C_{1+2} .

ii) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου $\rho(z_1)$ και $\rho(z_2)$.

Κεφάλαιο 10.

Κωδικοποίηση καναλιού

Κύριος στόχος κατά τη μετάδοση πληροφορίας μέσα από τα επικοινωνιακά κανάλια είναι η αξιοπιστία, που μετριέται με την πιθανότητα σωστής λήψης στον δέκτη. Λόγω της παρουσίας του θορύβου, μια αξιόπιστη μετάδοση – δηλαδή μετάδοση με πιθανότητα σφάλματος μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη τιμή – καθίσταται δυνατή ακόμη και με θορυβώδη κανάλια, αρκεί ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων να είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα του καναλιού. Ωστόσο, η χρήση ενός μέρους μόνο των δυνατοτήτων της εισόδου περιορίζει το πλήθος των δυνατών συμβόλων αυτής. Σ' αυτό το σημείο η θεωρία κωδικοποίησης πηγαίνει τη Θεωρία Πληροφορίας ένα βήμα πιο πέρα, δίνοντας τη δυνατότητα για μελέτη μεθόδων που αφορούν την αποτελεσματική και σωστή μεταφορά της πληροφορίας από την πηγή στον προορισμό. Η ανάπτυξη της θεωρίας οφείλεται στις σχετικές απαιτήσεις εφαρμογών, όπως της μεταφοράς οικονομικών πληροφοριών μέσω τηλεφωνικών γραμμών, της μεταφοράς δεδομένων από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή σε άλλο ή από τη μνήμη στην κεντρική μονάδα επεξεργασίας και της μεταφοράς δεδομένων από δορυφόρους στη Γη. Το φυσικό μέσο με το οποίο μεταδίδεται η πληροφορία ονομάζεται κανάλι επικοινωνίας και παραδείγματα καναλιών είναι οι τηλεφωνικές γραμμές και η ατμόσφαιρα.

Δυστυχώς, στα κανάλια επικοινωνίας επενεργεί θόρυβος, ο οποίος προκαλεί αλλοίωση της μεταδιδόμενης πληροφορίας.

Η κωδικοποίηση πηγής, στην οποία αναφερθήκαμε στο Κεφάλαιο 3, επιδιώκει την απομάκρυνση του πλεονασμού από την έξοδο της πηγής, δηλαδή την όσο το δυνατόν πιο συμπυκνωμένη αναπαράσταση των μηνυμάτων. Αντίθετα, κατά την κωδικοποίηση καναλιού, που αναλύουμε στο κεφάλαιο αυτό, προστίθεται όσος πλεονασμός είναι απαραίτητος, ώστε να μειωθεί η ολική πιθανότητα σφάλματος μετάδοσης στην επιθυμητή τιμή. Με άλλα λόγια, η κωδικοποίηση καναλιού είναι μια καλά υπολογισμένη χρήση πλεονασμού με επιδίωξη την ανίχνευση και τη διόρθωση σφαλμάτων που προκαλούνται από το θόρυβο κατά τη μετάδοση της πληροφορίας στο κανάλι επικοινωνίας.

10.1 Γιατί είναι αναγκαία η κωδικοποίηση καναλιού;

Η κωδικοποίηση καναλιού αναφέρεται σε μια διαδικασία κατά την οποία το αρχικό σήμα πληροφορίας μετασχηματίζεται σε κωδικοποιημένο σήμα, με στόχο να αντιμετωπιστούν καλύτερα οι διάφορες επιβαρύνσεις που εισάγει ο τηλεπικοινωνιακός δίαυλος, όπως θόρυβος, παρεμβολές και διαλείψεις. Η διαδικασία αυτή λαμβάνει χώρα στον πομπό του τηλεπικοινωνιακού συστήματος και ακολουθείται από την αντίστοιχη διαδικασία αποκωδικοποίησης, που λαμβάνει χώρα στο δέκτη.

Η κωδικοποίηση καναλιού απαντάται μόνο σε ψηφιακά επικοινωνιακά συστήματα και είναι ένας από τους λόγους υπεροχής των ψηφιακών έναντι των αναλογικών συστημάτων. Ο πιο απλός τρόπος για να παρουσιάσει κανείς δυαδική πληροφορία είναι να χρησιμοποιήσει μία συγκεκριμένη τάση σε Volts για να απεικονίσει το 1 και τη μηδενική τάση για να απεικονίσει το 0. Η μορφή αυτή ονομάζεται απλή δυαδική (pure binary) κωδικοποίηση και είναι απόλυτα ικανοποιητική, όταν χρησιμοποιείται σε τερματικές συσκευές ή άλλα συστήματα. Παρουσιάζει προβλήματα όμως, όταν χρησιμοποιείται για τη μετάδοση της πληροφορίας σε απόσταση που ξεπερνά τις μερικές δεκάδες μέτρα. Το κενό αυτό καλύπτεται από ένα μεγάλο αριθμό κωδικών καναλιού.

Οι δύο βασικοί λόγοι που χρησιμοποιούμε κώδικες καναλιού είναι η ανίχνευση σφαλμάτων και η διόρθωση σφαλμάτων. Η ανίχνευση σφάλματος σημαίνει ότι ο δέκτης έχει τη δυνατότητα να «καταλαβαίνει» αν η ληφθείσα κωδική λέξη έχει σφάλμα, αν δηλαδή διαφέρει από τη κωδική λέξη που μεταδώσαμε. Στην περίπτωση που ο δέκτης ανιχνεύει σφάλμα, ζητάει από τον πομπό την επανάληψη της μετάδοσης της κωδικής λέξης, μέχρι αυτή να φτάσει στο δέκτη χωρίς σφάλματα. Η διόρθωση σφάλματος, από την άλλη πλευρά, αποσκοπεί στην ελάττωση των σφαλμάτων χωρίς να χρειάζεται επαναμετάδοση της κωδικής λέξης.

Σχετικά με το κανάλι είναι απαραίτητες δύο παραδοχές, που είναι καθοριστικές για την ανάπτυξη της θεωρίας κωδικοποίησης. Σύμφωνα με την πρώτη παραδοχή, μια κωδική λέξη μήκους n δυαδικών ψηφίων, που εισέρχεται στο κανάλι, λαμβάνεται στην έξοδο του ως λέξη μήκους n δυαδικών ψηφίων, αν και η ακολουθία εισόδου του καναλιού μπορεί να διαφέρει από αυτή της εξόδου του καναλιού. Επίσης, διαπιστώνεται από το δέκτη η αρχή της πρώτης λέξης μιας ακολουθίας κωδικών λέξεων που μεταδίδεται μέσω του καναλιού. Για παράδειγμα, αν στο κανάλι μεταδίδεται η δυαδική ακολουθία 010011, τότε στην έξοδο του λαμβάνεται η ακολουθία 010011 ή κάποια άλλη του ίδιου μήκους, όχι όμως η ακολουθία 10011 ή κάποια άλλη μικρότερου μήκους, επειδή χάθηκε το 1ο ψηφίο (το «0») της πρώτης λέξης της ακολουθίας. Άρα, η πρώτη παραδοχή αναφέρεται στη δυνατότητα του δέκτη να λάβει όλες τις λέξεις που μεταδόθηκαν, με ή χωρίς σφάλματα.

Η δεύτερη παραδοχή αναφέρεται στο ότι τα σφάλματα, δηλαδή ο θόρυβος, εμφανίζονται διασκορπισμένα κατά τυχαίο τρόπο και όχι σε συστάδες (ή καταιγισμούς, bursts). Με άλλα λόγια, η πιθανότητα να αλλοιωθεί ένα bit κατά τη μετάδοση εξαιτίας του θορύβου είναι η ίδια με αυτή οποιουδήποτε άλλου bit και δεν επηρεάζεται από σφάλματα σε γειτονικά δυαδικά ψηφία. Αυτή η παραδοχή δεν είναι ιδιαίτερα ρεαλιστική, αν λάβουμε υπόψη φυσικά φαινόμενα, όπως αστραπές ή ακόμα και «γρατζουνιές» στα CD, που οδηγούν σε καταιγισμούς σφαλμάτων.

Κώδικας καναλιού είναι κάθε μέθοδος κωδικοποίησης ψηφιακής πληροφορίας, που διευκολύνει τη μετάδοσή της μέσα από αναλογικά και ψηφιακά μέσα μετάδοσης. Περαιτέρω λόγοι που κάνουν απαραίτητη την ύπαρξη των κωδίκων καναλιού είναι οι παρακάτω:

- Είναι απαραίτητο να αφαιρείται από το αποστελλόμενο σήμα η συνεχής συνιστώσα τάσης που μπορεί αυτό να έχει, λόγω του ότι το μέσο μετάδοσης δεν μπορεί να τη μεταδώσει.
- Η ανάγκη να είναι ενήμερος ο δέκτης για τη χρονική στιγμή που ξεκινάει η μετάδοση και τη διάρκειά της.
- Η ανάγκη βέλτιστης χρήσης του εύρους ζώνης του συγκεκριμένου καναλιού επικοινωνίας.
- Η ανάγκη ύπαρξης τρόπου εντοπισμού και διόρθωσης λαθών (error detection and error correction), που παρουσιάζονται κατά τη μετάδοση της πληροφορίας.
- Η ανάγκη μείωσης της παραμόρφωσης.
- Η μείωση της πιθανότητας παρουσίασης διαφωνίας (crosstalk).

10.2 Βασικές έννοιες

Στο δυαδικό συμμετρικό κανάλι (Binary Symmetric Channel, BSC) η πιθανότητα το «0» να μεταφέρεται από το κανάλι ως «0» είναι ίση με την πιθανότητα το «1» να μεταφέρεται ως «1».

Η **αξιοπιστία** του καναλιού είναι ο πραγματικός αριθμός p με $0 \leq p \leq 1$, όπου p είναι η πιθανότητα της ορθής μεταφοράς ενός δυαδικού ψηφίου μέσω του καναλιού. Ένα κανάλι χαρακτηρίζεται πιο αξιόπιστο από ένα άλλο αν η πιθανότητα p , δηλαδή η αξιοπιστία του, είναι πιο υψηλή. Ωστόσο, αν $p=1$ ή $p=0$, τότε δεν υπάρχει περίπτωση σφάλματος ή υπάρχει πάντα σφάλμα κι επομένως δε θα ασχοληθούμε με αυτό το κανάλι.

Επειδή κάθε κανάλι αξιοπιστίας p με $0 < p \leq \frac{1}{2}$ μπορεί να

μετατραπεί σε ένα κανάλι με $\frac{1}{2} \leq p < 1$, θα ασχοληθούμε με δυαδικά

συμμετρικά κανάλια με $\frac{1}{2} < p < 1$, διότι η περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ δεν επιτρέπει

την εξαγωγή οποιουδήποτε αξιοποιήσιμου αποτελέσματος.

Ο **ρυθμός πληροφορίας** ενός κώδικα είναι το ποσοστό της κωδικής λέξης που μεταφέρει το μήνυμα.

Ο ρυθμός πληροφορίας ενός δυαδικού κώδικα C μήκους n είναι :

$$R = \frac{\log_2 |C|}{n} \quad (10.1)$$

Αφού $1 \leq |C| \leq 2^n$, ο ρυθμός πληροφορίας παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1, την τιμή 1 αν $|C| = 2^n$ δηλαδή κάθε λέξη n δυαδικών ψηφίων είναι κωδική λέξη και την τιμή 0 αν $|C| = 1$.

Το **βάρος Hamming** ή **βάρος** $wt(x)$ μιας λέξης x μήκους n ψηφίων είναι το πλήθος των ψηφίων της λέξης που είναι ίσα με «1». Το βάρος παίρνει τιμές από 0 έως n .

Η απόσταση Hamming ή απόσταση $d(x, y)$ μεταξύ δύο λέξεων x και y του ίδιου μήκους n είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες οι δύο λέξεις εμφανίζουν ασυμφωνία του δυαδικού ψηφίου. Η απόσταση παίρνει τιμές από 0 έως n . Για παράδειγμα, οι κωδικές λέξεις 11000010 και 10010010 έχουν απόσταση Hamming 2, αφού διαφέρουν στο δεύτερο και στο τέταρτο δυαδικό ψηφίο. Δύο κωδικές λέξεις είναι ίδιες αν και μόνο αν η απόσταση Hamming μεταξύ τους είναι μηδέν.

Το βάρος και η απόσταση Hamming αναλύονται περισσότερο σε επόμενη παράγραφο.

Κωδικές λέξεις από διαφορετικά σύμβολα πηγής πρέπει να «απέχουν» με απόσταση τουλάχιστον 1, αλλιώς ο κώδικας θα είναι ίδιος. Οι κώδικες που θεωρούνται ανθεκτικοί στα λάθη αποτελούνται από λέξεις που «απέχουν» μεγαλύτερες αποστάσεις. Οι περισσότερες διαδικασίες αποκωδικοποίησης χρησιμοποιούν το κριτήριο της απόστασης, ώστε να επιλέξουν την πιθανότερα αναμενόμενη κωδική λέξη. Συγκεκριμένα, όταν λαμβάνεται μια λέξη, ο αποκωδικοποιητής ψάχνει για την έγκυρη κωδική λέξη που είναι πιο κοντά σε αυτήν, δηλαδή αυτή με τη μικρότερη απόσταση Hamming. Αν

υπάρχει μία μόνο κοντινή λέξη, υποθέτει ότι είναι η αναμενόμενη κωδική λέξη. Αν υπάρχουν περισσότερες λέξεις με τη μικρότερη απόσταση, το λάθος απλά ανιχνεύεται, αλλά δε διορθώνεται.

Παράδειγμα 10.1

Δίνονται οι κωδικές λέξεις μιας πηγής 4 συμβόλων $x_1 = 0000$, $x_2 = 1101$, $x_3 = 0110$ και $x_4 = 1011$.

Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνεται η ακολουθία 0001. Για να την αποκωδικοποιήσουμε, ψάχνουμε την κωδική λέξη που είναι πλησιέστερη σε αυτή. Η πλησιέστερη κωδική λέξη είναι η $x_1 = 0000$, που έχει απόσταση 1 από τη λαμβανόμενη ακολουθία. Όλες οι υπόλοιπες κωδικές λέξεις έχουν απόσταση μεγαλύτερη από 1 από τη λαμβανόμενη ακολουθία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι λαμβάνεται η ακολουθία 0100. Υπάρχουν 2 κοντινές λέξεις, η $x_1 = 0000$ και η $x_3 = 0110$, που έχουν απόσταση 1. Για το λόγο αυτό, αν και ένα λάθος μπορεί να ανιχνευτεί, δεν μπορεί να διορθωθεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ελάχιστης απόστασης. Γενικά, η ελάχιστη απόσταση καθορίζει το βαθμό στον οποίο ένας κώδικας είναι αδιάβλητος από λάθη. ●

Για να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ της ελάχιστης απόστασης ενός κώδικα και της ανθεκτικότητάς του σε λάθη ξεχωρίζουμε την ανίχνευση πολλαπλών λαθών και τη διόρθωση πολλαπλών λαθών. Για έναν ακέραιο e , ο όρος *e-error detection* σημαίνει ότι αν υπάρχουν το πολύ e λάθη στη λαμβανόμενη λέξη, ο παραλήπτης μπορεί να ανιχνεύσει ότι η λέξη έχει λάθη, αλλά δεν μπορεί απαραίτητα να διορθώσει αυτά τα λάθη. Για έναν ακέραιο f , ο όρος *f-error correction* σημαίνει ότι αν υπάρχουν το πολύ f λάθη στη λαμβανόμενη λέξη, ο παραλήπτης μπορεί και ανιχνεύσει και να διορθώσει αυτά τα λάθη χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ελάχιστης απόστασης.

Είναι εύκολο να καταλάβουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών στην περίπτωση ενός λάθους. Όταν υπάρχει μόνο ένα λάθος, μπορεί να ανιχνευθεί αν η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κωδικών λέξεων είναι

$d = 2$. Αυτό γίνεται, γιατί, όταν το λάθος είναι ένα, η λαμβανόμενη λέξη έχει απόσταση 1 από την αναμενόμενη λέξη, αλλά δεν υπάρχει κωδική λέξη τόσο κοντά, οπότε το λάθος ανιχνεύεται. Παρ' όλα αυτά, αυτό το λάθος δεν μπορεί πάντα να διορθωθεί όταν $d = 2$, διότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια έγκυρες κωδικές λέξεις με απόσταση 1 από τη λαμβανόμενη λέξη. Η ελάχιστη απόσταση $d = 3$ εξασφαλίζει ότι ο παραλήπτης μπορεί να ανιχνεύσει και να διορθώσει ένα λάθος. Αν η λαμβανόμενη λέξη έχει απόσταση 1 από την αναμενόμενη λέξη (λόγω μόνο ενός λάθους), θα έχει απόσταση τουλάχιστον 2 από οποιαδήποτε άλλη κωδική λέξη. Ως εκ τούτου, υπάρχει μοναδική κωδική λέξη πλησιέστερη στη λαμβανόμενη λέξη και αυτή πρέπει να είναι η αναμενόμενη λέξη.

10.3 Απόσταση και Βάρος Hamming

Σε οποιαδήποτε κωδική λέξη ορίζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός, ο οποίος καλείται βάρος Hamming (Hamming weight). Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων της κωδικής λέξης. Ως απόσταση Hamming (Hamming distance) d , μεταξύ δύο κωδικών λέξεων ορίζεται ο αριθμός των θέσεων στις οποίες διαφέρουν οι δύο λέξεις.

Για παράδειγμα, έστω οι κωδικές λέξεις $v = 11010$ και $u = 10111$. Παρατηρούμε ότι οι λέξεις αυτές διαφέρουν στα δυαδικά ψηφία a_0 , a_2 και a_3 , όπου το bit a_0 αντιστοιχεί στο ελάχιστης σημασίας bit (Least Significant Bit, LSB), δηλαδή σε τρεις θέσεις, συνεπώς η απόσταση Hamming είναι $d = 3$.

Ως ελάχιστη απόσταση (minimum distance) d_{\min} , ενός κώδικα δομής ορίζεται η ελάχιστη απόσταση Hamming μεταξύ δύο ζευγών κωδικών λέξεων του κώδικα. Η ελάχιστη απόσταση αποτελεί σημαντική παράμετρο, καθώς καθορίζει την ικανότητα ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων του κώδικα. Συγκεκριμένα, σε ένα γραμμικό κώδικα δομής με ελάχιστη απόσταση d_{\min} αποδεικνύεται ότι σε κάθε κωδική λέξη υπάρχει η

δυνατότητα να ανιχνευθούν $s \leq (d_{\min} - 1)$ σφάλματα και να διορθωθούν αντίστοιχα.

Σημαντική είναι και η σχέση που υπάρχει μεταξύ του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας και της ελάχιστης απόστασης, η οποία μπορεί να οριστεί ως ο ελάχιστος αριθμός στηλών του πίνακα H που έχουν άθροισμα ίσο με το μηδέν.

Συγκεκριμένα, η σχέση που αναφέρεται προκύπτει από τα ακόλουθα:

Ένας γραμμικός κώδικας δομής ορίζεται από το σύνολο των κωδικών λέξεων που ικανοποιούν τη σχέση $v \cdot H^T = 0$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας την έκφραση $H = [h_0, h_1, \dots, h_i, \dots, h_{n-1}]$, όπου κάθε τιμή h_i αντιστοιχεί στην i -οστή στήλη του πίνακα. Έτσι λοιπόν ο κώδικας περιγράφεται από τη σχέση που ακολουθεί:

$$u_0 \cdot h_0 + u_1 \cdot h_1 + \dots + u_i \cdot h_i + \dots + u_{n-1} \cdot h_{n-1} = 0 \quad (10.2)$$

όπου η τιμή u_i αναπαριστά το i -οστό στοιχείο της κωδικής λέξης v .

Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι, για να ισχύει η προηγούμενη εξίσωση, θα πρέπει η κωδική λέξη v να έχει μη μηδενικά στοιχεία σε κατάλληλες θέσεις, τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες στήλες του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας να έχουν σαν άθροισμα το μηδενικό διάνυσμα. Από την άλλη πλευρά, η ελάχιστη απόσταση ενός κώδικα είναι ίση με τον ελάχιστο αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων μιας κωδικής λέξης. Για το λόγο αυτό λοιπόν, η ελάχιστη απόσταση ενός γραμμικού κώδικα δομής ισούται με τον ελάχιστο αριθμό στηλών του πίνακα H , των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με το μηδέν.

Παράδειγμα 10.2

Έστω ότι έχουμε τον εξής πίνακα ελέγχου ισοτιμίας:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι καμία στήλη δεν είναι μηδενική. Μπορούμε να διακρίνουμε επίσης ότι δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι στηλών των οποίων το άθροισμα να δίνει αποτέλεσμα ίσο με το μηδέν. Το ελάχιστο σύνολο στηλών, δηλαδή, που δίνει μηδενικό άθροισμα είναι τρεις. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις αυτές λοιπόν, αντιλαμβανόμαστε ότι η ελάχιστη απόσταση του κώδικα ισούται με 3.

10.4 Τεχνικές και κώδικες ανίχνευσης και διόρθωσης σφαλμάτων

Σύμφωνα με τον θεμελιωτή της «Σύγχρονης Θεωρίας Κωδίκων», Claude Shannon, κατά τη διάδοση μίας λέξης μέσω ενός δυαδικού Συμμετρικού Καναλιού (Binary Symmetric Channel, BSC) δεν χάνονται ούτε προστίθενται δυαδικά ψηφία. Έτσι λοιπόν μία κωδική λέξη, η οποία έχει μήκος n bits και η οποία μεταδίδεται διαμέσου ενός BSC, θα φτάσει στον προορισμό της με το ίδιο μήκος ψηφίων. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η λέξη που λαμβάνει ο δέκτης είναι και η επιθυμητή, διότι μπορεί να έχει υποστεί αλλοιώσεις λόγω θορύβου.

Για παράδειγμα, αν ο παραλήπτης δεχτεί την ψηφιοσειρά (bitstream) 001111101010 και ο κώδικας έχει μήκος 4 (δηλαδή κάθε κωδική λέξη αποτελείται από 4 ψηφία), τότε γνωρίζει ότι έλαβε τις εξής τρεις κωδικές λέξεις: 0011, 1110 και 1010. Όπως έχει αποδείξει ο Shannon, δεν είναι δυνατό να ληφθεί πληροφορία με μήκος διαφορετικό από κάποιο πολλαπλάσιο του 4. Αυτό θα σήμαινε ότι θα έχουν «χαθεί» ή «προστεθεί» ψηφία, γεγονός που δεν ευσταθεί.

Η λογική της κωδικοποίησης έγκειται στη σύγκριση της κάθε λέξης που λαμβάνει ο δέκτης με ένα γνωστό σύνολο κωδικών λέξεων. Προσπαθεί, δηλαδή, να αντιπαραβάλει τις λαμβανόμενες κωδικές λέξεις με αυτές κάποιου αλφαβήτου. Αν δεν κατορθώνει να βρει λέξη όμοια με αυτές που περιλαμβάνονται στο αλφάβητο, συμπεραίνουμε ότι έχουν υπεισέλθει σφάλματα. Σε αντίθετη περίπτωση, εξάγεται το συμπέρασμα ότι έχει γίνει ορθή λήψη της πληροφορίας.

Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε τον κώδικα $C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$. Όπως

φαίνεται, κάθε κωδική λέξη έχει μήκος 2 και ο κώδικας περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ψηφίων «0» και «1». Συνεπώς, κάθε λέξη των δύο ψηφίων που καταλήγει στον δέκτη αποτελεί κωδική λέξη και για το λόγο αυτό δεν υπάρχει η δυνατότητα ανίχνευσης κάποιου λάθους.

Στην περίπτωση, όμως, του κώδικα $C_2 = \{000000, 010101, 101010, 111111\}$, ο οποίος είναι επαναληπτικός, κάθε κωδική λέξη του C_1 επαναλαμβάνεται τρεις φορές. Η μέθοδος αυτή κωδικοποίησης, παρουσιάζει το πλεονέκτημα της ευκολότερης ανίχνευσης πιθανών λαθών. Αν ληφθεί για παράδειγμα η λέξη «011101», με απλή αντιπαραβολή της με το σύνολο των γνωστών λέξεων του κώδικα, παρατηρείται ότι δεν ανήκει στο συγκεκριμένο λεξικό, δεν αποτελεί δηλαδή κωδική λέξη, άρα περιέχει ένα τουλάχιστον σφάλμα.

Υποθέτοντας ότι σε κάθε κωδική λέξη είναι δυνατό να υπάρξει το πολύ ένα λάθος, συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον δύο από τις τρεις επαναλήψεις των λέξεων που ελήφθησαν είναι σωστές. Η διαδικασία της επανάληψης, όμως, έχει και το μειονέκτημα ότι ο βαθμός πληροφορίας του κώδικα μειώθηκε στο $1/3$, από 1 που ήταν στην πρώτη περίπτωση. Για να αποφευχθεί η ατέλεια αυτή, εισάγεται στον αρχικό κώδικα C_1 ένα επιπλέον ψηφίο. Συγκεκριμένα, στο τέλος κάθε κωδικής λέξης προστίθεται ένα «1» ή ένα «0», έτσι ώστε κάθε κωδική λέξη να περιλαμβάνει άρτιο αριθμό «1». Κατά συνέπεια προκύπτει ένας νέος, πιο αποτελεσματικός κώδικας $C_3 = \{000, 011, 101, 110\}$. Το επιπλέον δυαδικό ψηφίο που προστέθηκε στο τέλος της κωδικής λέξης ονομάζεται ψηφίο ελέγχου ισοτιμίας (parity bit). Έτσι, αν ληφθούν τα στοιχεία «010», τα οποία δεν αποτελούν κωδική λέξη, γίνεται αντιληπτό ότι έχει προκύψει κάποιο σφάλμα κατά τη μετάδοση. Η προσπάθεια διόρθωσης έγκειται στην αλλαγή των λιγότερων κατά το δυνατό δυαδικών ψηφίων, ώστε να προκύψει κωδική λέξη. Γενικά, οι κώδικες πρέπει να σχεδιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε το κόστος κωδικοποίησης να είναι σχετικά χαμηλό. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει κάποιες τεχνικές ανίχνευσης, αλλά και διόρθωσης σφαλμάτων, προκειμένου να μην απαιτείται επανάληψη της μετάδοσης της πληροφορίας και συνεπώς ύπαρξη διαύλου ανάδρασης.

10.4.1 Automatic Repeat Request (ARQ) και Forward Error Correction (FEC)

Σε περίπτωση εμφάνισης σφάλματος στο δέκτη μπορεί να εφαρμοστεί για την αντιμετώπισή του η Αυτόματη Αίτηση Επανεκπομπής (Automatic Repeat Request, ARQ). Σε ένα τέτοιο σύστημα ο δέκτης εκτελεί ανίχνευση των σφαλμάτων και απλά ζητά από τον πομπό επανεκπομπή των δεδομένων. Η συγκεκριμένη τεχνική συμβάλλει στην αξιοπιστία της λαμβανόμενης πληροφορίας, αν και έχει αυξημένη πολυπλοκότητα, αφού απαιτεί την ύπαρξη ενός καναλιού ανάδρασης, το οποίο όμως δεν είναι πάντα διαθέσιμο, καθιστώντας την έτσι μη πρακτική για αρκετές εφαρμογές.

Μία δεύτερη τεχνική, που μπορεί να εφαρμοστεί, είναι η Forward Error Correction (FEC), σύμφωνα με την οποία ο δέκτης σε περίπτωση ανίχνευσης σφάλματος προβαίνει και στη διόρθωσή του ακολουθώντας τους κανόνες κωδικοποίησης. Η τεχνική αυτή, αν και δυσκολότερη στην εφαρμογή από την ARQ, δεν απαιτεί δίαυλο ανάδρασης.

Βασική διαφορά των δύο τεχνικών αποτελεί η διόρθωση σφαλμάτων, διαδικασία που συμβαίνει μόνο στη FEC. Η τεχνική FEC περιλαμβάνει δύο μεγάλες κατηγορίες κωδίκων, τους κώδικες δομής (block codes) και τους συνελκτικούς κώδικες (convolutional codes), οι οποίοι αναλύονται σε επόμενες παραγράφους.

10.4.2 Κώδικας ελέγχου απλής ισοτιμίας, κώδικας απλής επανάληψης και δισδιάστατος κώδικας ελέγχου ισοτιμίας

Ο απλούστερος κώδικας ανίχνευσης σφάλματος είναι ο κώδικας ελέγχου απλής ισοτιμίας (simple parity check code), $C(n, n-1, 2)$, $q=2$. Ένα bit ισοτιμίας προστίθεται στο μήνυμα. Αυτός ο κώδικας είναι ικανός να ανιχνεύει ένα μοναδικό σφάλμα. Για παράδειγμα ο κώδικας :

$$C = \{0000, 0011, 0101, 0111, 1001, 1010, 1100, 1110\}$$

έχει παραμέτρους $C(4,3,2)$.

Ο απλούστερος κώδικας διόρθωσης σφάλματος είναι ο κώδικας απλής επανάληψης (simple repetition code), $C(n,1,n)$, $q=2$. Αυτός ο κώδικας

αποτελείται από δύο μόνο κωδικές λέξεις, η μια με όλα τα ψηφία της 0 και η άλλη με όλα 1. Το μήνυμα είναι ίσο με ένα bit, αν είναι 0 τότε μεταδίδεται η κωδική λέξη που αποτελείται μόνο από μηδενικά. Για παράδειγμα ο κώδικας: $C = \{00000, 11111\}$ έχει παραμέτρους $C(5,1,5)$ και μπορεί να διορθώσει 2 σφάλματα ή να ανιχνεύσει 4. Ο ρυθμός του είναι χαμηλός:

$$R = \frac{1}{5}.$$

Ο δισδιάστατος κώδικας ελέγχου ισοτιμίας (2-dimensional parity check code) είναι εξίσου απλός, αλλά εμφανίζει βελτιωμένη αποδοτικότητα. Το μήνυμα τοποθετείται μέσα σε έναν πίνακα. Οι στήλες και οι γραμμές του πίνακα επιμηκύνονται κατά το αντίστοιχο bit ισοτιμίας. Θεωρήστε, για παράδειγμα, έναν μεγέθους 3×3 πίνακα μηνύματος και προσθέστε μια 4η γραμμή και μια 4η στήλη από bits ισοτιμίας, όπως φαίνεται στην Εικόνα 60.

1	1	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1
0	1	0	1

Εικόνα 64. Δισδιάστατος κώδικας ελέγχου ισοτιμίας

Το bit στη κάτω δεξιά γωνία καλείται ισοτιμία των ισοτιμιών (parity of parities), το οποίο μπορεί ισοδύναμα να υπολογιστεί ως την ισοτιμία της γραμμής με bits ισοτιμίας με την ισοτιμία της στήλης με bits ισοτιμίας. Αυτός ο κώδικας έχει απόσταση 4, κατά συνέπεια είναι ικανός να διορθώσει ένα σφάλμα. Ο αλγόριθμος διόρθωσης είναι επίσης πολύ απλός: οι ενδείξεις (indices) της γραμμής με τις αντίστοιχες της στήλης με σφάλμα ισοτιμίας σηματοδοτούν την είσοδο με σφάλμα.

10.4.3 Επαναληπτικοί κώδικες

Αν υπάρχουν δύο σύμβολα A και B σε μια πηγή αλφαβήτου, όπου χρησιμοποιείται δυαδική κωδικοποίηση, ο πιο άμεσος τρόπος να τα στείλουμε είναι να αντιστοιχίσουμε για παράδειγμα το 0 στο A και το 1 στο B. Αυτός ο τρόπος βέβαια είναι άμεσος, αλλά δεν προστατεύει από λάθη.

Η προστασία από λάθη μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με κάποιον επαναληπτικό κώδικα. Στην πιο απλή του μορφή κάθε χαρακτήρας του κώδικα επαναλαμβάνεται, ώστε το 0 να αντικατασταθεί από το 00 και το 1 από το 11. Αν συμβεί κάποιο λάθος, ο παραλήπτης μπορεί για παράδειγμα να λάβει 01 κι έτσι μπορεί να εντοπίσει την ύπαρξη λάθους. Παρόλα αυτά, ο παραλήπτης δε θα μπορέσει να διορθώσει το λάθος, αφού το 01 θα έπρεπε να είναι 00 ή 11. Μεγαλύτερη επανάληψη εγγυάται μεγαλύτερη αξιοπιστία.

10.4.4 Αθροίσματα ελέγχου (check sums)

Ένας πιο αποτελεσματικός τρόπος για ανίχνευση και διόρθωση λαθών είναι η χρήση αθροισμάτων ελέγχου.

Ένα bit ελέγχου ισοτιμίας (parity check bit) είναι ένα bit που «προσκολλάται» στη δυαδική κωδική λέξη κι εξασφαλίζει ότι το άθροισμα των bits θα είναι μια καθορισμένη τιμή. Για παράδειγμα, ένα bit μπορεί να προστεθεί στο τέλος της κωδικής λέξης 0110, ώστε να κάνει άθροισμα 0. Η νέα λέξη θα είναι 01100 όπου το υπογραμμισμένο bit είναι το bit ισοτιμίας. Το άθροισμα των ανεξάρτητων bits θα είναι μηδέν (αριθμητικά το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 2) ή ισοδύναμα υπάρχει ζυγός αριθμός άσων. Αν η κωδική λέξη ήταν 1110, με την ίδια διαδικασία θα παραγόταν η νέα λέξη 11101 για να κρατήσει ζυγό τον αριθμό των άσων. Αυτό ονομάζεται άρτια ισοτιμία (even parity), ενώ υπάρχει και η σπανιότερα χρησιμοποιούμενη περιττή ισοτιμία (odd parity), που κρατά το άθροισμα των άσων μονό αριθμό.

Παράδειγμα 10.2

Στα περισσότερα βιβλία είναι τυπωμένος ο αριθμός ISBN (International Standard Book Number). Συνήθως, είναι ένας 10-ψήφιος αριθμός που ορίζεται από τον εκδότη. Για παράδειγμα, ένας αριθμός ISBN μπορεί να είναι ο **0-691-12418-3**, αν και οι παύλες μπορεί να διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο. Το πρώτο ψηφίο υποδεικνύει τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο το βιβλίο (το 0 αντιστοιχεί στα Αγγλικά). Τα επόμενα 2 ή 3 ψηφία υποδεικνύουν τον εκδότη (το 691 αντιστοιχεί στο Princeton University

Press). Τα επόμενα 5 ή 6 ψηφία υποδεικνύουν τον αριθμό του βιβλίου που έχει οριστεί από τον εκδότη. Το τελευταίο ψηφίο είναι ένα ψηφίο ελέγχου που μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X με το X να αντιστοιχεί στο 10. Το ψηφίο ελέγχου έχει σχεδιαστεί ώστε το 0 modulo 11 να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των ψηφίων, δηλαδή ο συνδυασμός να είναι πολλαπλάσιο του 11. Πιο συγκεκριμένα:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} = 0 \pmod{11}$$

Το άθροισμα στο αριστερό μέρος της ισότητας είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 11. Για τον αριθμό ISBN που δίνεται παραπάνω έχουμε:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 3 = 198 = 11 \cdot 18 = 0 \pmod{11}$$

Να σημειωθεί εδώ ότι το -10 είναι αριθμητικά το ίδιο με το 1 mod 11, αφού $-10 = -1 \cdot 11 + 1$ και $1 = 0 \cdot 11 + 1$

Άρα, μπορούμε να λύσουμε ως προς x_{10}

$$x_{10} = -10x_{10} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 \pmod{11}$$

Ως εκ τούτου για το συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$x_{10} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 8 = 168 = 11 \cdot 15 + 3 = 3 \pmod{11}$$

Η ιδιότητα του ISBN κώδικα είναι ότι μπορεί να ανιχνεύσει ένα λάθος σε οποιοδήποτε ψηφίο ή μια ανταλλαγή δύο ψηφίων. Στο άθροισμα ελέγχου οι συντελεστές είναι αυτοί που επιτρέπουν την ανίχνευση μιας ανταλλαγής. Αυτός είναι πρακτικός κώδικας, που προέκυψε από την εμπειρική παρατήρηση ότι τα πιο κοινά λάθη που γίνονται στους αριθμούς ISBN είναι τα λάθη ενός ψηφίου και οι μεταθέσεις. •

10.4.5 Ορθογώνιοι και τριγωνικοί κώδικες

Πάνω από ένα αθροίσματα ελέγχου μπορούν να ενσωματωθούν σε έναν κώδικα με το κάθε άθροισμα να ελέγχει διαφορετικό συνδυασμό συμβόλων κωδίκων ή να προσδίδει διαφορετικά βάρη στα σύμβολα. Γενικά, κάθε άθροισμα παρέχει επιπρόσθετη διόρθωση λαθών και ικανότητα διόρθωσης.

1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1

Εικόνα 65. Παράδειγμα ορθογώνιου κώδικα

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία αποτελείται από τους ορθογώνιους κώδικες, ένα παράδειγμα των οποίων φαίνεται στην Εικόνα 61. Τα σύμβολα του μηνύματος είναι τα μη χρωματισμένα και σχηματίζουν ορθογώνιο. Τα χρωματισμένα με γκρι bits στην αριστερή στήλη είναι bits ισοτιμίας ορισμένα με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα της αντίστοιχης γραμμής να έχει άρτια ισοτιμία. Ομοίως, τα χρωματισμένα με γκρι bits στην τελευταία γραμμή είναι ορισμένα με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα κάθε στήλης να έχει άρτια ισοτιμία. Ο ορθογώνιος κώδικας μπορεί να διορθώσει ένα λάθος οπουδήποτε κι αν εμφανιστεί στον πίνακα. Για παράδειγμα, αν το λάθος είναι στην τρίτη γραμμή και τέταρτη στήλη, ο έλεγχος ισοτιμίας της τρίτης γραμμής και της τέταρτης στήλης δε θα είναι άρτιος και ως εκ τούτου αυτοί οι έλεγχοι θα δείξουν τη θέση του λάθους. Επίσης, μπορεί να διορθωθεί κι ένα λάθος σε κάποιο από τα bits ισοτιμίας. Πάνω στην ίδια ιδέα βασίζεται και ο τριγωνικός πίνακας που φαίνεται στην Εικόνα 61.

1	0	1	1	1
1	1	0	1	
1	0	0		
0	1			
1				

Εικόνα 66. Παράδειγμα τριγωνικού κώδικα

Εδώ τα bits ισοτιμίας ορίζονται έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων σε γραμμή και στήλη του bit να έχει άρτια ισοτιμία. Για παράδειγμα, το bit στο τέλος της δεύτερης γραμμής είναι 1, ώστε το άθροισμα της δεύτερης

γραμμής και το τέταρτο στοιχείο της πρώτης γραμμής να είναι άρτιο.

10.5 Κατηγορίες κωδίκων καναλιού

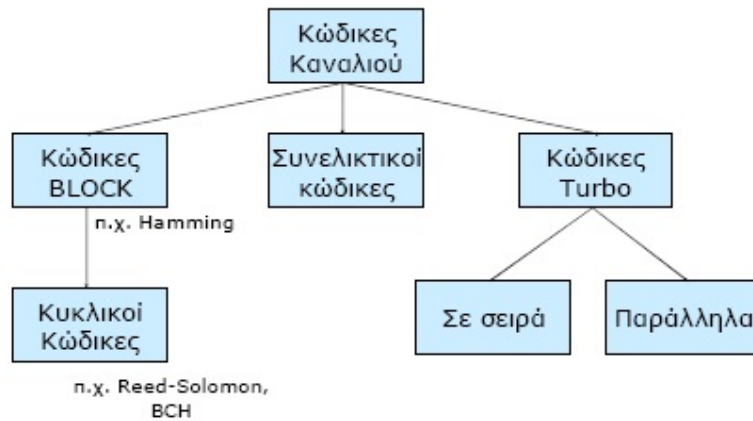
Οι κώδικες καναλιού χωρίζονται σε γραμμικούς και μη γραμμικούς. Η δυσκολία όμως στην εξέταση και ανάλυση των μη γραμμικών κωδίκων, καθώς και η διεξαγωγή μη ασφαλών συμπερασμάτων οδήγησε στο να δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στους γραμμικούς κώδικες. Οι γραμμικοί κώδικες χωρίζονται σε block κώδικες, συνελκτικούς και turbo.

Σε έναν κώδικα block η ακολουθία των bits πληροφορίας έχει καταταμηθεί σε διαδοχικά block μήκους k και κάθε block έχει απεικονιστεί στην είσοδο του καναλιού με ένα block μήκους n κωδικών ψηφίων. Η απεικόνιση αυτή είναι ανεξάρτητη από τα προηγούμενα block, δηλαδή δεν υπάρχει μνήμη από ένα block προς ένα άλλο επόμενο. Ένα παράδειγμα των block κωδίκων είναι οι κώδικες Hamming και μια βασική υποκατηγορία τους είναι οι κυκλικοί κώδικες. Ένας κυκλικός κώδικας είναι ένας γραμμικός κώδικας block με την πρόσθετη ιδιότητα ότι αν c είναι μια κωδική λέξη, τότε μια κυκλική ολίσθηση των ψηφίων της είναι επίσης κωδική λέξη. Η δομή των κυκλικών κωδίκων βασίζεται στην αναπαράσταση της κωδικής λέξης, αλλά και του γεννήτορα πίνακα με πολυώνυμα. Οι κυκλικοί κώδικες μπορούν να κατασκευαστούν με ολισθητές καταχωρητές. Ένας εύκολα πραγματοποιήσιμος κυκλικός κώδικας βασίζεται στην παρατήρηση ότι το πολυώνυμο οποιασδήποτε κωδικής λέξης επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό του πολυωνύμου γεννήτριας $g(p)$ επί το πολυώνυμο $X(p)$ που αντιστοιχεί στην ακολουθία της πληροφορίας εισόδου. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι κώδικες Reed-Solomon. Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι κωδικοποιητές και οι αποκωδικοποιητές των κυκλικών κωδίκων υλοποιούνται εύκολα.

Στους συνελκτικούς κώδικες υπάρχει ένας ολισθητής καταχωρητής μήκους k_0L . Τα bits πληροφορίας μπαίνουν στον ολισθητή καταχωρητή k_0 bits κάθε φορά και στην έξοδο του κωδικοποιητή βγαίνουν n_0 bits, τα

οποία είναι ένας γραμμικός συνδυασμός διάφορων bits του ολισθητή και στη συνέχεια μεταδίδονται μέσω του καναλιού. Τα n_0 bits της εξόδου δεν εξαρτώνται μόνο από τα περισσότερα k_0 bits που μπήκαν στον ολισθητή, αλλά επίσης και από τα $(L-1)k_0$ προηγούμενά του που περιέχονται στον ολισθητή και αποτελούν την κατάσταση του. Η ποσότητα L καλείται μήκος περιορισμού (constraint length) του συνελικτικού κώδικα και ο αριθμός δυνατών καταστάσεων του είναι $2^{(L-1)k_0}$. Ο κωδικός ρυθμός του συνελικτικού κώδικα ορίζεται ως $R_c = \frac{k_0}{n_0}$. Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι η κύρια διαφορά μεταξύ των κωδίκων block και των συνελικτικών κωδίκων είναι ότι οι δεύτεροι έχουν μνήμη.

Οι κώδικες turbo είναι ένας εξελιγμένος και σύγχρονος συνδυασμός με πολλές δυνατότητες των δύο προηγούμενων κατηγοριών. Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται η κατηγοριοποίηση των κωδίκων καναλιού.



Εικόνα 67. Κατηγορίες κωδίκων καναλιού

10.6 Γραμμικοί κώδικες (Linear codes)

Όλοι οι κώδικες στους οποίους αναφερόμαστε είναι δυαδικοί. Αυτό σημαίνει ότι έχουν στοιχεία από το πεδίο

$$F = GF(2) = \{0,1\} \quad (10.3)$$

Στο πεδίο αυτό ισχύει ότι $1+1=0$ και $+1=-1$.

Τα στοιχεία του F καλούνται bits. Το F^n δηλώνει το διάνυσμα των n -διαστάσεων που αποτελείται από όλα τα δυαδικά διανύσματα μήκους n . Οι κώδικες με κωδικές λέξεις m που έχουν το ίδιο μήκος κωδικής λέξης n λέγονται ομοιόμορφοι δυαδικοί κώδικες (uniform binary codes). Αυτοί είναι κατά κανόνα γραμμικοί κώδικες εκτός αν ορίζονται διαφορετικά.

Ένας γραμμικός κώδικας C είναι ένα γραμμικό υποσύνολο του F^n και έχει ίσα ψηφία ίσα με n . Ισοδύναμα, ένας (δυαδικός) κώδικας είναι γραμμικός αν το άθροισμα των οποιωνδήποτε κωδικών λέξεων είναι επίσης μια κωδική λέξη.

Ένας (n, M, d) κώδικας είναι μια ομάδα από M δυαδικά διανύσματα μήκους n , που τα καλούμε κωδικές λέξεις, έτσι που κάθε δύο κωδικές λέξεις διαφέρουν μεταξύ τους τουλάχιστον κατά d θέσεις. Το n καλείται μήκος block του κώδικα και το d είναι η ελάχιστη απόσταση του κώδικα. Αναλυτικότερα, στους κώδικες block ένα block από k bits πληροφορίας ακολουθείται από μια ομάδα από c bits ψηφία ισοτιμίας που προκύπτουν κάθε φορά από το block των ψηφίων πληροφορίας.

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα για το διαχωρισμό των κωδίκων.

Παράδειγμα 10.3

0 0 0 0 0

1 1 1 1 1

Ο παραπάνω είναι ένας $(5, 2, 5)$ γραμμικός κώδικας όπου

$n = 5$ μήκος λέξης

$M = 2$ αριθμός λέξεων στον κώδικα

$d = 5$ απόσταση

Επεξήγηση

$3 + 2 = 5$

$k + c = n = 5$ σύμβολα = 5 ψηφία

$k | c$ Block κώδικας (χωριστά τα k με τα c σύμβολα)

0 0 0 | 0 0 Διαφορές $5 = d$

1 1 1 | 1 1 Επαναλαμβάνονται τα 1 διαδοχικά 5 φορές

$M = 2$ λέξεις

$$\text{Απόδοση } R = \frac{\log_2}{n} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Παράδειγμα 10.4

0 0 0

0 1 1

1 0 1

1 1 0

Είναι ένας (3, 4, 2) γραμμικός κώδικας όπου

$n = 3$ μήκος λέξης

$M = 4$ αριθμός λέξεων στον κώδικα

$d = 2$ απόσταση

Παράδειγμα 10.5

0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 0 1 0 0

0 1 1 1 0 1 0

0 0 1 1 1 0 1

1 0 0 1 1 1 0

0 1 0 0 1 1 1

1 0 1 0 0 1 1

1 1 0 1 0 0 1

Είναι ένας (7, 8, 4) γραμμικός κώδικας (Κώδικας Hamming – Simplex)

Παράδειγμα 10.6

0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 0 1 0 0

0 1 1 1 0 1 0
 0 0 1 1 1 0 1
 1 0 0 1 1 1 0
 0 1 0 0 1 1 1
 1 0 1 0 0 1 1
 1 1 0 1 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1
 1 0 0 0 1 0 1
 1 1 0 0 0 1 0
 0 1 1 0 0 0 1
 1 0 1 1 0 0 0
 0 1 0 1 1 0 0
 0 0 1 0 1 1 0
 1 1 1 1 1 1 1

Είναι ένας (7, 16, 3) γραμμικός κώδικας Hamming

Παράδειγμα 10.7

0 0 0 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 0 0 0 0 0	0 0 1 1 1 1 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 1 1 1 1 1
1 0 0 1 0 0 0 0	0 1 1 0 1 1 1 1
1 0 0 0 1 0 0 0	0 1 1 1 0 1 1 1
1 0 0 0 0 1 0 0	0 1 1 1 1 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1 0	0 1 1 1 1 1 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1	0 1 1 1 1 1 1 0

Είναι ένας (8, 16, 2) όχι και τόσο καλός κώδικας (αν και αρκετά σπουδαίος). Ίδια n αλλά η μία λέξη προστιθέμενη στην άλλη δε δίνει μία τρίτη λέξη, δηλαδή δεν είναι κυκλικός κώδικας. Έτσι, αυτός ο κώδικας δεν είναι γραμμικός.

Αν πάρουμε ένα μέγιστο σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητες κωδικές

λέξεις από τον C , για παράδειγμα $x^{(1)} \dots x^{(k)}$, τότε ο C εμπεριέχει όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς:

$$a_1 X^{(1)} + a_k X^{(k)}, a_i \in F \quad (10.4)$$

Η $k \times n$ δυαδική μήτρα

$$G = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(k)} \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

καλείται γεννητριακή (generator) μήτρα του κώδικα. Ο κώδικας είναι ο γραμμικός χώρος του G .

10.7 Κώδικες δομής (Block Codes)

Σε ένα κώδικα δομής, ο κωδικοποιητής δέχεται στην είσοδό του μία σταθερού μήκους ακολουθία πληροφοριακών ψηφίων, το μήνυμα (message), που αποτελείται από k bits. Στη συνέχεια, μετατρέπει την πληροφορία αυτή σε μία ακολουθία n bits και σχηματίζει την κωδική λέξη (codeword). Το σημαντικό χαρακτηριστικό των κωδικοποιητών δομής είναι ότι αποτελούν διατάξεις χωρίς μνήμη, διότι δε χρησιμοποιούν ψηφία από προηγούμενα μπλοκ. Το block που παράγεται στην έξοδο εξαρτάται μόνο από το μπλοκ εισόδου.

Σε έναν (n, k) κώδικα δομής υπάρχουν 2^k ξεχωριστά μηνύματα. Αφού λοιπόν σε κάθε μήνυμα αντιστοιχεί μία και μόνο κωδική λέξη, θα υπάρχουν και 2^k ξεχωριστές κωδικές λέξεις, καθεμιά από τις οποίες έχει μήκος n . Ο ρυθμός R ενός κώδικα block ορίζεται ως εξής:

$$R = \frac{k}{n} \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (10.6)$$

Όσο υψηλότερος είναι ένας ρυθμός, τόσο λιγότερο πλεονασμό έχουμε. Άρα, ο ρυθμός του κώδικα καθορίζει και την ποσότητα του πλεονασμού.

Οι κώδικες δομής καθορίζονται από τρεις βασικές παραμέτρους : το μήκος της ομάδας n , το μήκος του μηνύματος k και την ελάχιστη απόσταση κώδικα d_{\min} . Ένας τέτοιος κώδικας συμβολίζεται ως $C(n, k, d_{\min})$. Όπως

έχει αναφερθεί σε προηγούμενη παράγραφο, η απόσταση Hamming $d(x, y)$ μεταξύ δύο κωδικών λέξεων είναι ο αριθμός των θέσεων στις οποίες διαφέρουν και η ελάχιστη απόσταση κώδικα ορίζεται ως η μικρότερη απόσταση Hamming ανάμεσα στα δυνατά ζευγάρια κωδικών λέξεων. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ότι ο κώδικας (11.6) έχει $d_{\min} = 3$.

$$C = \{00000, 10101, 01111, 11010\} \quad (10.7)$$

Ας υποθέσουμε ότι ο κώδικας έχει μεταδοθεί και ο δέκτης έχει λάβει τη λέξη r :

$$(r_0, r_1, \dots, r_{n-1}) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) + (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) \quad (10.8)$$

,όπου η διαφορά μεταξύ r και c ονομάζεται διάνυσμα σφάλματος (error vector). Για παράδειγμα, έστω ότι έχει μεταδοθεί η κωδική λέξη 01111 και ο δέκτης έχει λάβει τη λέξη 01011. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα σφάλμα στο τρίτο δυαδικό ψηφίο της κωδικής λέξης και το διάνυσμα σφάλματος είναι $e = (00100)$.

Ένας κώδικας δομής είναι γραμμικός (linear) αν το άθροισμα δύο κωδικών λέξεων αποτελεί μία άλλη κωδική λέξη και αν ο κώδικας περιέχει και τη μηδενική κωδική λέξη. Ένας κώδικας δομής παράγεται από ένα σύνολο k γραμμικώς ανεξάρτητων n -διάστατων διανυσμάτων g_0, g_1, \dots, g_{k-1} . Οι κωδικές λέξεις αποτελούν γραμμικό συνδυασμό αυτών των k n -διάστατων διανυσμάτων. Συνεπώς, η κωδική λέξη ενός μηνύματος $c = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή

$$v = c_0 \cdot g_0 + c_1 \cdot g_1 + \dots + c_{k-1} \cdot g_{k-1} \quad (10.9)$$

Τα k n -διάστατα διανύσματα που δημιουργούν τον κώδικα g_0, g_1, \dots, g_{k-1} μπορούν να αποτελέσουν τις γραμμές ενός πίνακα G διάστασης $k \times n$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0,k-1} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1,k-1} \\ g_{20} & g_{21} & \cdots & g_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας G λέγεται γεννήτορας πίνακας ή γεννητριακή μήτρα (generator matrix) του κώδικα. Έτσι λοιπόν, η κωδική λέξη v για το μήνυμα c γράφεται ως εξής:

$$v = c \cdot G = c_0 \cdot g_0 + c_1 \cdot g_1 + \dots + c_{k-1} \cdot g_{k-1} \quad (10.10)$$

Δεδομένου του γεννήτορα πίνακα δηλαδή, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε από την προηγούμενη σχέση τις διακριτές κωδικές λέξεις που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές ακολουθίες «0» και «1» ενός μπλοκ.

Για παράδειγμα, ένας (8,4) κώδικας δομής μπορεί να παραχθεί από τον γεννήτορα πίνακα:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε, το μήνυμα $c = (0 \ 1 \ 1 \ 0)$ κωδικοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} v &= c \cdot G = \\ &= 0 \cdot (01101010) + 1 \cdot (00011100) + 1 \cdot (10110011) + 0 \cdot (11000101) = \\ &= (00000000) + (00011100) + (10110011) + (00000000) = \\ &= (11001111) \end{aligned}$$

10.8 Κώδικες Hamming

Σύμφωνα με τη «Θεωρία της πληροφορίας» έχει αποδειχτεί ότι είναι εφικτή η αξιόπιστη μετάδοση πληροφορίας με τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό πλεοναζόντων δυαδικών ψηφίων (redundancy). Αρχικά, είχε γίνει αποδεκτό ότι για την έγκυρη μετάδοση της πληροφορίας, έπρεπε να ενσωματωθούν στο προς αποστολή μήνυμα τα ψηφία ισοτιμίας (parity bits) με καθορισμένο τρόπο, δηλαδή 1 ψηφίο ισοτιμίας για κάθε ψηφίο του μηνύματος. Στη συνέχεια όμως, παρατηρήθηκε ότι η συγκεκριμένη μέθοδος, η οποία είχε προταθεί από τους θεμελιωτές της Θεωρίας των κωδίκων, απλά ανίχνευε τα σφάλματα και δεν προέβαινε στη διόρθωση αυτών. Η μόνη οδός για σωστό ανασχηματισμό του μηνύματος σε αυτή την περίπτωση, ήταν η εκ νέου μετάδοση του τμήματος εκείνου της πληροφορίας που περιείχε σφάλματα, από την πηγή πληροφορίας. Η επανάληψη της αποστολής όμως κοστίζει τόσο σε χρόνο όσο και σε πόρους, καθώς απαιτείται διάυλος ανάδρασης, γεγονός που καθιστά τη συγκεκριμένη μέθοδο μη πρακτική.

Η έρευνα πέρασε στα χέρια του διακεκριμένου στη Θεωρία Κωδικοποίησης επιστήμονα της εποχής, Richard Hamming. Ο Hamming είναι πιο γνωστός από την εργασία του πάνω στους κώδικες Hamming για διόρθωση λαθών και για την έννοια της απόστασης Hamming, η οποία είναι κεντρική στη θεωρία κωδικοποίησης. Τα δεδομένα στα ψηφιακά συστήματα συνήθως αποθηκεύονται, εκπέμπονται και επεξεργάζονται σε δυαδική μορφή ως ομάδες από bits. Αν ένα εκ των bit είναι λάθος, το μήνυμα διαστρεβλώνεται ή ο υπολογισμός αποτυγχάνει. Σε μεγάλης κλίμακας υπολογιστές ή τηλεφωνικά συστήματα, είναι απαραίτητο ένα τεράστιο πλήθος υπολογισμών χωρίς ούτε ένα λάθος στο τελικό αποτέλεσμα. Ο Hamming ανέλαβε να κάνει τον ίδιο τον υπολογιστή να εντοπίζει και να διορθώνει τα μεμονωμένα λάθη, ώστε ο υπολογισμός να μπορεί να συνεχιστεί απρόσκοπτα με πιο αποδοτικό τρόπο από τον τότε ισχύοντα, ο οποίος ήταν να γίνεται το ίδιο πράγμα τρεις φορές και να επιλέγεται ένα προσεγγιστικό τελικό αποτέλεσμα.

Η προσέγγισή του εντασσόταν στη γενίκευση του ελέγχου ισοτιμίας (parity

checking). Επαναλαμβάνουμε εν συντομία πώς δουλεύει ένας έλεγχος ισοτιμίας. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο (block) από n bits και προσθέτουμε ένα επιπλέον bit, ώστε να γίνουν $n+1$ τα bits με σκοπό ολόκληρο το μήνυμα να έχει άρτιο πλήθος άσων μέσα του. Αυτό ονομάζεται έλεγχος άρτιας ισοτιμίας. Εξετάζοντας το μήνυμα ο αποδέκτης του, αν δεν υπάρχει άρτιο πλήθος άσων στο μήνυμα, βγάζει το συμπέρασμα ότι πρέπει να υπάρχει περιττό πλήθος λαθών στο μήνυμα. Αν τα λάθη στα bits συμβαίνουν ανεξάρτητα και αν το μήνυμα είναι μικρό και ο ρυθμός λαθών περιορισμένος, τότε πιθανότατα περιλαμβάνει μόνο ένα λάθος, αλλά δε γνωρίζουμε ποιο bit είναι λανθασμένο.

Οι κώδικες Hamming χρησιμοποιούν πολλαπλούς ελέγχους ισοτιμίας προκειμένου να προσδιορίσουν και να διορθώσουν λάθη του ενός bit. Κάθε έλεγχος τώρα είναι ένα άθροισμα ορισμένων bits σε επιλεγμένες θέσεις. Στην απλούστερη περίπτωση λέξεις μηνύματος μήκους $2^r - r - 1$, όπου r ακέραιος, πρόκειται να σταλούν μαζί με r bits ελέγχου, ώστε κάθε κωδική λέξη (τα bits του μηνύματος μαζί με τα bits ελέγχου) να περιλαμβάνει $2^r - 1$ bits. Οι θέσεις στην κωδική λέξη αριθμούνται από αριστερά προς τα δεξιά. Το πρώτο bit ελέγχου είναι στη θέση 1 και είναι ένας έλεγχος ισοτιμίας για τις θέσεις που έχουν το 1 ως λιγότερο σημαντικό (least significant) bit της δυαδικής τους αναπαράστασης (αυτές είναι οι θέσεις 1, 3, 5, 7, ...). Το δεύτερο bit ελέγχου είναι στη θέση 2 και είναι ένας έλεγχος ισοτιμίας για τις θέσεις που έχουν το 1 στο δεύτερο λιγότερο σημαντικό (least significant) bit της δυαδικής τους αναπαράστασης (αυτές είναι οι θέσεις 2, 3, 6, 7, ...). Το τρίτο bit ελέγχου είναι στη θέση 3 και είναι ένας έλεγχος ισοτιμίας για τις θέσεις που έχουν το 1 στο τρίτο λιγότερο σημαντικό (least significant) bit της δυαδικής τους αναπαράστασης (αυτές είναι οι θέσεις 4, 5, 6, 7, 12, ...), κοκ.. Αν κανένας έλεγχος ισοτιμίας δεν αποτύχει, τότε ο κώδικας θεωρείται σωστός. Αν ένα bit στην κωδική λέξη είναι λάθος, το λάθος βρίσκεται στη θέση που η δυαδική αναπαράσταση ισούται με το πρότυπο του αποτυχημένου ελέγχου ισοτιμίας.

Η Εικόνα 63 δείχνει τον κώδικα για $r=3$. Η πρώτη, η δεύτερη και η

τέταρτη στήλη είναι οι θέσεις 1, 2 και 4 κάθε κωδικής λέξης. Οι τιμές τους μπορούν να υπολογιστούν από τα υπόλοιπα bits του μηνύματος, που αναπαριστούν τους αριθμούς από το 1 έως και το 15 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Θέση	Δεκαδική
1 2 3 4 5 6 7	Τιμή
0 0 0 0 0 0 0	0
1 1 0 1 0 0 1	1
0 1 0 1 0 1 0	2
1 0 0 0 0 1 1	3
1 0 0 1 1 0 0	4
0 1 0 0 1 0 1	5
1 1 0 0 1 1 0	6
0 0 0 1 1 1 1	7
1 1 1 0 0 0 0	8
0 0 1 1 0 0 1	9
1 0 1 1 0 1 0	10
0 1 1 0 0 1 1	11
0 1 1 1 1 0 0	12
1 0 1 0 1 0 1	13
0 0 1 0 1 1 0	14
1 1 1 1 1 1 1	15

Εικόνα 68. Hamming κώδικας για $r=3$

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 64, στο μέταλλο που δόθηκε στον Hamming υπάρχει ο πίνακας με τους ελέγχους ισοτιμίας, ειδικότερα για την περίπτωση του πίνακα της Εικόνας 64 έχουμε :

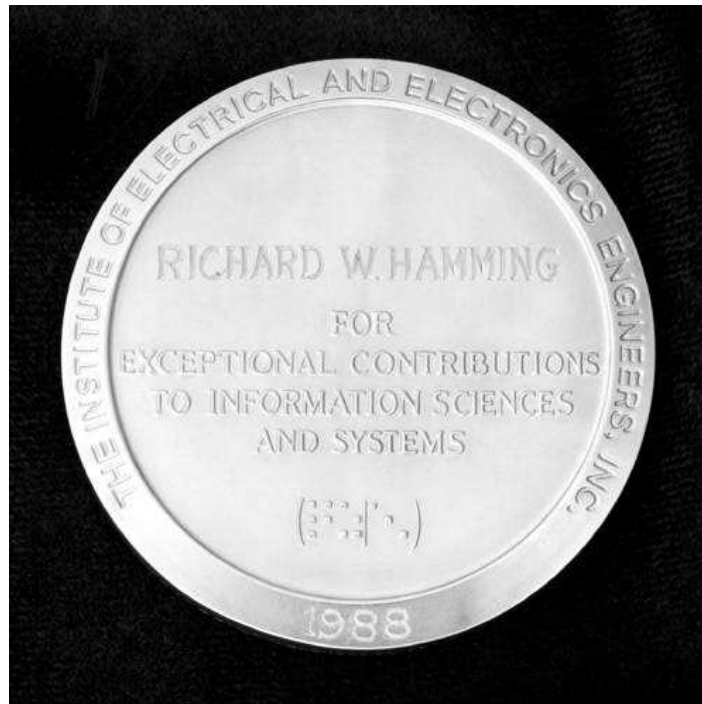
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας H χρησιμοποιείται ως εξής.

Έστω r ένα δυαδικό διάνυσμα μήκους 7 που αναπαριστά κάθε λαμβανόμενη λέξη, όχι απαραίτητα μια κωδική λέξη. Χρησιμοποιώντας αριθμητική Boolean υπολογίζουμε το

$$s = H \cdot r^T \quad (10.11)$$

όπου s είναι ένα δυαδικό διάνυσμα μήκους 3. Αν $s = 0$, τότε το r είναι μια κωδική λέξη. Διαφορετικά, το s θα συμφωνεί με την i -οστή στήλη του H , τότε το i -οστό bit του r είναι λάθος και πρέπει να αντιστραφεί έτσι ώστε να λάβουμε τη σωστή κωδική λέξη.



Εικόνα 69. Το μετάλλιο με το οποίο τιμήθηκε ο Hamming από το IEEE

Οι κώδικες Hamming μπορούν να ερμηνευθούν γεωμετρικά. Ορίζουμε την απόσταση Hamming ανάμεσα σε δύο κωδικές λέξεις ως τον αριθμό των θέσεων που διαφέρουν οι δύο κωδικές λέξεις. Η μικρότερη απόσταση Hamming μεταξύ των κωδικών λέξεων στον πίνακα της Εικόνας 65 είναι 3. Εφόσον ένα μεμονωμένο λάθος μετακινεί μια ληφθείσα λέξη σε απόσταση 1 από τη σωστή λέξη, μεμονωμένα λάθη μπορούν χωρίς αμφιβολία να

διορθωθούν αλλάζοντας τη ληφθείσα λέξη στην κοντινότερη κωδική λέξη. Επιπλέον, οι κώδικες Hamming είναι τέλειοι από τη σκοπιά ότι κάθε ληφθείσα λέξη απέχει το πολύ απόσταση 1 από μια κωδική λέξη. Είναι εύκολο να πιστοποιήσουμε ότι ο αριθμός των κωδικών λέξεων επί τον αριθμό των λέξεων που δεν απέχουν μεγαλύτερη απόσταση από 1 από μια κωδική λέξη, ισούται με το συνολικό αριθμό δυνατών λέξεων. Αυτό σημαίνει ότι όταν κάθε τύπος ελέγχου αποτυγχάνει, στην πραγματικότητα έχουμε παραπάνω από ένα λάθος στη λέξη που έχει εκπεμφθεί. Πιο σύγχρονοι κώδικες, που προσπαθούν να διορθώσουν παραπάνω από ένα λάθος, είναι σπανίως τέλειοι, δηλαδή μερικοί τύποι λαθών που μπορεί να συμβούν στα bits δεν οδηγούν σε ξεκάθαρη αποκωδικοποίηση χωρίς αμφιβολίες.

Ο Hamming θεωρούσε ότι ένας κώδικας με ελάχιστη απόσταση Hamming μήκους $2t+1$, όπου t οποιοσδήποτε ακέραιος μπορούσε να διορθώσει t λάθη και ένας κώδικας με ελάχιστη απόσταση $2t+2$ μπορούσε να διορθώσει t λάθη και να εντοπίσει αλλά να μη διορθώσει $t+1$ λάθη.

Οι κώδικες που περιγράφηκαν παραπάνω είναι κώδικες που διορθώνουν ένα μεμονωμένο λάθος. Προσθέτοντας ένα επιπλέον bit σε κάθε λέξη μπορούν να εντοπίζουν δύο λάθη. Οι κώδικες αυτοί έλυσαν ένα μεγάλο μέρος του προβλήματος συντήρησης του εξοπλισμού των τηλεφωνικών εταιριών, ενώ τα «Hamming bits» εισήχθησαν στις μνήμες των υπολογιστών στα τέλη της δεκαετίας του '50, όπως για παράδειγμα στον IBM 7030 Stretch supercomputer.

Μπορούμε να πούμε εν συντομία ότι οι κώδικες Hamming σχετίζονται με μικρές οικογένειες κωδικών διόρθωσης πολλαπλών λαθών, που χρησιμοποιούνται σήμερα. Γενικά, ένας γραμμικός κώδικας διόρθωσης λαθών μπορεί να χαρακτηριστεί από μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών (n,k,d) , όπου n ο αριθμός των συμβόλων στις κωδικές λέξεις, k ο αριθμός των συμβόλων στις λέξεις του μηνύματος και d η μικρότερη απόσταση. Συνεπώς, ο κώδικας του πίνακα της Εικόνας 65 είναι ένας κώδικας $(7,4,3)$.

10.9 Κώδικες Χαμηλής Πυκνότητας Ελέγχου Ισοτιμίας (Low Density Parity Check Codes, LDPC)

Τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον των επιστημόνων της Θεωρίας Κωδίκων έχει επικεντρωθεί στην κατασκευή κωδίκων διόρθωσης σφαλμάτων πολύ καλά δομημένων, οι οποίοι διαθέτουν μεγάλη ελάχιστη απόσταση, d_{\min} . Η υψηλή ποιότητα των κωδίκων ως προς τη δομή τους καθιστά αντιμετωπίσιμη την πολυπλοκότητα της αποκωδικοποίησης, ενώ παράλληλα η μεγάλη ελάχιστη απόσταση φέρεται να εξασφαλίζει την υψηλή απόδοση του κώδικα. Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή δεν θα μπορούσε να μην έχει και ορισμένα μειονεκτήματα. Αρχικά, για να είναι ένα σχήμα κωδικοποίησης αξιόπιστο, η επιλογή των κωδίκων θα πρέπει να γίνει τυχαία. Το γεγονός αυτό όμως, έρχεται σε αντίθεση με το στόχο της θεωρίας κωδίκων, την κατασκευή δηλαδή πολύ καλά δομημένων κωδίκων, οι οποίοι παράλληλα χαρακτηρίζονται από ένα απλό σχήμα αποκωδικοποίησης. Επίσης, συγκρινόμενη με τη χωρητικότητα του διαύλου (channel capacity), η ελάχιστη απόσταση, σε πρακτικό επίπεδο, αποτελεί μία μικρότερου ενδιαφέροντος παράμετρο σχετικά με την απόδοση του κώδικα.

Από το 1993 και μετά, οι νεότερες τεχνικές κωδικοποίησης επέτρεψαν την κατασκευή κωδίκων των οποίων η απόδοση σε δίαυλο Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN) προσέγγιζε το όριο του Shannon με απόκλιση 1 dB. Οι μέθοδοι αυτές, όπως για παράδειγμα οι Turbo και οι LDPC

κώδικες, χρησιμοποιούν μία εντελώς διαφορετική φιλοσοφία βασισμένη στα επαναληπτικά σχήματα κωδικοποίησης.

Οι κώδικες Χαμηλής Πυκνότητας Ελέγχου Ισοτιμίας (LDPC) αποτελούν μία κατηγορία γραμμικών κωδίκων δομής. Οι κώδικες αυτοί, καθώς και ο σχετικός επαναληπτικός αλγόριθμος κωδικοποίησης, προτάθηκαν από τον R. G. Gallager το 1960 στη διδακτορική του διατριβή, όμως δεν αξιοποιήθηκαν παρά μόνο στις αρχές της δεκαετίας του 1990. Ο λόγος για τον οποίο οι LDPC κώδικες είχαν κατά κάποιο τρόπο τεθεί στο περιθώριο ήταν το υπερβολικά μεγάλο, για τα δεδομένα της εποχής, υπολογιστικό

κόστος που απαιτούσαν, καθώς και το γεγονός ότι οι υπολογιστικές μηχανές της εποχής δεν ήταν σε θέση να ανταπεξέλθουν στην πολυπλοκότητα του αλγορίθμου στον οποίο βασίζονταν οι LDPC κώδικες. Εξαιρεση αποτελεί το έργο του Tanner το 1981, ο οποίος εισήγαγε την αναπαράσταση των LDPC κωδίκων με γράφους, οι οποίοι ονομάζονται Γράφοι Tanner (Tanner Graphs) ή αλλιώς Διμερείς Γράφοι (Bipartite Graphs).

Οι κώδικες Χαμηλής Πυκνότητας Ελέγχου Ισοτιμίας (LDPC) μπορούν να αναπαρασταθούν με δύο τρόπους. Όπως το σύνολο των κωδίκων δομής, δύνανται να περιγραφούν μέσω πινάκων. Υπάρχει όμως και μία εναλλακτική μέθοδος απεικόνισης, η οποία χρησιμοποιεί γράφους Tanner. Εμείς θα ασχοληθούμε με τον πρώτο τρόπο αναπαράστασης.

Εφόσον οι κώδικες που μελετάμε ανήκουν στην κατηγορία των γραμμικών κωδίκων δομής, προκύπτουν από έναν γεννήτορα πίνακα G διάστασης $k \times n$, ενώ οι αριθμοί k και n αντιστοιχούν στον αριθμό ψηφίων του προς μετάδοση μηνύματος και της κωδικής λέξης αντίστοιχα. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο πίνακας αυτός δημιουργείται από ένα σύνολο k γραμμικώς ανεξάρτητων n -διάστατων διανυσμάτων, g_0, g_1, \dots, g_{k-1} . Ο γεννήτορας πίνακας συνδέει το προς μετάδοση μήνυμα c με την κωδική λέξη v , αφού κάθε κωδική λέξη γράφεται $v = c \cdot G$. Ο γεννήτορας πίνακας έχει τη μορφή $G = [P \ I_k]$, δηλαδή αποτελείται από τον $k \times (n-k)$ πίνακα P και από τον $k \times k$ μοναδιαίο πίνακα I_k .

Γενικά, οι γραμμικοί κώδικες δομής, περιγράφονται κυρίως από τον Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας (Parity Check Matrix), H . Ο πίνακας αυτός έχει τη μορφή $H = [I_{n-k} \ P_T]$, δηλαδή προκύπτει από το συνδυασμό του μοναδιαίου $(n-k) \times (n-k)$ I_{n-k} πίνακα με τον ανάστροφο του πίνακα P διάστασης $(n-k) \times k$. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, ο πίνακας H έχει διάσταση $(n-k) \times n$. Συγκεκριμένα, το πλήθος των γραμμών του αντιστοιχεί στο πλήθος των πλεοναζόντων ψηφίων ελέγχου που εισάγονται με την κωδικοποίηση, ενώ ο αριθμός των στηλών του ισούται

με τον αριθμό των ψηφίων από τον οποίο αποτελείται μία κωδική λέξη. Ο πίνακας H πραγματοποιεί $m = n - k$ ελέγχους ισοτιμίας σε κάθε κωδική λέξη που φτάνει στον αποκωδικοποιητή. Οι LDPC κώδικες αποτελούν μία συγκεκριμένη κατηγορία γραμμικών κωδίκων δομής, της οποίας το βασικό χαρακτηριστικό συνίσταται στην χαμηλή πυκνότητα του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας σε μη μηδενικά στοιχεία («1»). Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας H της συγκεκριμένης κατηγορίας κωδίκων αποτελείται κυρίως από μηδενικά στοιχεία και μόνο από έναν πολύ μικρό αριθμό άσων. Από το χαρακτηριστικό αυτό προκύπτει και η ονομασία των συγκεκριμένων κωδίκων (χαμηλής πυκνότητας).

Ακολουθως, δίνεται ένας πίνακας χαμηλής πυκνότητας ελέγχου ισοτιμίας για έναν (8,4) κώδικα, δηλαδή για κώδικα με μεταδιδόμενη πληροφορία αποτελούμενη από 4 ψηφία και με 4 ψηφία ελέγχου.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δύο σημαντικά μεγέθη που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη σε έναν πίνακα ελέγχου ισοτιμίας είναι το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων σε κάθε γραμμή του πίνακα, w_r , και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων σε κάθε στήλη του πίνακα w_c . Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται βαθμός γραμμής και βαθμός στήλης αντίστοιχα. Για να μπορεί να χαρακτηριστεί ένας πίνακας ως χαμηλής πυκνότητας πίνακας (low-density), θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$w_c \ll n \quad \text{και} \quad w_r \ll m \quad (10.12)$$

Πιο αναλυτικά, θα πρέπει ο αριθμός των στοιχείων «1» σε μία στήλη του πίνακα να είναι κατά πολύ μικρότερος από το πλήθος των στηλών, δηλαδή από το μήκος της κωδικής λέξης και αντίστοιχα ο αριθμός των στοιχείων «1» σε μία γραμμή του πίνακα να είναι κατά πολύ μικρότερος από το πλήθος των γραμμών, δηλαδή από το μήκος του προς μετάδοση μηνύματος. Για την ικανοποίηση των ανωτέρω συνθηκών, ο πίνακας

ελέγχου ισοτιμίας πρέπει να είναι πολύ μεγάλος. Συνεπώς, ο πίνακας του παραδείγματος δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως πίνακας χαμηλής πυκνότητας, απλά χρησιμοποιείται για την κατανόηση των χαρακτηριστικών ενός τέτοιου πίνακα.

10.10 Κυκλικοί Κώδικες

Η κυκλική μετατόπιση $\kappa(x)$ μιας λέξης x είναι η λέξη y που έχει ως πρώτο ψηφίο της το τελευταίο ψηφίο της x και τα υπόλοιπα ψηφία της προκύπτουν με απλή μετατόπιση κατά μία θέση προς τα δεξιά όλων των ψηφίων της x . Για παράδειγμα, $\kappa(010011) = 101001$ και $\kappa(101001) = 110100$.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης της κυκλικής μετατόπισης μπορούμε να ορίσουμε τους κυκλικούς κώδικες.

Ένας γραμμικός κώδικας C καλείται κυκλικός αν η κυκλική μετατόπιση κάθε κωδικής λέξης είναι και αυτή κωδική λέξη.

Παράδειγμα 10.8

Θεωρούμε τον κώδικα $C = \{000, 110, 101, 011\}$ και ζητείται να εξεταστεί αν είναι κυκλικός κώδικας.

Πρώτα ελέγχουμε αν είναι γραμμικός κώδικας, δηλαδή αν το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο ή περισσότερων κωδικών λέξεων του C είναι επίσης κωδική λέξη του C , που στην περίπτωση μας ισχύει και κατόπιν εξετάζουμε τις κυκλικές μετατοπίσεις όλων των κωδικών λέξεων. Οι κυκλικές μετατοπίσεις είναι οι εξής:

$$\kappa(000) = 000$$

$$\kappa(110) = 011$$

$$\kappa(101) = 110$$

$$\kappa(011) = 101$$

Αφού όλες είναι κωδικές λέξεις, ο κώδικας είναι κυκλικός.

Αναφορικά με τη συνάρτηση κυκλικής μετατόπισης $\kappa(x)$ ισχύει:

$$\kappa(x+y) = \kappa(x) + \kappa(y) \text{ και } \kappa(\alpha x) = \alpha\kappa(x) \quad (10.13)$$

όπου x, y λέξεις και $\alpha \in K = \{0,1\}$

Επομένως, για να δείξουμε ότι ένας γραμμικός κώδικας C είναι κυκλικός, αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa(x) \in C \quad \forall x$ που περιέχεται σε μία βάση του C . Έτσι, αν θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν κυκλικό κώδικα C μήκους n , αρκεί να σχηματίσουμε το υποσύνολο S αποτελούμενο από μία λέξη x μήκους n και τις $(n-1)$ κυκλικές της μετατοπίσεις, $S = \{x, \kappa(x), \kappa(\kappa(x)), \dots\}$. Αν ο κώδικας C είναι το γραμμικό ανάπτυσμα του S , δηλαδή $C = \langle S \rangle$, τότε αφού το S περιέχει μια βάση του C , ο C είναι σύμφωνα με τα προηγούμενα κυκλικός κώδικας.

Στο Παράδειγμα 10.8, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από τη λέξη $x = 110$ και να σχηματίσουμε το $S = \{110, \kappa(110) = 011, \kappa(011) = 101\}$, του οποίου το γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο $\{110, 011\}$ είναι μια βάση του $C = \{000, 110, 101, 011\}$.

Η λέξη x που απαρτίζει μαζί με τις $(n-1)$ κυκλικές της μετατοπίσεις το S , γραμμικό ανάπτυσμα του οποίου είναι ο κώδικας C , ονομάζεται γεννήτορας του κυκλικού κώδικα C . Κάθε κώδικας μπορεί να έχει πολλούς γεννήτορες.

Οι κωδικές λέξεις μπορούν να παρασταθούν με πολυώνυμα. Ιδιαίτερα στην περίπτωση των κυκλικών κωδίκων, παρατηρούμε ότι αν μια λέξη u παριστάνεται από το πολυώνυμο $u(x)$, τότε η κυκλική μετατόπιση $\kappa(u)$ αναπαριστάται από το πολυώνυμο $x \cdot u(x) \bmod (1+x^n)$.

Θεώρημα

Αν C είναι ένας κυκλικός κώδικας μήκους n , $\gamma(x)$ το πολυώνυμο γεννήτορας και $n-k$ ο βαθμός του, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

Ο κώδικας C είναι διάστασης k και οι λέξεις που αντιστοιχούν στα πολυώνυμα $\gamma(x), x\gamma(x), x^2\gamma(x), \dots, x^{k-1}\gamma(x)$ αποτελούν μια βάση του C .

Μία λέξη c ανήκει στον C αν και μόνο αν το αντίστοιχο πολυώνυμο $c(x)$

είναι το γινόμενο του γεννήτορα $\gamma(x)$ με κάποιο πολυώνυμο $a(x)$, δηλαδή αν $c(x) = a(x)\gamma(x) \bmod(1 + x^n)$.

10.11 Κώδικες BCH (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem) και RS (Reed-Solomon)

Στην αλγεβρική θεωρία κωδικοποίησης οι λέξεις του μηνύματος, όπως και οι κωδικές λέξεις, αναπαριστώνται με πολυώνυμα με συντελεστές που λαμβάνουν τιμές από ένα Galois field $GF[q]$ τάξεως q , όπου q είναι μια πρώτη δύναμη. Το πολυώνυμο $c[X]$ που αναπαριστά μια κωδική λέξη παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του πολυωνύμου του μηνύματος $m[X]$ με ένα σταθερό πολυωνυμικό γεννήτορα $g[X]$. Δύο σχετικές οικογένειες κωδίκων, οι οποίες επινοήθηκαν το 1960, επιτρέπουν τη διόρθωση τυχαίου αριθμού λαθών με τη χρήση κατάλληλου πλεονασμού (redundancy).

Οι κώδικες Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH) μπορούν να δημιουργηθούν πάνω στο $GF[2]$. Ένας δυαδικός BCH κώδικας με μήκος κωδικής λέξης $2^r - 1$ κι ελάχιστη απόσταση το λιγότερο $2t + 1$, για να μπορεί να διορθώσει t λάθη πάντα μπορεί να δημιουργηθεί με το πολύ $r \cdot t$ ψηφία ελέγχου. Τότε, ο κώδικας θα έχει απόδοση το λιγότερο

$$\left[2^r - 1, 2^r - 1 - r \cdot t, 2t + 1 \right] \quad (10.14)$$

Όταν $t=1$, αυτός ο BCH κώδικας είναι ισοδύναμος με τον κώδικα Hamming για διόρθωση ενός λάθους ανά συνδυασμό.

Οι κώδικες Reed-Solomon (RS) δημιουργούνται πάνω στο field $GF[q]$ τάξεως q , όπου q είναι μια πρώτη δύναμη και $q > 2$. Οι κώδικες Reed-Solomon είναι μέγιστης απόστασης διαχωρίσιμοι κώδικες, δηλαδή δημιουργούνται πάνω στο $GF[q]$ με ελάχιστη απόσταση d , όπως περιγράφεται από την παρακάτω διατεταγμένη τριάδα.

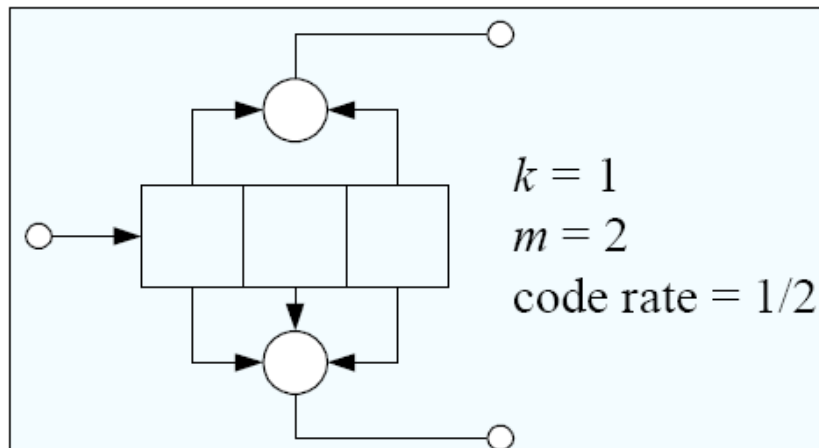
$$[q - 1, q - d, d]$$

Για παράδειγμα η NASA χρησιμοποιεί έναν κώδικα $[255, 233, 33]$ RS πάνω σε ένα $GF[2^8]$ για διαπλανητική επικοινωνία. Οι κώδικες $[32, 28, 5]$ και $[28, 24, 5]$ χρησιμοποιούνται ευρέως για τη διόρθωση σε λάθη μήκους έως και 4000 bits στους οπτικούς δίσκους (compact disks).

10.12 Συνελικτικοί ή Συγκεραστικοί Κώδικες (Convolutional Codes)

Οι συνελικτικοί κώδικες είναι περισσότερο πολύπλοκοι από τους κώδικες δομής. Σε αντίθεση με τους κώδικες δομής που συγκεντρώνουν τα εισερχόμενα bits σε ομάδες (blocks) και παράγουν μεγαλύτερες ομάδες στην έξοδό τους, οι συνελικτικοί κώδικες μεταχειρίζονται τα δεδομένα εισόδου σαν μια συνεχή ακολουθία δεδομένων. Για κάθε k bits στην είσοδο, ο κωδικοποιητής παράγει m bits στην έξοδο.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας συνελικτικός κωδικοποιητής που χρησιμοποιεί το τρέχον bit και τα δύο προηγούμενα.



Εικόνα 70. Συνελικτικός κωδικοποιητής

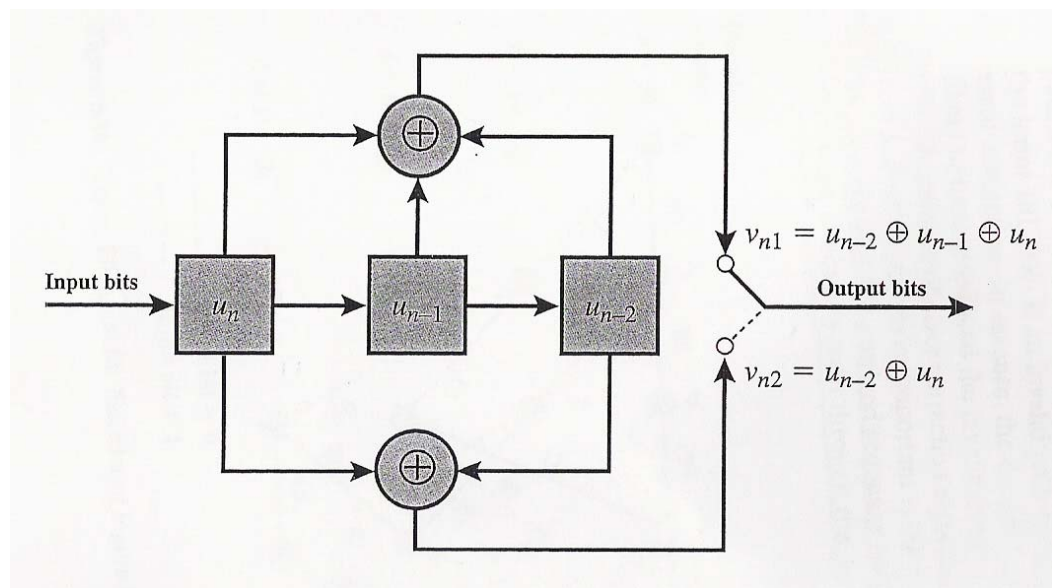
Ο ρυθμός R ενός συνελικτικού κώδικα είναι:

$$R = \frac{k}{m} \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (10.15)$$

Ένας συνελικτικός κώδικας ορίζεται από τρεις παραμέτρους : n , k , K . Ένας

(n, k, K) κώδικας επεξεργάζεται κάθε φορά k ψηφία πληροφορίας εισόδου και παράγει μία έξοδο n ψηφίων για κάθε k εισερχόμενα ψηφία. Στη περίπτωση ενός συνελικτικού κώδικα, οι παράμετροι n και k παίρνουν γενικά μικρές τιμές. Η διαφορά με τους κώδικες δομής είναι ότι οι συνελικτικοί κώδικες έχουν μνήμη, η οποία χαρακτηρίζεται από τον περιοριστικό παράγοντα K (constraint factor). Στην ουσία, η τρέχουσα έξοδος n ψηφίων ενός (n, k, K) κώδικα εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή του τρέχοντος συνόλου k ψηφίων εισόδου, αλλά και από τα προηγούμενα $K-1$ σύνολα των k ψηφίων εισόδου. Έτσι, η τρέχουσα έξοδος των n ψηφίων είναι μία συνάρτηση των τελευταίων $K * k$ ψηφίων εισόδου.

Στην Εικόνα 68 απεικονίζεται ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός $(2, 1, 3)$ συνελικτικού κωδικοποιητή.



Εικόνα 71. Συνελικτικός κωδικοποιητής με $(n, k, K) = (2, 1, 3)$

Για έναν (n, k, K) κώδικα, ο καταχωρητής ολίσθησης περιέχει τα πιο πρόσφατα $K * k$ ψηφία εισόδου. Η αρχική κατάσταση των καταχωρητών είναι η μηδενική. Ο κωδικοποιητής παράγει n ψηφία εξόδου, μετά από τα

οποία τα k παλαιότερα ψηφία του καταχωρητή αποβάλλονται και k νέα ψηφία εισάγονται. Επομένως, αν και η έξοδος των n ψηφίων εξαρτάται από τα $K * k$ ψηφία εισόδου, ο ρυθμός κωδικοποίησης είναι $\frac{k}{n}$. Οι πιο ευρέως χρησιμοποιούμενοι κωδικοποιητές έχουν $k=1$ και συνεπώς μήκος καταχωρητή ολίσθησης K . Στο παραπάνω παράδειγμα ο κωδικοποιητής μετατρέπει ένα ψηφίο εισόδου u_n σε δύο ψηφία εξόδου v_{n_1} και v_{n_2} , χρησιμοποιώντας τα τρία πιο πρόσφατα ψηφία.

Για μία δοσμένη ακολουθία εισόδου k ψηφίων, υπάρχουν $2^{k(K-1)}$ διαφορετικές συναρτήσεις που μετατρέπουν τα k ψηφία εισόδου σε n ψηφία εξόδου. Τα τελευταία $(K-1)$ ψηφία εισόδου καθορίζουν το ποια συνάρτηση θα χρησιμοποιηθεί. Μπορεί επομένως να παρουσιαστεί ένας συνελικτικός κωδικοποιητής χρησιμοποιώντας μία μηχανή πεπερασμένης κατάστασης. Η μηχανή έχει $2^{k(K-1)}$ καταστάσεις και η μετάβαση από την μία κατάσταση στην άλλη καθορίζεται από τα k πιο πρόσφατα ψηφία εισόδου.

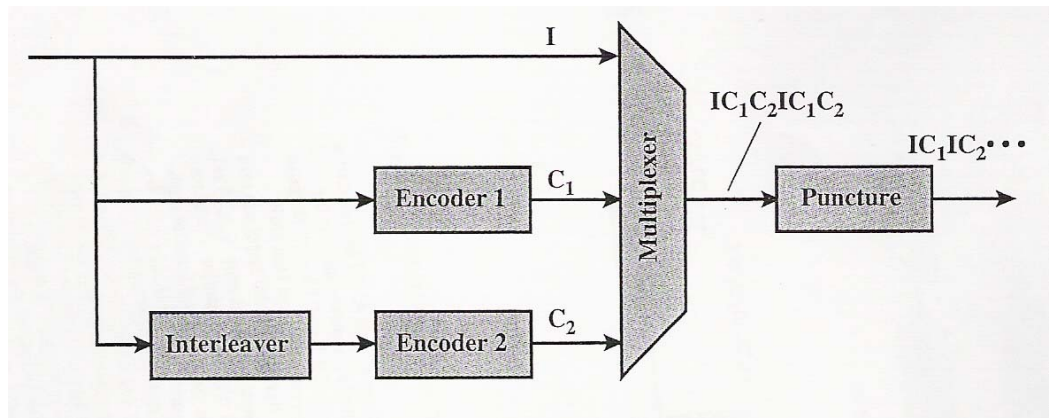
10.13 Κώδικες Turbo

Πριν από δεκαπέντε περίπου χρόνια, ο Berrou, ο Glavieux και ο Thitimajshima εισήγαγαν μια νέα προσέγγιση στην κωδικοποίηση διόρθωσης λαθών που έφερε επανάσταση στη θεωρία και στις τεχνικές κωδικοποίησης. Ανακάλυψαν ένα ψηφιακό σχήμα κωδικοποίησης που μπορούσε να παρέχει εικονικά αλάνθαστες επικοινωνίες σε μεγαλύτερους ρυθμούς δεδομένων και αποδόσεις μεταδιδόμενης ισχύος από ότι θεωρούσαν δυνατόν οι ειδικοί. Το σχήμα που ανακάλυψαν, το οποίο ονομάστηκε κώδικες turbo (turbo codes), σε αναλογία με τη μηχανή turbo και την αποτελεσματική χρήση της ανατροφοδότησης, οδήγησε σε τεχνικές κωδικοποίησης οι οποίες προσεγγίζουν τα απόλυτα όρια απόδοσης.

Η καινούρια τάξη κωδικών αποτελεί σημαντική επιλογή για τα ασύρματα συστήματα τρίτης γενιάς και συγκεκριμένα χρησιμοποιείται από τα συστήματα UMTS (Universal Mobile Telecommunications Systems) και τα κυψελωτά συστήματα τρίτης γενιάς cdma2000. Οι διαφορετικοί τύποι των

κωδικοποιητών και αποκωδικοποιητών turbo στηρίζονται στη συνελικτική κωδικοποίηση.

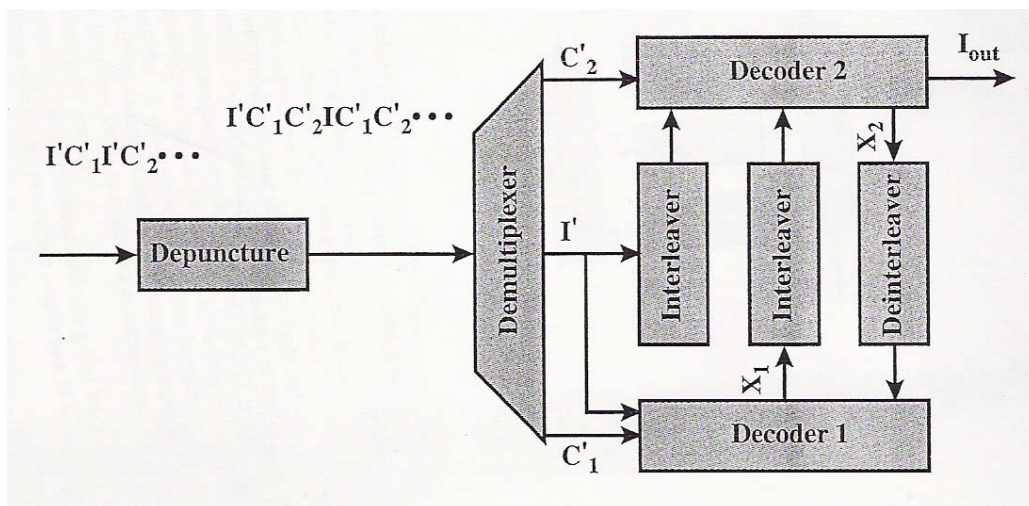
Στην Εικόνα 65 φαίνεται ένας κωδικοποιητής turbo, ο οποίος αποτελείται από δύο όμοιους κωδικοποιητές. Ο πρώτος κωδικοποιητής (encoder 1) δέχεται μια ακολουθία ψηφίων εισόδου και παράγει για κάθε εισερχόμενο ψηφίο ένα ψηφίο ελέγχου C_1 (check bit). Η είσοδος στο δεύτερο κωδικοποιητή (encoder 2) είναι μια αναδιαταγμένη εκδοχή της ακολουθίας ψηφίων εισόδου παράγοντας έτσι μία ακολουθία ψηφίων ελέγχου C_2 . Τα αρχικά ψηφία εισόδου σε συνδυασμό με τα δύο ψηφία ελέγχου πολυπλέκονται στη συνέχεια και παράγουν την ακολουθία $I_1C_{11}C_{21}I_2C_{12}C_{22}, \dots$, η οποία αποτελείται από το πρώτο ψηφίο εισόδου, που ακολουθείται από το πρώτο ψηφίο του πρώτου κωδικοποιητή, που ακολουθείται από το πρώτο ψηφίο του δεύτερου κωδικοποιητή, κ.ο.κ. Η τελική ακολουθία έχει ρυθμό κωδικοποίησης $\frac{1}{3}$. Λαμβάνοντας μόνο τα μισά από τα ψηφία ελέγχου και εναλλάσσοντας τις εξόδους των δύο κωδικοποιητών, μπορεί να επιτευχθεί ρυθμός κωδικοποίησης $\frac{1}{2}$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται διάτρηση (puncturing). Οι ρυθμοί κωδικοποίησης $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{2}$ συναντώνται στα συστήματα τρίτης γενιάς.



Εικόνα 72. Κωδικοποίηση turbo

Πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε κωδικοποιητής παράγει ένα μόνο ψηφίο ελέγχου για κάθε ψηφίο εισόδου, καθώς επίσης και ότι το ψηφίο εισόδου διατηρείται. Για την κωδικοποίηση turbo χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της συνελικτικής κωδικοποίησης, γνωστή ως επαναληπτική συστηματική συνελικτική κωδικοποίηση RSC (Recursive Systematic Convolutional).

Στην Εικόνα 66 φαίνεται ένα γενικό διάγραμμα του αποκωδικοποιητή turbo. Στα λαμβανόμενα δεδομένα εφαρμόζεται η αντίστροφη διαδικασία της διάτρησης (depuncturing), αν αυτό είναι απαραίτητο, εκτιμώντας τα ψηφία ελέγχου που λείπουν ή θέτοντάς τα ίσα με το μηδέν. Ο πρώτος αποκωδικοποιητής (decoder 1) λειτουργεί πρώτος χρησιμοποιώντας τις I' και PC_1' τιμές και παράγει τα ψηφία διόρθωσης X_1 . Τα ψηφία I' και X_1 τροφοδοτούνται στο δεύτερο αποκωδικοποιητή, σε συνδυασμό με τις τιμές C_2' . Για την ευθυγράμμιση των ψηφίων πρέπει να πραγματοποιηθεί αναδιάταξη (interleaving). Ο δεύτερος αποκωδικοποιητής (decoder 2) χρησιμοποιεί όλες τις εισόδους και παράγει τις τιμές διόρθωσης X_2 . Αυτές τροφοδοτούνται στον πρώτο αποκωδικοποιητή (decoder 1) για μια δεύτερη επανάληψη του αλγόριθμου αποκωδικοποίησης, αφού πρώτα πραγματοποιηθεί η αντίστροφη διαδικασία αναδιάταξης (deinterleaving). Μετά από αρκετές επαναλήψεις, παράγεται από τα I' και X_2 ένα ψηφίο εξόδου.



Εικόνα 73. Αποκωδικοποίηση turbo

Ασκήσεις

1. Ζητούνται οι ρυθμοί πληροφορίας των κωδίκων $C_1 = \{00,10,01,11\}$, $C_2 = \{000,010,101,111\}$ και $C_3 = \{000000,000010,110001,111111\}$.

2. Δίνονται οι λέξεις $x_1 = 000000$, $x_2 = 000010$, $x_3 = 110001$ και $x_4 = 111111$.

Ζητούνται τα βάρη όλων των λέξεων και οι αποστάσεις $d(x_1, x_2)$, $d(x_1, x_3)$, $d(x_2, x_3)$ και $d(x_3, x_4)$.

3. Ποιοι από τους κώδικες $C_1 = \{101, 111, 011\}$,

$C_2 = \{0000, 1001, 0110, 1111\}$,

$C_3 = \{000000, 11100, 00111, 11011\}$ και $C_4 = \{000000, 101010, 010101, 111111\}$

είναι γραμμικοί και ποιες είναι οι αποστάσεις των γραμμικών κωδίκων;

4. Ποιες είναι οι γεννητριακές μήτρες για τους κώδικες των παραδειγμάτων [10.3](#) με [10.6](#) ;

5. Θεωρούμε έναν πίνακα ελέγχου ισοτιμίας ενός κώδικα Hamming, μήκους 7 ($r = 3$).

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί η απόστασή του και ο ρυθμός πληροφορίας του.

6. Έστω $n=4$ και $\gamma(x)=1+x^2$ το πολυώνυμο γεννήτορας ενός κώδικα C . Θεωρούμε τον κώδικα $C=\{0000, 1010, 0101, 1111\}$. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του C .

7. Θεωρούμε τον κώδικα $C=\{0000, 1010, 0101, 1111\}$. Ζητείται η κωδικοποίηση των ψηφίων πληροφορίας 01 και 10.

8. Θεωρούμε ένα κώδικα C μήκους $n=7$ με πολυώνυμο – γεννήτορα $\gamma(x)=1+x^2+x^3$. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του C , καθώς και η κωδικοποίηση των μηνυμάτων 1110 και 0110.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγγλική Βιβλιογραφία

Wiley.Interscience.Elements.of.Information.Theory.Jul.2006

Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, David J.C. MacKay, University Press 2003

INFORMATION SCIENCE, DAVID G. LUENBERGER, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, Princeton and Oxford

A Mathematical Theory of Communication, By C. E. SHANNON

Information Theory, INFORMATION THEORY AND THE DIGITAL AGE

AFTAB, CHEUNG, KIM, THAKKAR, YEDDANAPUDI, Institute of Technology

http://charon.phys.uoa.gr/moag/admin/pdf_files/Telecom_Chapter_5.pdf

Ελληνική Βιβλιογραφία

Θεωρία Πληροφοριών – Κώδικες, Βούκαλης Δημήτρης, ΙΩΝ 1994

Contemporary Communication Systems using MATLAB, John J. Proakis – Masoud Salehi, BookWare Companion Series

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα, Taub/Schilling, Εκδόσεις Α. Τζιόλα Ε.

Θεωρία Πληροφοριών και Κωδίκων, Χρυσουλίδης

Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης, ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΖΟΡΚΑΔΗΣ, ΠΑΤΡΑ 2002

Ψηφιακές Επικοινωνίες, Γιώργος Φούσκας, Πάτρα 2002

Τόμος Β'-Μέρος Β Ψηφιακές Επικοινωνίες Ι Ι, Σήματα-Διαμόρφωση-Θόρυβος, Δρ. Νικόλαος Δ. Δημητρίου, Πάτρα 2008

Θεωρία πληροφορίας και κωδίκων. Δρ. Βασίλης Διακολουκάς, <http://www.telecom.tuc.gr/courses/infotheory.htm>

Αθανάσιος Χρ. Τζέμος :Τομέας Θεωρητικής Φυσικής, Εντροπία Shannon

TEL412_lecture_09_10_11_12

anamorfosi.teiser.gr/ekp_yliko/e-notes/Data/comm2/main.htm

<http://www.physics4u.gr/articles/shannon.html>

<http://www-groups.dcs.st->

and.ac.uk/~history/Mathematicians/Shannon.html

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CE%BD%CF%84%CF%81%CE%BF%CF%80%CE%AF%CE%B1_%CF%80%CE%BB%CE%B7%CF%81%CE%BF%CF%86%CE%BF%CF%81%CE%B9%CF%8E%CE%BD

http://en.wikipedia.org/wiki/White_noise

http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/el/Shannon%E2%80%93Hartley_the_orem

<http://www.e-yliko.gr/default.aspx>

http://web.teipir.gr/WWW/ECS/PeLAB/doc/THLE_2.pdf

http://charon.phys.uoa.gr/moag/admin/pdf_files/Telecom_Chapter_5.pdf

<http://thalis.cs.unipi.gr/unipi.csd/csd->

014/html/index_files/course_material/Chapter2.pdf

<http://arxiv.org/>

http://books.google.gr/books?q=related:ISBN0486665216&id=ngZhvUfF0UIC&source=gbs_similarbooks_s&cad=1