ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Κεφάλαιο 9 : Κανάλι-Σύστημα

Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΟΜΙΛΙΑΣ

- Στοχαστικά σήματα
- Χωρητικότητα καναλιού
- Το Gaussian κανάλι επικοινωνίας
- Τα διακριτά κανάλια επικοινωνίας
- Τα συνεχή κανάλια επικοινωνίας
- Παραδείγματα χωρητικότητας καναλιού

Φασματικά Χαρακτηριστικά Τυχαίας Διαδικασίας

Η ***μέση ισχύς*** P_{XX} μιας τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ δίνεται

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E\left[X^2(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X_T(f)\right|^2\right]}{2T} df$$

Ορίζουμε τη ***Φασματική Πυκνότητας Ισχύος*** της τυχαίας διαδικασίας ως

$$S_{XX}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X_T(f)\right|^2\right]}{2T}$$

οπότε η ***μέση ισχύς*** της διαδικασίας βρίσκεται με το ολοκλήρωμα

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)\,df$$

Ιδιότητες της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος

1. $S_{XX}(f) \geq 0$

2. $S_{XX}(-f) = S_{XX}(f)$ όταν η $X(t)$ είναι πραγματική

3. Η $S_{XX}(f)$ είναι πραγματική

4. $P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)\,df = A\left[E\left[X^2(t)\right]\right]$

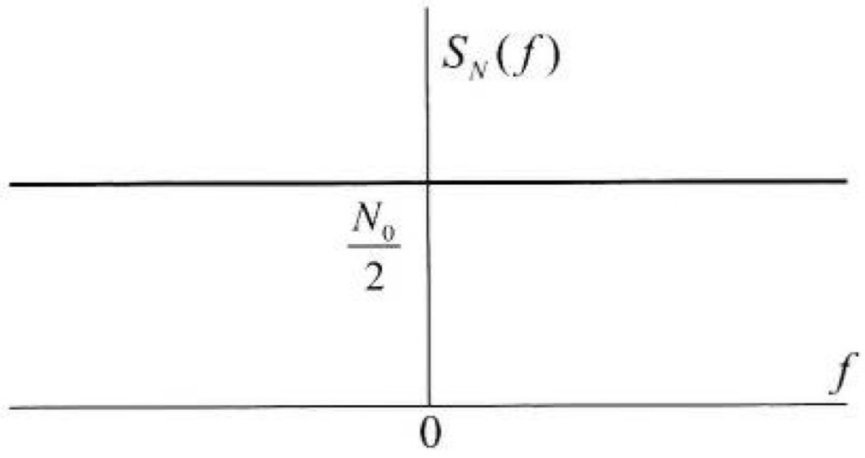
5. $A\left[R_{XX}(t, t+\tau)\right] \xleftrightarrow{F} S_{XX}(f)$

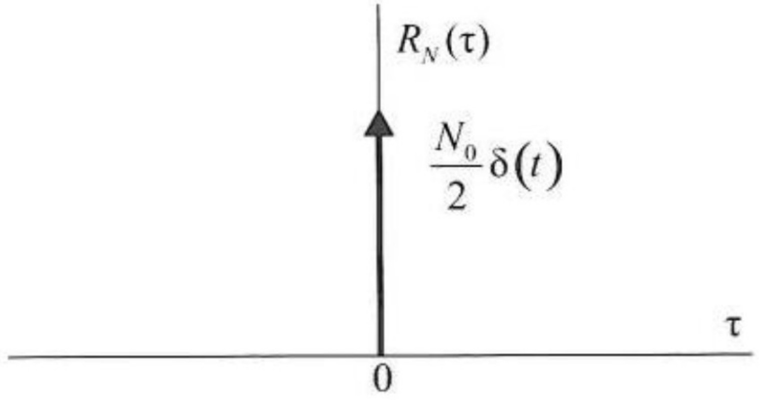
Αν η $X(t)$ είναι τουλάχιστον στατική (με την ευρεία έννοια τότε)

$$R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{F} S_{XX}(f)$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\, e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$





(α) Φασματική Πυκνότητα
Ισχύος λευκού θορύβου

(β) Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης
λευκού θορύβου

Τυχαίες Διαδικασίες και Γραμμικά Συστήματα

$$S_X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S_Y(f)$$

Για τη ***μέση τιμή*** συνόλου της εξόδου έχουμε

$$m_X \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow m_Y = m_X H(0)$$

Για τις ***συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας ισχύος*** έχουμε

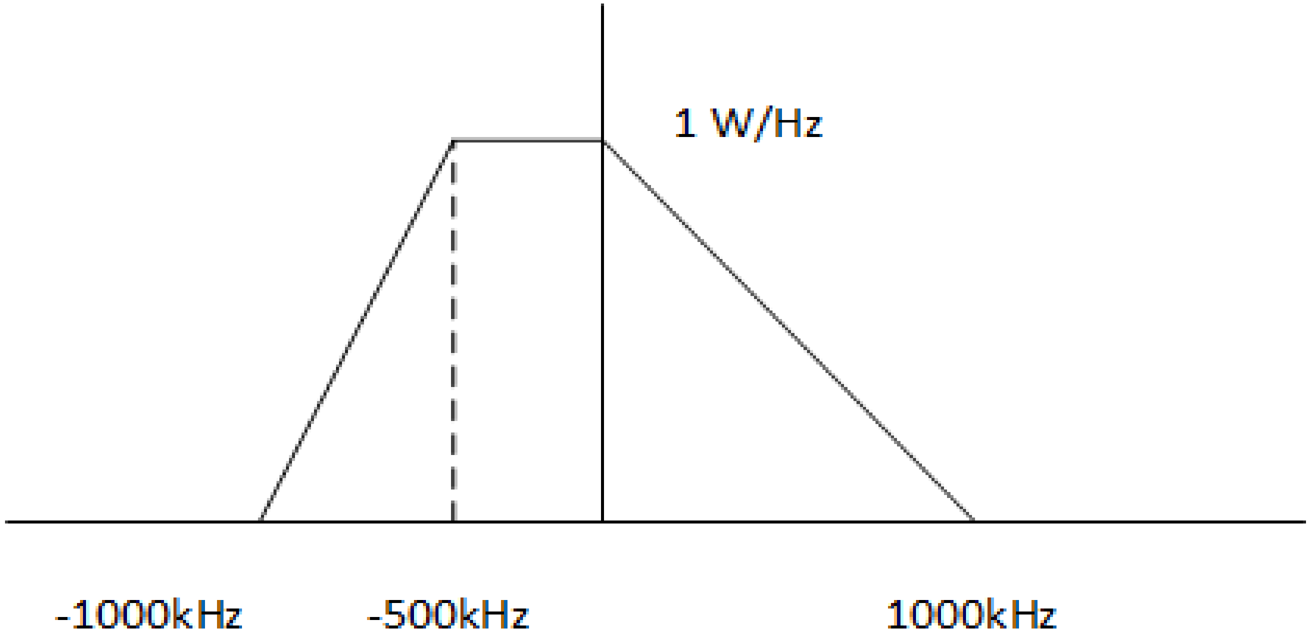
$$S_X(f) \longrightarrow \boxed{H^*(f)} \longrightarrow S_{XY}(f) = S_X(f) H^*(f)$$

$$S_X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S_{YX}(f) = S_X(f) H(f)$$

$$S_X(f) \longrightarrow \boxed{|H(f)|^2} \longrightarrow S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

Άσκηση

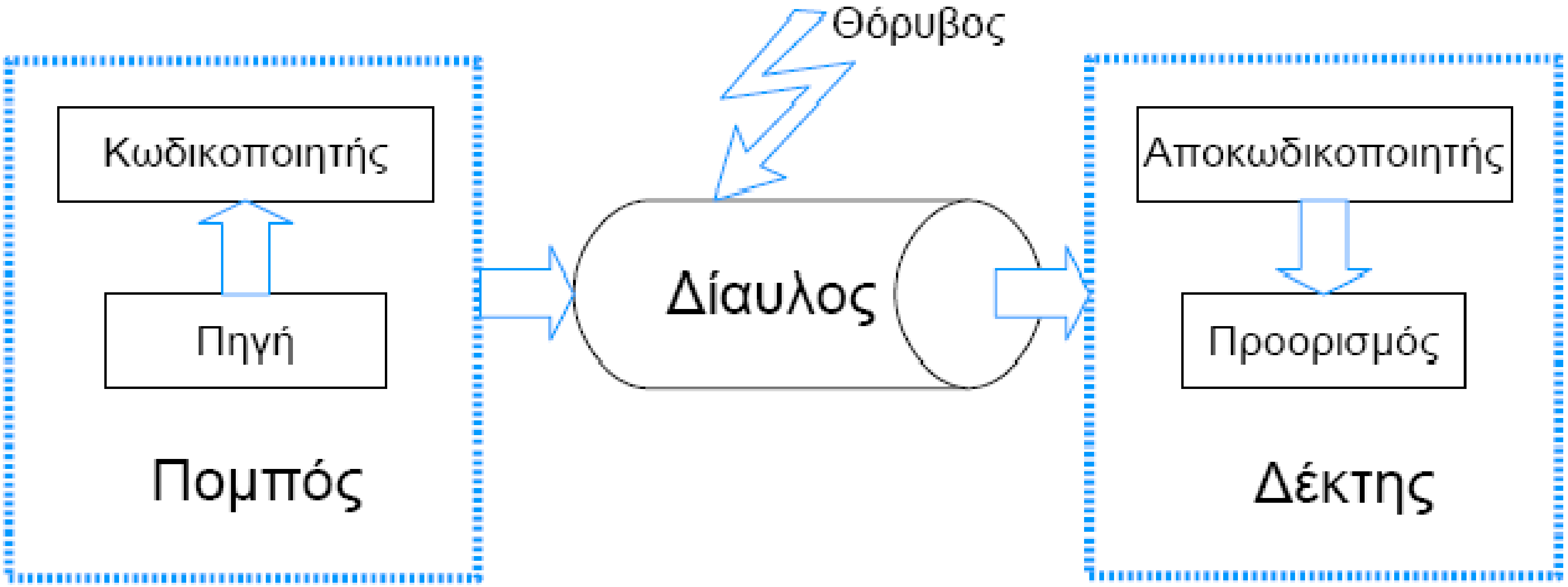
Δίνεται η φασματική πυκνότητα του σήματος



Για το παραπάνω σήμα, αν η παράμετρος η του θορύβου έχει τιμή 0.2 W/Hz, ποια η χωρητικότητα του διαύλου?

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

- Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα



ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ

Η Χωρητικότητα Του Καναλιού-Θεώρημα Shannon:

- Χωρητικότητα καναλιού ονομάζεται η οριακή τιμή του ρυθμού μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι.
- *Αν ο ρυθμός πληροφορίας R είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με τη χωρητικότητα C του καναλιού, δηλαδή $R \leq C$ τότε,*
  - *υπάρχει πάντα μια τεχνική κωδικοποίησης, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μετάδοση πληροφορίας μέσα από το κανάλι με οσοδήποτε μικρή πιθανότητα σφάλματος.*
- *Αντίθετα, αν $R > C$, τότε δεν είναι δυνατή η μετάδοση μηνυμάτων χωρίς λάθη.*

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ

- **Περιορισμός της χωρητικότητας καναλιού λόγω Θορύβου**
- Έστω X και Y τα σήματα που στέλνονται και λαμβάνονται αντίστοιχα.
- Ο συσχετισμός των X και Y είναι η χωρητικότητα του καναλιού
- Η χωρητικότητα του καναλιού → κοινή εντροπία των X και Y.
- Όσο ο αριθμός των συμβολικών καταστάσεων αυξάνει
  - η ικανότητα του δέκτη να διαχωρίσει μεταξύ αυτών ελαττώνεται με την εμφάνιση θορύβου ή/και παρεμβολών.
- Επομένως, ο λόγος σήματος προς θόρυβο παίζει σημαντικό ρόλο στο να επιτευχθεί επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα.

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ

- Η συνδυασμένη επίδραση του θορύβου και του εύρους ζώνης στο ρυθμό μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι εκφράζεται από την σχέση των Shannon και Hartley:

$$C = B \cdot \log_2\left(\frac{S}{N}+1\right), bits/s$$

Το θεώρημα των Shannon-Hartley δηλώνει ότι εάν ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης B και για δεδομένο λόγο σήματος προς θόρυβο S/N είναι μικρότερος από το προβλεπόμενο όριο χωρητικότητας C, τότε η επικοινωνία είναι απαλλαγμένη από σφάλματα.

ΚΑΝΑΛΙ ΚΑΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ

Παράδειγμα : Έστω δυαδική πηγή (0,1) με :

$r = 1000\ {}^{sym}/sec$

$P_o = P_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 1000\ {}^{bits}\!/_{sec}$

$P_e = 0{,}01 \quad (1/100)$

$\Longrightarrow R' \overset{?}{=} 990$ bits/sec

θέση σφάλματος ;

αν $P_e = 0{,}5$ $\Longrightarrow$ ~ τα μισά είναι σωστά από τύχη

$\Downarrow$

άρα $R'' \overset{?}{=} 500$ bits/sec

ουσιαστικά όμως δε μεταδόθηκε καμία πληροφορία !

ΙΔΙΟ αποτέλεσμα παίζοντας στη λήψη: "ΚΟΡΩΝΑ – ΓΡΑΜΜΑΤΑ"

Shannon : αβεβαιότητα στη λήψη ως προς το τι έχει εκπεμφθεί στην είσοδο.

Μέτρο της αβεβαιότητας : Η εντροπία που υπολογίζεται από τις πιθανότητες να συμβεί λάθος.

ΕΝΤΡΟΠΙΑ σε κανάλι με θόρυβο

- H(x) : Μέση κατά σύμβολο πληροφορία στην είσοδο του καναλιού

$$P(x_i) \longrightarrow \mathbf{H}(x), \quad x_i \in S$$

"Η εντροπία της πηγής αν δεν την τροποποιεί ο κωδικοποιητής"

- H(y) : Μέση κατά σύμβολο πληροφορία στην έξοδο του καναλιού

$$P(y_i) \longrightarrow \mathbf{H}(y), \quad y_i \in S'$$

$$\text{αν θόρυβος} = 0 \Longrightarrow S \equiv S' \Longrightarrow H(x) = H(y)$$

- H(y/x) : "Υπό συνθήκη εντροπία" που δίνει το μέτρο των απωλειών πληροφορίας λόγω σφαλμάτων στο κανάλι.

$$\text{θόρυβος} \neq 0 \Longrightarrow \text{είσοδος } x_i \longrightarrow \text{έξοδος } y_i \text{, ενδεχόμενα: } y_i \neq x$$

$$P\left(y_i / x_i\right) \neq 0$$

"Μήτρα Πιθανότητας Μεταφοράς" **P**(y/x)

⇓

Υπολογισμός της H(y/x)

ΕΝΤΡΟΠΙΑ σε κανάλι με θόρυβο

H(x/y) : "Υπό συνθήκη εντροπία" που εκφράζει την αμφιβολία της αντιστοιχίας των συμβόλων κατά την αντίστροφη φορά (από την έξοδο).

Έξοδος y_i $\longrightarrow$ είσοδο $x_i \neq y_i$

$$P\left(x_i / y_i\right) \neq 0$$

H(x,y) : Από κοινού ή "συνδυασμένη εντροπία" που έχει σχέση με την πιθανότητα εμφάνισης $P(x_i, y_i)$ των ζευγών (x_i, y_i).

$$P(x_i, y_i) = P(x_i) \cdot P\left(y_i / x_i\right) = P(y_i) \cdot P\left(x_i / y_i\right)$$

Ισχύει:

$$H(x,y) = H(x) + H(y/x) = H(y) + H(x/y)$$

αν θόρυβος = 0 $\Rightarrow$ $H(x,y) = H(x) = H(y)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ - ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ-ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

$$P(y/x) \longrightarrow H(y/x) \longrightarrow C_{Κ.Θ.}$$

γενικά πλήθος n συμβόλων εισόδου ≠ πλήθος m συμβόλων εξόδου

$$\mathbf{P}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{bmatrix} P\left(y_1/x_1\right) & P\left(y_2/x_1\right) & \cdots\cdots & P\left(y_m/x_1\right) \\ P\left(y_1/x_2\right) & P\left(y_2/x_2\right) & \cdots\cdots & P\left(y_m/x_2\right) \\ \vdots & & & \\ P\left(y_1/x_n\right) & P\left(y_2/x_n\right) & \cdots\cdots & P\left(y_m/x_n\right) \end{bmatrix}$$

Πότε m=n;

$\Downarrow$

όταν θόρυβος = 0

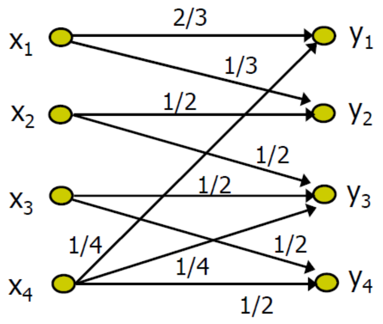
$\Downarrow$

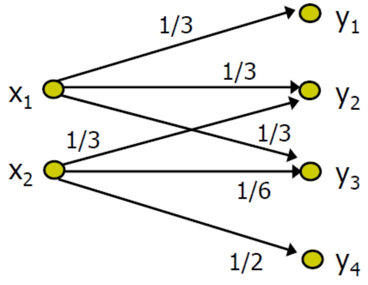
Η μήτρα παίρνει τη διαγώνια μορφή

- Αληθεύει ;

Παραδείγματα

είσοδος έξοδος





ΕΝΤΡΟΠΙΑ σε κανάλι με θόρυβο

- Η υπό "συνθήκη εντροπία" :

$$H\left(\frac{y}{x}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i)\cdot P\left(\frac{y_j}{x_i}\right)\cdot \log P\left(\frac{y_j}{x_i}\right)$$

αντιπροσωπευτική των μέσων απωλειών πληροφορίας / σύμβολο.

- Πραγματικός ρυθμός R′ διαβίβασης πληροφορίας στο ενθόρυβο κανάλι

$$R' = r\left\{H(x) - H\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

$$= r\left\{H(y) - H\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

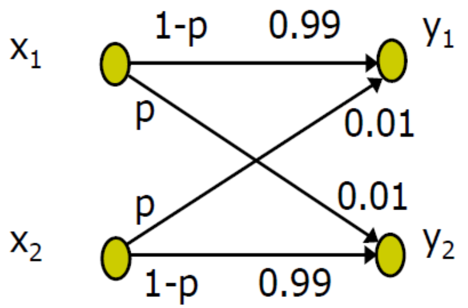
$$= r\left\{H(x) + H(y) - H(x,y)\right\}$$

και η μειωμένη χωρητικότητα του καναλιού:

$\underline{C = \max R'}$ (ισοπιθανότητα συμβόλων)

ΕΝΤΡΟΠΙΑ σε κανάλι με θόρυβο

- Παράδειγμα δυαδικού καναλιού BSC, με P_e=0,01 και $P(x_1)=P(x_2)=1/2$



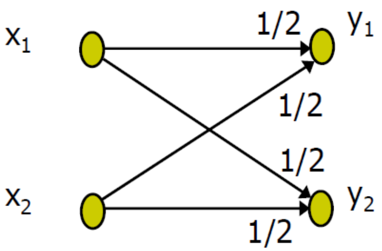
r=1000 symb/sec

$$P\left(\frac{y}{x}\right)=\begin{bmatrix} P\left(\frac{y_1}{x_1}\right) & P\left(\frac{y_2}{x_1}\right) \\ P\left(\frac{y_1}{x_2}\right) & P\left(\frac{y_2}{x_2}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,01 & 0,99 \end{bmatrix}$$

$$H\left(\frac{y}{x}\right)=-2\,\frac{1}{2}\left\{(1-p)\log(1-p)+p\log p\right\}=0,081\ \text{bits}/\text{symb.}$$

$$C=r\left\{H(y)-H\left(\frac{y}{x}\right)\right\}=1000\,(1-0,081)=919\ \text{bits}/\text{sec}$$ (άρα C < 990 bits/sec)

- Αν το κανάλι είναι πολύ θορυβώδες ώστε Pe=1/2, τότε :



$$H\left(\frac{y}{x}\right)=\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)\times 2=1\ \text{bit}/\text{symb.}$$

C = 1000 (1-1) = <u>0</u>

C = 0 και όχι C = 500 bits/sec

Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

Ορισμός

- Το Gaussian κανάλι αποτελεί ένα χρόνο-διακριτό κανάλι με έξοδο Yi σε χρόνο i, όπου Yi είναι το άθροισμα των συμβόλων εισόδου Xi και του θορύβου Zi.
- Ο θόρυβος Zi προέρχεται από μια Gaussian κατανομή με διακύμανση σ^2.

$$X_i = Y_i + Z_i, \text{όπου } Z_i \sim N\ (0, \sigma^2)$$

- *Ο θόρυβος Zi υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητος από το σήμα Xi.*
- *Αποτελεί ένα πρότυπο για ορισμένα κοινά κανάλια επικοινωνίας*
- *Η χωρητικότητα αυτού του καναλιού μπορεί να είναι άπειρη.*
- *Αν η διακύμανση του θορύβου είναι μηδέν, ο δέκτης λαμβάνει τα σύμβολα μεταφοράς χωρίς σφάλματα και δεν υπάρχει περιορισμός στην είσοδο.*

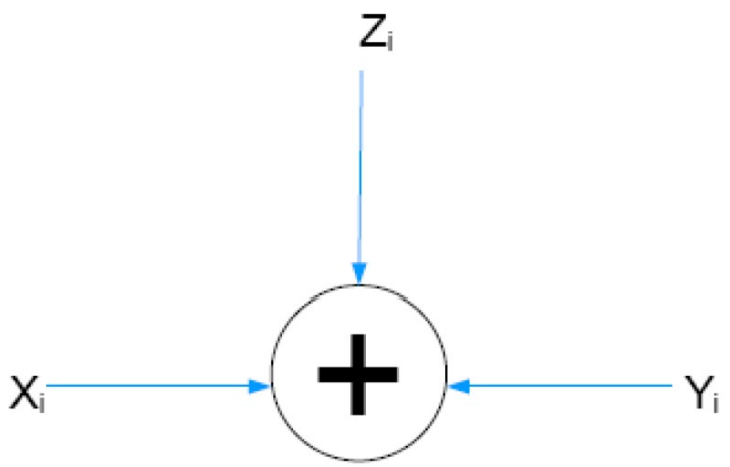
Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

- Ο πιο συνηθισμένος περιορισμός της εισόδου είναι ο περιορισμός της ισχύος.
- Υποθέτουμε ότι η μέση ισχύς πληροί τους περιορισμούς.
- Για οποιαδήποτε κωδικοποιημένο σύμβολο (x_1, x_2,..., x_n) που μεταδίδεται μέσω του καναλιού, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$$

Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

Αναπαράσταση προσθετικού θορύβου



Στέλνετε 1 bit πληροφορίας με μια χρήση του καναλιού. Λόγω περιορισμού της ισχύος, θα σταλθεί ένα από τα δύο μεγέθη, $+\sqrt{P}$ ή $-\sqrt{P}$. Ο δέκτης εξετάζει τα αντίστοιχα Y που έλαβε και προσπαθεί να αποφασίσει ποιο από τα δύο μεγέθη έχει ληφθεί. Υποθέτοντας ότι και τα δύο αυτά μεγέθη έχουν εξίσου τις ίδιες πιθανότητες να σταλθούν (με 1 bit πληροφορίας), η βέλτιστη σχέση αποκωδικοποίησης είναι να αποφασιστεί ότι το $+\sqrt{P}$ εστάλη στην περίπτωση που $Y > 0$ και το $-\sqrt{P}$ εστάλη αν ισχύει $Y < 0$.

Το Gaussian Κανάλι Επικοινωνίας

- Η χωρητικότητα πληροφορίας στο Gaussian κανάλι με τους περιορισμούς τις ισχύος P είναι:

$$C = \max_{f(x):E(X^2)\leq P} I(X;Y)$$

- Οπότε αναπτύσσοντας την I(X; Y):

  - $I(X;Y) = h(Y) - h(Y \mid X) = h(Y) - h(Z)$

- Το Z εξαρτάται από το X??

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Το Αθόρυβο Διακριτό Κανάλι Επικοινωνίας

- **Ορισμός**

- Η χωρητικότητα C ενός διακριτού καναλιού χωρίς την επίδραση του θορύβου δίνεται από:

$$C = \lim_{T \to \infty} \frac{\log N(T)}{T}$$

όπου N (T) είναι ο αριθμός των επιτρεπτών σημάτων με διάρκεια T.

- Επιτυγχάνεται ο μέγιστος ρυθμός ροής της πληροφορίας κι αυτό διότι επιτρέπεται η χρήση όλων των δυνατών συνδυασμών των συμβόλων Sn με διάρκεια tn.
- Ο τηλέτυπος και η τηλεγραφία αποτελούν δύο απλά παραδείγματα ενός διακριτού καναλιού μετάδοσης πληροφοριών.

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Το Διακριτό Κανάλι Επικοινωνίας Με Θόρυβο

- Το θεώρημα του Shannon αναφέρει ότι η τροποποίηση στην ποσότητα του αρχικού ρυθμού πληροφορίας είναι ίση με το ποσό της πληροφορίας που λείπει από το σήμα που παραλείφθηκε στο τέρμα του καναλιού.
- Το έλλειμμα θα πρέπει να μετρηθεί από την αβεβαιότητα που έχουμε κατά την λήψη ως προς το τι είχε πραγματικά εκπεμφθεί την είσοδο.

Η Από κοινού ή «Συνδυασμένη Εντροπία» H(x,y):

$$H(x,y) = H(x) + H(y/x) = H(y) + H(x/y)$$

Προσαρμόζοντας την έννοια της εντροπίας έτσι ώστε να περιλαμβάνει την περίπτωση του καναλιού με θόρυβο, θα έχουμε εντροπίες που θα αντιπροσωπεύουν την ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων στην είσοδο του, στην έξοδό του, καθώς και στις μέσες κατά σύμβολο απώλειες πληροφορίας λόγω θορύβου.

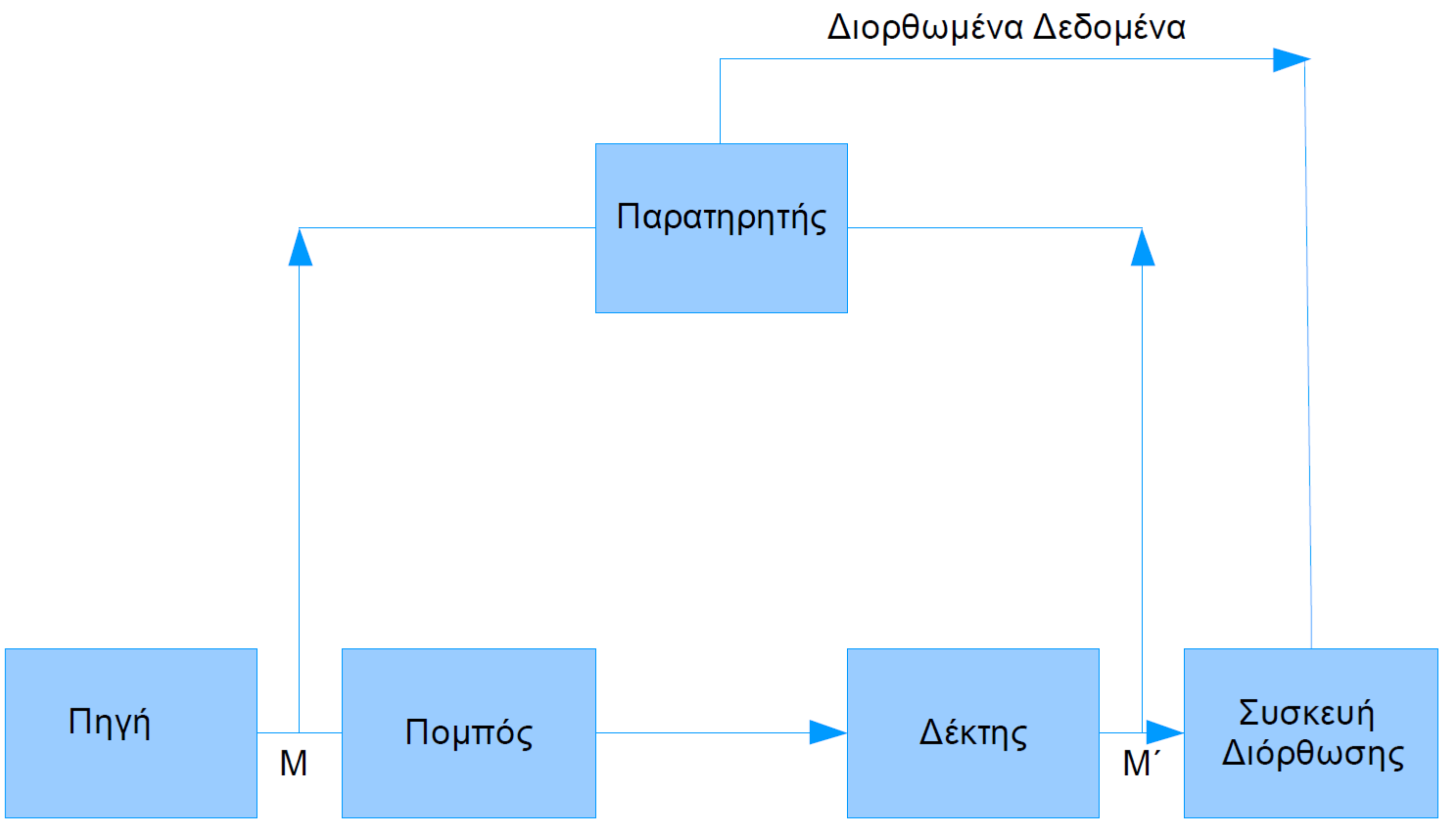
Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- Η αβεβαιότητα συμβόλου ή μηνύματος που έχει εισέλθει στο κανάλι αλλά δεν έχει ληφθεί ακόμα στην έξοδο $\rightarrow$ **H(X).**
- Μετά τη λήψη στην έξοδο, η αβεβαιότητα ενός συμβόλου ή μηνύματος που μεταδόθηκε $\rightarrow$ **H(X|Y).**
- Άρα το πληροφορικό περιεχόμενο που μεταδόθηκε $\rightarrow$ **H(X) - H(X|Y).**

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

- Ένα σύστημα που έχει υποστεί διόρθωση.



Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- Ένα **διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη Q** χαρακτηρίζεται από ένα αλφάβητο **εισόδου Ax**, και ένα αλφάβητο **εξόδου Ay**, καθώς και από μια σειρά συνδυασμένων πιθανοτήτων **P (y | x),** ένα για κάθε x є Ax.

- Αυτές οι πιθανότητες μεταφοράς εισάγονται σε μια **μήτρα μεταφοράς:**

$$Q_{j|i} = P\left(y = b_j \mid x = a_i\right)$$

- Γεμίζουμε συνήθως τη μήτρα με τις **μεταβλητές εξόδου j** που εισάγονται στις γραμμές και τις μεταβλητές εισόδου i που ταξινομούνται στις στήλες, έτσι ώστε κάθε **στήλη της Q** να είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων. Έτσι μπορούμε να επιτύχουμε την πιθανότητα των στοιχείων της εξόδου, **py**, από την πιθανότητα κατανομής των εισροών, **px** :

$$P_y = Qp_x$$

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Το Θεώρημα Κωδικοποίησης για τα διακριτά κανάλια

- **Έστω ένα διακριτό κανάλι με χωρητικότητα C και διακριτή πηγή με εντροπία H.**
  - Αν **H ≤ C**, υπάρχει σύστημα κωδικοποίησηςτέτοιο ώστε η ποσότητα της πληροφορίας να μεταδίδεται με μικρή πιθανότητα σφάλματος.
  - Αν **H > C** είναι αδύνατον να μεταδοθεί η πληροφορία **με ρυθμό μεγαλύτερο της χωρητικότητας**, ανεξαρτήτως της κωδικοποίησης που χρησιμοποιείται και χωρίς να αυξάνεται ανεξέλεγκτα ο αριθμός των σφαλμάτων.

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Με Μνήμη

- Στα κανάλια με μνήμη εκδηλώνονται, ορισμένες φορές, ξαφνικοί θόρυβοι, που επικρατούν του θορύβου Gauss
- Προκαλούν καταιγισμούς σφαλμάτων !!!
- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού με μνήμη υποθέτοντας ακολουθίες κωδικών συμβόλων στην είσοδο και στην έξοδο μήκους L, ως ακολούθως:

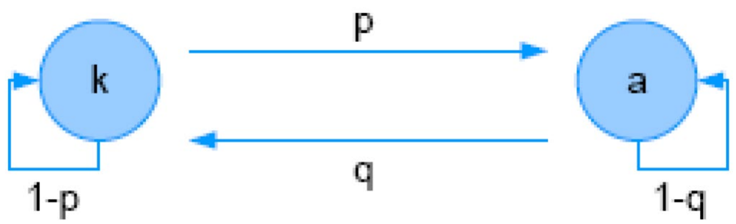
$$C = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \max_{p(x_1 .. x_L)} I(X_1 .... X_L ; Y_1 .... Y_L)$$

- Η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας προκύπτει από τη σύγκριση των κατανομών πιθανοτήτων όλων των κωδικών ακολουθιών εισόδου

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Με Μνήμη

- Για τη μελέτη τους χρησιμοποιούνται στατιστικές μεθόδους ή υποδείγματα (μοντέλα) που δημιουργούν ακολουθίες σφαλμάτων παρόμοιες με αυτές των καναλιών.
- Τέτοια είναι τα υποδείγματα τα οποία αποτελούνται από μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με συγκεκριμένο αριθμό καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.



$$p(k)+p(a)=1\,,$$

$$p(k)p+p(k)(1-p)=p(k)(1-p)+p(a)q\,,$$

$$p(a)q+p(a)(1-q)=p(a)(1-q)+p(k)p$$

$$p(k)=\frac{q}{p+q}$$

$$p(a)=\frac{p}{p+q}\,,$$

$$p_{error}=\lambda p(a)=\lambda\frac{p}{p+q}$$

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού

- Η εισροή ή η μετάδοση σημάτων θα είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου f(t) ενός συγκεκριμένου συνόλου, ενώ οι εκροές ή το λαμβανόμενο σήμα θα είναι οι διαταραγμένες εκδόσεις του.

- Οι στατιστικές του εκπεμπόμενου σήματος

$$\boxed{P\left(\chi_1, \ldots\ldots, \chi_n\right) = P\left(\chi\right).}$$

- και εκείνων του θορύβου από την υπό συνθήκη κατανομή των πιθανοτήτων

$$\boxed{P_{\chi 1}\ ,\ldots\ldots,\ _{\chi 1}\left(y_1, \ldots\ldots, Y_n\right) = P_{\chi}\left(y\right)}$$

- Ο ρυθμός μετάδοσης των πληροφοριών

$$\boxed{R = H\left(x\right) - H_y\left(x\right),}$$

όπου H (x) είναι η εντροπία της εισόδου και η Hy(x) εκφράζει την αμφιβολία της αντιστοιχίας των συμβόλων στη λήψη

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού

- Η χωρητικότητα του καναλιού C ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ή του ρυθμού μετάδοσης,
- επιτυγχάνεται με την σύνδεση όλων των πηγών της πληροφορίας στο κανάλι έχοντας λάβει υπόψη τους υφιστάμενους περιορισμούς.

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

- **Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού**

I(X;Y) = $-\int P(x)\log P(x)dx + \iint P(x,y)\log\frac{P(x,y)}{P(y)}dxdy$

Όμως ισχύει: $\boxed{\iint P(x,y)\log P(x)dxdy = \int P(x)\log P(x)dx}$

Οπότε η χωρητικότητα εκφράζεται ως εξής:

$$\boxed{C = \lim_{T\to\infty} \max_{P(x)} \frac{1}{T}\iint P(x,y)\log\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}dxdy}$$

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

Χωρητικότητα Συνεχούς Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- **Ορισμός:** Εάν το σήμα και ο θόρυβος είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το λαμβανόμενο σήμα είναι το άθροισμα του εκπεμπόμενου σήματος και του θορύβου,
- ο ρυθμός μετάδοσης είναι $\boxed{R = H(y) - H(n)}$
- Η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι: $\boxed{C = \underset{P(x)}{Max}\, H(y) - H(n)}$

*Δεδομένου ότι **H(n)** είναι ανεξάρτητη από **P(x)**, μεγιστοποιώντας το **R** απαιτείται η μέγιστη δυνατή **H(y)**, η εντροπία του λαμβανόμενου σήματος.*

$$R = H(x) - H_y(x) = H(y) - H(n)$$

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

- Η περίπτωση Γκαουσιανού Λευκού Θορύβου
  - Η εντροπία (ανά δευτερόλεπτο) των λαμβανόμενων στοιχείων

$$H(y) = W \log 2\pi e(P + N)$$

  - Και η εντροπία του θορύβου είναι:

$$H(n) = W \log 2\pi eN$$

  - Η χωρητικότητα του καναλιού είναι:

$$C = H(y) - H(n) = W \log \frac{P + N}{N}$$

Συνεχή Κανάλια Επικοινωνίας

- **Η περίπτωση Γκαουσιανού Λευκού Θορύβου**

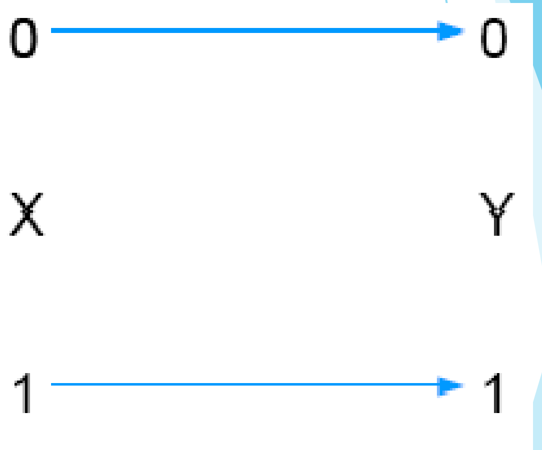
- **Ορισμός :** Η χωρητικότητα του καναλιού με εύρος ζώνης W που επηρεάζεται από λευκό θόρυβο ισχύς N, όταν η μέση ισχύς του πομπού περιορίζεται σε P δίνεται από τον τύπο :

$$\boxed{C = W \log \frac{P+N}{N}}$$

Παραδείγματα Χωρητικότητας Καναλιού

Αθόρυβο Δυαδικό Κανάλι

- Στην περίπτωση αυτή, κάθε bit έχει μεταδοθεί χωρίς λάθος.
- Ως εκ τούτου, ένα bit που δεν εμφανίζει σφάλμα μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού, με την χωρητικότητα του να είναι 1bit.



$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(Y) = \log 2 = 1bit$$

- **I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)**
- Όπου **H(X|Y)=H(Y|X)=0** με p(xi|yj)=0 ή 1

Παραδείγματα Χωρητικότητας Καναλιού

- **Θορυβώδες Κανάλι Με Μη Επικαλυπτόμενες Εξόδους**
  - Έχει δύο πιθανά αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις δύο εισόδους. Το κανάλι φαίνεται να είναι θορυβώδης, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.
  - Η χωρητικότητα του καναλιού είναι 1 bit ανά μετάδοση. Μπορεί επίσης να υπολογιστεί η χωρητικότητα,

  C = max I(X:Y) = 1 bit, με τη χρήση του p(x)=(1/2,1/2).

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(X)$$