

1. Θεωρούμε τους ακόλουθους κώδικες:

	I	II	III	IV	V	VI
$a$	1	000	1	0	10	010
$B$	00	011	10	10	010	101
$\gamma$	01	110	110	110	0110	011
$\delta$	10	101	1110	1110	01110	101

Ζητείται να εξετάσετε εάν οι κώδικες I, II, III, IV, V και VI είναι:

- Ευκρινείς κώδικες (μη ιδιάζοντες - non-singular)
- Μονοσήμαντοι κώδικες (μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι - uniquely decodable)
- Στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμοι κώδικες (άμεσοι - instantaneous code)
- Προθεματικοί κώδικες

Να τεκμηριώσετε τις απαντήσεις σας – με παραδείγματα αν απαιτείται.

---

---

Ζητούνται οι ρυθμοί πληροφορίας των κωδίκων, οι αποστάσεις Hamming και η δυνατότητα ανίχνευσης/διόρθωσης σφαλμάτων με βάση την απόσταση, για τους ακόλουθους κώδικες:

$$C_1 = \{00, 10, 01, 11\}$$

$$C_2 = \{000, 011, 110, 101\}$$

$$C_3 = \{000000, 001110, 110001, 101011\}$$

$$C_4 = \{000000, 111111\}$$

$$C_5 = \{000000, 111110, 010101\}$$

---

---

Επιθυμούμε να μεταδώσουμε το μήνυμα

1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1

με κώδικα Hamming. Πόσο θα είναι το μέγεθος του κωδικοποιημένου μηνύματος για το συγκεκριμένο μήνυμα? Ποιο θα είναι το τελικό μήνυμα που θα αποσταλεί? Δώστε περιγραφή των βημάτων που ακολουθούνται.

Το λαμβανόμενο σήμα στον δέκτη είναι το ίδιο με τον πομπό – αλλά στην θέση του 3<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> bit υπάρχει 1 (ανεξάρτητα με το τι υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα). Υπάρχει λάθος? Εφαρμόστε τη διαδικασία αποκωδικοποίησης για την ανίχνευση και πιθανή διόρθωση.

Θεωρήστε ότι στο λαμβανόμενο σήμα του προηγούμενου βήματος, στη θέση του 3<sup>ου</sup> bit υπάρχει 0. Επαναλάβετε τη διαδικασία και σχολιάστε.

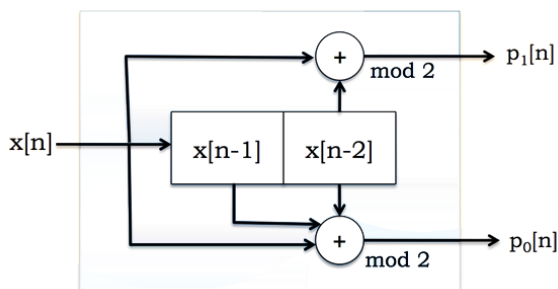
---

---

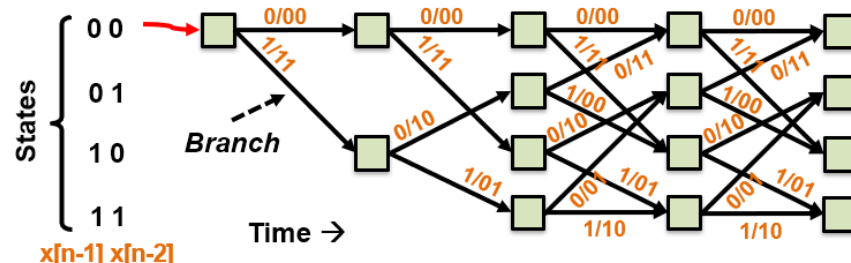
Χρησιμοποιώντας τον συνελκτικό κωδικοποιητή του σχήματος, υπολογίστε την έξοδο του αν δοθεί το μήνυμα (αρχική κατάσταση 00) :

$$[x[0] \ x[1] \ x[2] \ x[3]] = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Στη συνέχεια σας δίνεται το διάγραμμα Trellis συμπληρωμένο για να εφαρμόσετε την αποκωδικοποίηση και να αποφασίσετε ποιο είναι το εκπεμπόμενο σήμα αν η ακολουθία που λάβαμε είναι: 1 1 10 1 1 10



Trellis:



Δίδεται μια διακριτή πηγή με έξι στάθμες A, B, C, D, E, F και πιθανότητες εμφάνισης αυτών  $P_A = 12,5\%$ ,  $P_B = 50\%$ ,  $P_C = 25\%$ ,  $P_D = 3,125\%$ ,  $P_E = 6,25\%$ ,  $P_F = 3,125\%$ .

- Να υπολογίσετε την Εντροπία και τον Πλεονασμό της πηγής
- Να σχεδιάσετε έναν δυαδικό κώδικα με τον αλγόριθμο Shannon
- Να σχεδιάσετε έναν δυαδικό κώδικα με τον αλγόριθμο Shannon-Fano,
- Να σχεδιάσετε έναν δυαδικό κώδικα με τον αλγόριθμο Huffman.
- Να υπολογίσετε την απόδοση κάθε κώδικα και να επιλέξετε τον περισσότερο και λιγότερο αποδοτικό κώδικα
- Εάν η πηγή εκπέμπει 150 σύμβολα το δευτερόλεπτο ποιος είναι ο ρυθμός πληροφορίας για κάθε κωδικοποίηση και ποιες οι ανάγκες σε χωρητικότητα καναλιού κάθε φορά.

Έστω μια δυαδική πηγή (0,1) με πιθανότητες εμφάνισης κάθε συμβόλου  $1/2$  και ρυθμό μετάδοσης  $r = 2500$  σύμβολα/sec.

- Υπολογίστε την εντροπία της πηγής
- Εάν τα δεδομένα της πηγής διέρχονται από ένα δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο, ποια θα πρέπει είναι η χωρητικότητα αυτού του καναλιού
- Εάν το κανάλι από το οποίο διέρχονται τα δεδομένα επηρεάζεται από θόρυβο με πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος  $p_e = 0,05$ , ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού παρουσία θορύβου και ποιος είναι ο ρυθμός παροχής πληροφορίας στην έξοδο του καναλιού;
- Τι αποτέλεσμα έχει η παρουσία του θορύβου στο κανάλι

Γνώστης των αρχών και νόμων της Θ. Πληροφορίας, σχεδίασε κώδικα πηγής για την μετάδοση των αποτελεσμάτων των Chicago Bulls, ως εξής:

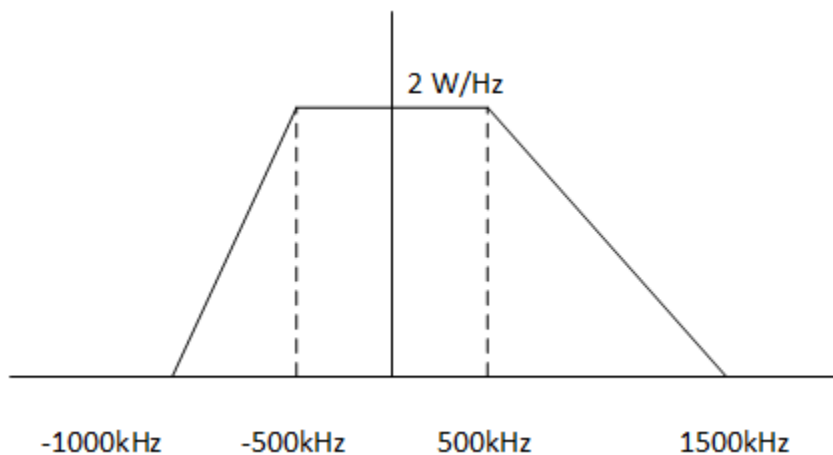
- Νίκη εντός έδρας: 110
- Ήττα εντός έδρας: 10
- Νίκη εκτός έδρας: 1110
- Ήττα εκτός έδρας: 0

Οι φίλαθλοι του Σικάγο είναι κατά μέσο όρο χαρούμενοι ή λυπημένοι και γιατί?

Τα τελευταία αποτελέσματα της ομάδας είναι: (Ήττα εντός) (Νίκη εκτός). Προσθέστε ένα bit άρτια ισοτιμίας ανά 3 bit. Πόσα bit θα σταλούν? Ποια?

---

Σήμα έχει την εικονιζόμενη φασματική πυκνότητα ισχύος.



Ποια η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με βάση το θεώρημα του Nyquist?. Υπάρχει μετασχηματισμός που μπορεί να μειώσει την απαιτούμενη συχνότητα δειγματοληψίας?

Για το παραπάνω σήμα, το σήμα είναι πραγματικό ή μιγαδικό και γιατί? Αν η παράμετρος  $\eta$  του θορύβου έχει τιμή 0.4 W/Hz, ποια η χωρητικότητα του διαύλου και ποιος ο σηματοθορυβικός λόγος (σε dB)?

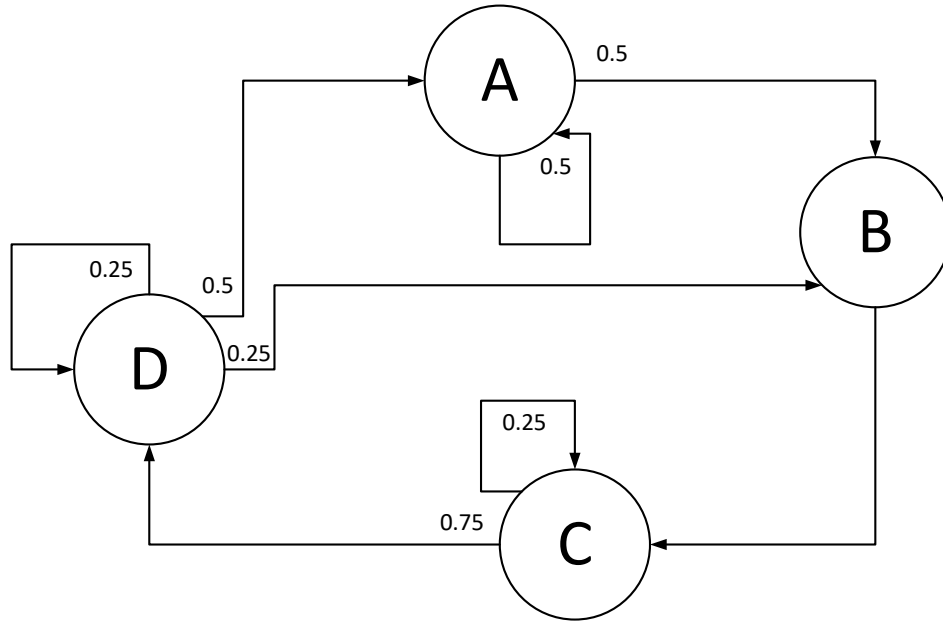
---

Παραλλαγή του παραπάνω:

Θεωρούμε Λευκό Προσθετικό Gaussian Θόρυβο με παράμετρο  $\eta$ . Ποια είναι η χωρητικότητα του διαύλου συναρτήσει του  $\eta$ ?

Επιθυμώ να μεταδώσω με ρυθμό  $R=9\text{Mbps}$ . Ποιος ο ελάχιστος σηματοθορυβικός λόγος που θα μου το επιτρέψει αυτό σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon? Αν το SNR είναι 18dB, μπορεί να υποστηριχθεί ρυθμός 12kbps?

Έχουμε πηγή πληροφορίας με μνήμη 1<sup>ης</sup> τάξης (πηγή στην οποία η εκπομπή ενός σύμβολο εξαρτάται από το προηγούμενο σύμβολο που εκπέμφθηκε). Δίνεται το διάγραμμα καταστάσεων. Συμπληρώστε τον πίνακα μεταπτώσεων της πηγής.



Μια διακριτή πηγή με μνήμη παράγει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης. Το αλφάβητο της πηγής αποτελείται από τα σύμβολα  $\varphi$ ,  $\chi$  και  $\psi$ . Ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} P(\varphi/\varphi) & P(\varphi/\chi) & P(\varphi/\psi) \\ P(\chi/\varphi) & P(\chi/\chi) & P(\chi/\psi) \\ P(\psi/\varphi) & P(\psi/\chi) & P(\psi/\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν:

- 1) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων της πηγής  $\varphi$ ,  $\chi$  και  $\psi$ .
- 2) Οι συνδυασμένες πιθανότητες εκπομπής μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα.

3) Να σχηματιστούν κωδικές λέξεις με το δυαδικό κωδικό αλφάβητο για τα δυνατά μηνύματα δύο συμβόλων σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano.

(Σημ. Αν και η άσκηση λύθηκε και στη διάλεξη, η λύση μπορεί να βρεθεί στο Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίηση (eclass) σελ. 76)

---

---

**BONUS:**

Η πηγή εισόδου σε ένα κανάλι είναι μία τυχαία μεταβλητή  $X$  με τιμές τα σύμβολα:  $a, b, c, d$ . Η έξοδος αυτού του καναλιού είναι μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  με τιμές τα ίδια σύμβολα. Η από κοινού κατανομή αυτών των δύο τυχαίων μεταβλητών περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα:

	$x=a$	$x=b$	$x=c$	$x=d$
$y=a$	$1/8$	$1/16$	$1/16$	$1/4$
$y=b$	$1/16$	$1/8$	$1/16$	$0$
$y=c$	$1/32$	$1/32$	$1/16$	$0$
$y=d$	$1/32$	$1/32$	$1/16$	$0$

Να υπολογιστεί η εντροπία. Στη συνέχεια να βρεθεί η από κοινού εντροπία και η υπό συνθήκη εντροπία. Βρείτε επίσης την αμοιβαία πληροφορία και ένα κάτω φράγμα της χωρητικότητας του καναλιού σε bits.  $H(X), H(Y), H(X, Y), H(Y|X), I(X, Y)$ .

(Σημ. Απλή εφαρμογή των τύπων)

---

---

**BONUS:**

Έστω μια δυαδική πηγή  $(0,1)$  με πιθανότητες εμφάνισης συμβόλων  $1/3$  και  $2/3$  αντίστοιχα και ρυθμό μετάδοσης  $r = 1000$  σύμβολα/sec.

Υπολογίστε την εντροπία της πηγής

Εάν το κανάλι από το οποίο διέρχονται τα δεδομένα επηρεάζεται από θόρυβο με πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος  $p_e = 0,02$ , ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού παρουσία θορύβου και ποιος είναι ο ρυθμός παροχής πληροφορίας στην έξοδο του καναλιού;

(Σημ. Μοιάζει πολύ με προηγούμενη άσκηση μόνο που τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα. Αυτό έχει μια μόνο διαφορά:

- Ο ρυθμός παροχής πληροφορίας υπολογίζεται από την εντροπία της πηγής.
- Όμως η χωρητικότητα σύμφωνα με τον ορισμό της είναι η MAX εντροπία – που προκύπτει ΟΤΑΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ τα σύμβολα. Οπότε για τον υπολογισμό της χωρητικότητας, θα πρέπει να υπολογιστούν οι εντροπίες  $H(Y)$ ,  $H(Y/X)$  για ισοπίθανα!