Γραμμικά Συστήματα

Γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \quad a_{ij} \text{ συντελεστές}, \; b_i \text{ δεξιά μέλη}$$

$$\Leftrightarrow Ax=b, \quad A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Γενικότερα, ορίζονται και $m\times n$ πίνακες. $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ή $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Το παραπάνω σύστημα έχει μία ακριβώς λύση $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow Ax=0$ έχει μοναδική λύση $x=0 \Leftrightarrow$ οι στήλες ή οι γραμμές του A γρ. ανεξ.

Υπενθυμίζουμε τους τριγωνικούς κάτω πίνακες με $a_{ij}=0$ για $i<j$ $\begin{pmatrix} a_{11} & & \Phi \\ & a_{22} & \\ a_{n1} & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$ και τους τριγωνικούς άνω με $a_{ij}=0$, $i>j$ $\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{22} & \\ \Phi & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix}$

Κάτω Hessenberg όταν $a_{ij}=0$, $j-i>1$ και άνω Hessenberg όταν $a_{ij}=0$, $i-j>1$.
Επίσης τους τριδιαγώνιους με $a_{ij}=0$ για $|i-j|>1$ και τους πενταδιαγώνιους για $|i-j|>2$.

Συμμετρικός πίνακας $A^T=A$, $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, αντισυμμετρικός $A^T=-A$, $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$
Ερμιτιανός $A^+=(A^*)^T=A$, $A\in M_{N\times N}(\mathbb{C})$

Αντιμεταθετικοί πίνακες A,B όταν $AB=BA$

Αν για τον τετραγωνικό πίνακα A, υπάρχουν οι X,Y ώστε $XA\equiv I=AY$ τότε $X=Y\equiv A^{-1}$ μοναδικό
Αν $\exists A^{-1}$ τότε $AX=b \Rightarrow X=A^{-1}b$, ωστόσο η εύρεση του αντιστρόφου απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο από άλλες μεθόδους (μέθοδος Gauss) →

Βαθμός (rank) πίνακα είναι το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του ή το πλήθος των μη-μηδενικών ιδιοτιμών του.
- A μη αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists \lambda=0$; $\lambda\neq 0, \forall\lambda \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.

Ο συμμετρικός πίνακας A λέγεται θετικά (αρνητικά) ορισμένος αν $x^TAx>0$ $(x^TAx<0)$, $\forall x\neq 0$ και θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος αν $x^TAx\geq 0$ $(x^TAx\leq 0)$

→ Για να υπολογίσουμε το A^{-1} λύνουμε τα n γραμμικά συστήματα $Au^i = e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, οπότε $A(u^1, \dots, u^n) = (Au^1, \dots, Au^n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = (u^1, \dots, u^n)$. Ενώ αντίστροφα το αρχικό σύστημα $AX=b$ απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος.

π.χ. I θετικά ορισμένος διότι $x^T I x = x^T x = x_1^2 + x_2^2 > 0$ $\longrightarrow$

Κάθε θετικά ορισμένος πίνακας είναι αντιστρέψιμος διότι αν δεν ήταν αντιστρέψιμος τότε θα υπήρχε $x \neq 0$ με $Ax = 0$ $\Rightarrow x^T A x = 0$ άτοπο, άρα A αντιστρέψιμη. Επίσης $a_{ii} > 0$ διότι αν $x = e^i \Rightarrow x^T A x = a_{ii} > 0$.

Ο τετραγωνικός πίνακας A λέμε ότι έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές αν $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

και κατά στήλη αν $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|$. Τότε A αντιστρέψιμος και $a_{ii} \neq 0, \forall i$ $\longrightarrow$

A, B όμοιοι αν $\exists\, S$ αντιστρέψιμη με $A = S^{-1} B S$ (σχέση ομοιότητας).

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ο $S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ έχει $SA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow SA = BS \Rightarrow A, B$ όμοιοι

Ο $A \in M_{n \times n}$ λέγεται αραιός (σποραδικός) αν το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του είναι $O(n)$ και πυκνός (αποθηκευτικός) αν είναι $O(n^2)$ (απαιτεί γενικά τόσο χωρητικότητα για την αποθήκευση του όσο τα στοιχεία του). Το αν είναι αραιός ή πυκνός ένας πίνακας παίζει ρόλο στην ταχύτητα των μεθόδων για την αριθμητική επίλυση του $AX = b$.

μεγάλο Ο του Landau

$O(g(n)) = \{ f(n) : \exists\, c, n_0 > 0$ με $0 \leq f(n) \leq c\, g(n),\ \forall n \geq n_0 \}$

Κανόνας Cramer. Αν $A = (a^1, \dots, a^n)$, $A_i = (a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)$ τότε $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$

Πάλι ο κανόνας Cramer είναι ασύμφορος (σε σχέση με του Gauss) γιατί απαιτεί τον υπολογισμό $n+1$ οριζουσών, άρα $(n+1)\, n!\, (n-1)$ ← πολ/σμοί για κάθε όρο $= (n-1)(n+1)!$ πολ/σμοί (π.χ. $n = 20 \Rightarrow 307000$ αιώνες αν ο υπολογιστής ~~υπολογίζει~~ εκτελεί 10^6 πολ/σμούς/sec)

Φάσμα λέγεται το σύνολο των ιδιοτιμών του A, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Φασματική ακτίνα λέγεται η απολύτως μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\rho(A) = \max |\lambda_i|$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + i\sqrt{3},\ \lambda_3 = 1 - i\sqrt{3}$

$\rho(A) = \max\{ |1|, |1 + \sqrt{3} i|, |1 - \sqrt{3} i| \} = \max\{1, 2, 2\} = 2$

→ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ θετικά ορισμένος

Είναι $A^T = A$ και $\forall x \in \mathbb{R}^3$ \ {0} είναι

$x^T A x = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} =$

$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$

$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$

→ Αν ο A ένα αυστηρά διαγώνια κυριαρχικός κατά γραμμές τότε $|A| \neq 0$.

Πράγματι, έστω $|A| = 0$. Τότε $\exists$ ιδιοτιμή $\lambda = 0$ με $Ax = 0$. Έστω x_ℓ η απολύτως μεγαλύτερη συνιστώσα του x, τότε $|x_\ell| > |x_j|, \forall j \neq \ell \Rightarrow \frac{|x_j|}{|x_\ell|} < 1, \forall j \neq \ell$

Αφού $Ax = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \forall i$, άρα για $i = \ell$ είναι $\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} x_j = 0 \Rightarrow$

$a_{\ell 1} x_1 + a_{\ell 2} x_2 + \dots + a_{\ell \ell} x_\ell + \dots + a_{\ell n} x_n = 0 \Rightarrow$

$a_{\ell\ell} = -\left(a_{\ell 1} \frac{x_1}{x_\ell} + a_{\ell 2} \frac{x_2}{x_\ell} + \dots + a_{\ell n} \frac{x_n}{x_\ell}\right) \Rightarrow$

$|a_{\ell\ell}| \leq |a_{\ell 1}| \left|\frac{x_1}{x_\ell}\right| + |a_{\ell 2}| \left|\frac{x_2}{x_\ell}\right| + \dots + |a_{\ell n}| \left|\frac{x_n}{x_\ell}\right| < |a_{\ell 1}| + |a_{\ell 2}| + \dots + |a_{\ell n}|$,

άτοπο αφού ισχύει η κυριαρχία. Τελικά $|A| \neq 0$.

Άμεσες μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων: Δίνουν τη λύση αφού θέσουμε κάθε σχέσεις που προκύπτουν από ένα σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό, δηλ. η λύση βρίσκεται με χρήση ακριβούς αριθμητικής μετά από πεπερασμένο πλήθος πράξεων.

Έμμεσες ή επαναληπτικές μέθοδοι: Δίνουν τη λύση έμμεσα, δηλ. σταδιακά από επαναληπτικές διαδικασίες. Άρα ξεκινάμε από ένα αρχικό διάνυσμα προσέγγισης της λύσης, κατασκευάζουμε μία ακολουθία διανυσμάτων που συγκλίνει στην ακριβή λύση. (συνήθως χρησιμοποιούνται για μεγάλου αρχικού πίνακες).

Μέθοδος απαλοιφής Gauss

π.χ.

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=26\\ 2x_1+3x_2+x_3&=34\\ 3x_1+2x_2+x_3&=42\end{aligned}\right\}\begin{matrix}E_2\to E_2-2E_1\\ E_3\to E_3-3E_1\end{matrix}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=26\\ -x_2-5x_3&=-18\\ 4x_2+8x_3&=36\end{aligned}\right\} E_3\to E_3+4E_2 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=26\\ -x_2-5x_3&=-18\\ -12x_3&=-36\end{aligned}\right\} \text{ Διαδικασία άνω τριγωνοποίησης}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1&=11\\ x_2&=3\\ x_3&=3\end{aligned}\right\} \text{ Διαδικασία προς τα πίσω - αντικατάστασης (ή οπισθοδρόμησης)}$$

Γενικά, πολλ/ζουμε τα μέλη της εξίσωσης E_1 με $-m_{21}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \dots, -m_{n1}=-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ και προσθέτουμε τις εξισώσεις στις $E_2, \dots, E_n$. Έτσι απαλείφεται το x_1 από τις $E_2, \dots, E_n$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{22}^{(1)}x_2+\dots+a_{2n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)}\\ &\vdots\\ a_{n2}^{(1)}x_2+\dots+a_{nn}^{(1)}x_n&=b_n^{(1)}\end{aligned}$$

Εν συνεχεία πολ/με τα μέλη της E_2 με $-m_{32}=-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, -m_{n2}=-\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ και προσθέτουμε ~~τις~~ εξισώσεις στις $E_3, \dots, E_n$. Συνεχίζοντας προκύπτει

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{22}^{(1)}x_2+\dots+a_{2n}^{(1)}x_n&=b_2^{(1)}\\ &\ddots\\ a_{nn}^{(n-1)}x_n&=b_n^{(n-1)}\end{aligned}$$

Αν προκύψει οδηγό μηδέν, κάνουμε εναλλαγή γραμμών.
Μπορεί να γραφεί και αλγόριθμος.

Στο k βήμα της διαδικασίας $(k=1,\dots,n-1)$ απαιτούνται $n-k$ διαιρέσεις για να φτιαχτούν οι διάφοροι πολ/στές. ~~Αυτούς~~ καθένας από τους πολ/ζουμε με $n-k+1$ στοιχεία και κάναμε αντίστοιχα $(n-k)(n-k+1)$ προσθέσεις. Άρα συνολικά πολ/σμοί − διαιρέσεις: $\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)+(n-k)(n-k+1)] = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} n(n+2) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 2(n+1)\frac{(n-1)n}{2} + n(n+2)(n-1) = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

Προσθέσεις − αφαιρέσεις: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \frac{n^3-n}{6}$

(Είναι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

Για την προς τα πίσω-αντικατάσταση απαιτείται για το k βήμα $(k=1,\dots,n-1)$ μία διαίρεση για το x_{n-k+1} και ενσυνεχεία $n-k$ πολλαπλ/μοί. Ενσυνέχεια χρειάζονται $n-k$ αφαιρέσεις. Τέλος θέλει και μία διαίρεση. ~~μία αρχική διαίρεση για το x_n και ενσυνεχεία στο βήμα k $(k=1,\dots,n-1)$ χρειάζονται $n-k$ πολ/σμοί, $n-k$ αφαιρέσεις και τέλος μία διαίρεση~~, Άρα συνολικά

πολ/σμοί − διαιρέσεις: $1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1) = \frac{n^2+n}{2}$

προσθέσεις − αφαιρέσεις: $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \frac{n^2-n}{2}$

Συνολικοί πολ/σμοί − διαιρέσεις: $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6} + \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3+3n^2-n}{3} = \Theta(\frac{n^3}{3})$

Συνολικές προσθέσεις − αφαιρέσεις: $\frac{n^3-n}{6} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^3+3n^2-5n}{6} = \Theta(\frac{n^3}{3})$

π.χ. για ένα σύστημα 20 εξισώσεων με 20 αγνώστους, $n=20$, γίνονται $2\cdot\frac{(2\cdot 10^1)^3}{3} = \frac{16}{3}10^3$ πράξεις και αν ο υπολογιστής εκτελεί 10^6 πράξεις/sec τότε χρειάζονται $\frac{16}{3}10^3/10^6$ sec $= \frac{16}{3}10^{-3}$ sec

Για το σχήμα Cramer χρειαζόμαστε 21 ορίζουσες. Η καθεμία είναι ένα άθροισμα 20! όρων, ο κάθε όρος έχει 20 παράγοντες, άρα 19 πολ/σμούς. Άρα συνολικά $21\cdot 20!\cdot 19$, άρα 300000 αιώνες

Σημειωτέον ότι πέραν των n^2 συντελεστών και των n σταθερών ο αλγόριθμος Gauss δεν απαιτεί περαιτέρω μνήμη διότι οι διάφοροι πολ/στές αποθηκεύονται στις θέσεις των μηδενικών κάτω αριστερά, τέλος οι συντελεστές αποθηκεύονται στις θέσεις των παλιών συντελεστών και το ίδιο για τις σταθερές.

π.χ. επίλυση ομογενούς συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Επαυξημένος πίνακας $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{r_3 \to r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 \to r_2 - r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{r_3 \to r_3 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= -\frac{x_3}{2} \\ x_2 &= -\frac{x_3}{2} \end{aligned} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) x_3$$

π.χ. υπολογισμός ορίζουσας $\det A = (-1)^{\lambda} \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$, λ = πλήθος εναλλαγών γραμμών ή στηλών

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1.5) \cdot 1 = 6$$

Αν έχουμε να λύσουμε πολλά συστήματα $A x^{(j)} = b^{(j)}$ με τον ίδιο πίνακα συντελεστών A, τότε φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\overline{A} = (A \,\vdots\, b^{(1)} \dots b^{(k)}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1^{(1)} & \dots & b_1^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n^{(1)} & \dots & b_k^{(k)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b_1'^{(1)} & \dots & b_1'^{(k)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & a'_{nn} & b_n'^{(1)} & \dots & b_n'^{(k)} \end{array}\right)$$

απ' όπου βρίσκουμε τα $x^{(j)}$.

Οι συνολικοί πολ/σμοί-διαιρέσεις (σε σύγκριση με το $k=1$) είναι $\frac{1}{3}n^3 + kn^2 - \frac{1}{3}n$ και οι συνολικές προσθέσεις-αφαιρέσεις (ανάλογα σύγκριση) είναι $\frac{1}{3}n^3 + \left(k - \frac{1}{2}\right)n^2 - \left(k - \frac{1}{6}\right)n$ άρα για $n \gg 1$, είναι $\Theta\left(\frac{n^3}{3}\right)$.

Μέθοδος Gauss-Jordan

π.χ. $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=9 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+y+z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3-3E_1 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2z=9 \\ y+z=5 \\ 2y+5z=19 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_1\to E_1-E_2 \\ E_3\to E_3-2E_2 \end{array} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x+z=4 \\ y+z=5 \\ 3z=9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=4 \\ y+z=5 \\ z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_1\to E_1-E_3 \\ E_2\to E_2-E_3 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}\right\}$

δηλαδή απαλοίφουμε τον άγνωστο, όχι μόνο από κάτω, αλλά και από πάνω.

π.χ. $\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+4x_3=11 \\ x_1+4x_2-x_3=9 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=9 \end{array}\right\}$

Επαυξημένος $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 9 \end{array}\right) \underset{r_3\to r_3-2r_1}{\overset{r_2\to r_2-r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right) \overset{r_1\to r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right)$

$\underset{r_2\to r_2-\frac{6}{13}r_3}{\overset{r_1\to r_1+\frac{10}{13}r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right) \Leftrightarrow x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1$

Το συνολικό πλήθος πολλαπλασιασμών - διαιρέσεων είναι $\frac{1}{2}n^3+n^2-\frac{1}{2}n$, ενώ το συνολικό πλήθος προσθέσεων - αφαιρέσεων είναι $\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n$, άρα για $n>>1$, είναι $\Theta(\frac{n^3}{2})$, άρα λιγότερο αποτελεσματική από τη μέθοδο Gauss με $\Theta(\frac{n^3}{3})$.

Αν έχουμε να λύσουμε πολλά συστήματα $Ax^{(j)} = b^{(j)}$ με τον ίδιο πίνακα συντελεστών A, τότε φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\tilde{A} = (A \mid b^{(1)} \dots b^{(k)}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1^{(1)} & \dots & b_1^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n^{(1)} & \dots & b_n^{(k)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b_1'^{(1)} & \dots & b_1'^{(k)} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & a'_{nn} & b_n'^{(1)} & \dots & b_n'^{(k)} \end{array}\right) = \tilde{A}',$$

απ' όπου βρίσκουμε το $x^{(j)}$.

Οι συνολικοί πολ/σμοί-διαιρέσεις είναι $\frac{1}{3}n^3 + kn^2 - \frac{1}{3}n$ και οι συνολικές προσθέσεις-αφαιρέσεις $\frac{1}{3}n^3 + (k-\frac{1}{2})n^2 - (k-\frac{1}{6})n$ (σε συμφωνία με το $k=1$), άρα για $n \gg k$ είναι $\Theta(\frac{n^3}{3})$.

Αν αντί την απαλοιφή Gauss εφαρμόσουμε τη Gauss-Jordan, τότε

$$\tilde{A} \sim \tilde{A}'' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b_1''^{(1)} & \dots & b_1''^{(k)} \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & b_n''^{(1)} & \dots & b_n''^{(k)} \end{array}\right) \Rightarrow x^{(j)} = b''^{(j)} = \begin{pmatrix} b_1''^{(j)} \\ \vdots \\ b_n''^{(j)} \end{pmatrix}$$

Οι συνολικοί πολ/σμοί-διαιρέσεις είναι $\frac{1}{2}n^3 + kn^2 - \frac{1}{2}n$

προσθέσεις-αφαιρέσεις $\frac{1}{2}n^3 + (k-1)n^2 - (k-\frac{1}{2})n$

$\xrightarrow{n \gg k \gg 1} \Theta(\frac{n^3}{2})$

Εύρεση αντιστρόφου πίνακα $AX = I \Leftrightarrow A(x^{(1)} \dots x^{(n)}) = (e^{(1)} \dots e^{(n)}) \Leftrightarrow Ax^{(j)} = e^{(j)}$

ή αλλιώς $AX = I \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{k(j)} = \delta_{i(j)} \Leftrightarrow Ax^{(j)} = e^{(j)}$

Άρα έχουμε πολλά συστήματα με σταθερούς όρους τα $e^{(j)}$. Άρα εφαρμόζοντας το Gauss-Jordan για τον επαυξημένο πίνακα $\tilde{A} = (A \mid I) \sim \tilde{A}''$, βρίσκουμε τις στήλες $x^{(j)}$ του αντιστρόφου, δηλ. ακριβώς ο πίνακας που εμφανίζεται είναι ο αντίστροφος.

Παρατηρούμε ότι δε συμφέρει ο τύπος $x = A^{-1}b$ για τη λύση του συστήματος $Ax = b$, γιατί η εύρεση του A^{-1} απαιτεί την επίλυση n γραμμικών συστημάτων ενώ αρκεί να λύσουμε μόνο ένα.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$ (μέσω Gauss-Jordan)

$$\tilde{A} = (A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{r_2 \to r_2 - \frac{2}{3}r_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/6 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \overset{\cancel{r_1 \to r_1 + 6r_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \end{array}\right) \overset{r_1 \to r_1 + r_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

π.χ. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$ (μέσω Gauss)

$$\tilde{A}=(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Άρα $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ldots$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

Οδήγηση (απαλοιφή Gauss με οδήγηση): Αν κατά την απαλοιφή κάνουμε στρογγυλοποιήσεις, τότε για να είμαστε σίγουροι ότι η συσσώρευση των σφαλμάτων στρογγυλοποίησης δεν είναι μεγάλη, πρέπει να κάνουμε οδήγηση.

π.χ. $\left.\begin{aligned} 10^{-6}x_1+x_2&=0.6 \\ x_1+x_2&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x_1=0.4000004,\ x_2=0.5999996$

Με Gauss με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων $\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 10^{-6}x_1+x_2&=0.6 \\ (1-10^6)x_2&=1-0.6\times10^6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 10^{-6}x_1+x_2&=0.6 \\ -1.0000\times10^6x_2&=-6.0000\times10^5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{aligned} x_1&=10^6(0.6-x_2)=0 \\ x_2&=6.0000\times10^{-1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=0.6$ που είναι πολύ λάθος λύση.

Επειδή ο οδηγός 10^{-6} είναι πολύ μικρός, ο πολλαπλασιαστής 10^6 είναι πολύ μεγάλος και εξαφανίζει την πληροφορία του μικρού συντελεστή 1.

Στην μερική οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές) στο κάθε στάδιο k της τριγωνοποίησης (όπου απαλείφεται το x_k) επιλέγουμε από την $A^{(k)}$ υποστήλη τον μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή συντελεστή και με εναλλαγή γραμμών τον φέρνουμε στη θέση του οδηγού. Έτσι ο πολλαπλασιαστής είναι απόλυτα <1 και ο κατά το δυνατόν μικρότερος.

π.χ. $\left.\begin{aligned} x-2y-3z&=10 \\ 5x+6y-z&=2 \\ x-y-z&=6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 5x+6y-z&=2 \\ x-2y-3z&=10 \\ x-y-z&=6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \ldots\ldots$

Στο προηγούμενο παράδειγμα $\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=1 \\ 10^{-6}x_1+x_2&=0.6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1+x_2&=1 \\ (1-10^{-6})x_2&=0.6-10^{-6} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=1 \\ 1.0000x_2&=-0.60000 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1&=1-x_2=1-0.60000=0.40000 \\ x_2&=0.60000 \end{aligned}$$

που είναι πολύ κοντά στην ακριβή λύση. Εδώ προσθέσαμε μικρές ποσότητες και οι πληροφορίες των συντελεστών δεν χάνονται.

(ή ολική ή οδήγηση κατά γραμμές και στήλες)

Πλήρης οδήγηση είναι όταν σε κάθε στάδιο επιλέγω τον μεγαλύτερο συντελεστή από όλο τον αντίστοιχο τετράγωνο υποπίνακα με εναλλαγή γραμμών και στηλών. Είναι καλύτερη της μερικής οδήγησης και είναι ευσταθής.

π.χ. $\left.\begin{aligned} x-2y-3z&=10 \\ 5x+6y-z&=2 \\ x-y-z&=6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 6y+5x-z&=2 \\ -2y+x-3z&=10 \\ -y+x-z&=6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 6y+5x-z&=2 \\ 8x-10z&=32 \\ 11x-7z&=38 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 6y+5x-z&=2 \\ 11x-7z&=38 \\ 8x-10z&=32 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 6y+5x-z&=2 \\ 11x-7z&=38 \\ -9z&=8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y&=-\frac{20}{9}=-2.22\ldots \\ x&=\frac{26}{9}=2.88\ldots \\ z&=-\frac{8}{9}=-0.88\ldots \end{aligned}$$

Η πλήρης οδήγηση απαιτεί αριθμό πράξεων της τάξης $\Theta(n^3)$. Σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη.

Στη μερική οδήγηση απαιτούνται $(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$ αφαιρέσεις σε όλα τα στάδια, δηλ. $\Theta(n^2)$.

π.χ. (μερική οδήγηση)

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -16/5 & 3/5 & 22/5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 16/5 & 3/5 & 22/5 \\ 0 & 0 & 35/16 & 70/16 \end{array}\right) \Rightarrow x_3=2,\ x_2=-1,\ x_1=1$$

Πρακτικά, η απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση είναι ευσταθής, χωρίς όμως αυτό να είναι απόλυτο.

Ανάλυση LU

π.χ.
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 - 14x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 - 13x_2 + 9x_3 &= 41 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 3 & -14 & -1 \\ 4 & -13 & 9 \end{pmatrix} \leftarrow \text{αντιστρέψιμος}$$

, Δοκιμάζουμε ανάλυση του A (παραγοντοποίηση) στη μορφή $A = LU$,

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 3 & -14 & -1 \\ 4 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow l_{11} = 2, \quad l_{21} = 3, \quad l_{31} = 4$

$2u_{12} = -8, \quad 2u_{13} = 2$

$3\cdot(-4) + l_{22} = -14, \quad 3\cdot 1 + (-2)u_{23} = -1$

$4\cdot(-4) + l_{32} = -13, \quad 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + l_{33} = 9$

$$\Leftrightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \overset{y=Ux}{\Leftrightarrow} Ly = b \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2y_1 &= 10 \\ 3y_1 - 2y_2 &= -1 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 &= 41 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 5 \\ y_2 &= 8 \\ y_3 &= 3 \end{aligned}$

$Ux = y \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$

Υπάρχει το θεώρημα που λέει ότι αν το σύστημα $Ax=b$ μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο Gauss κατά μοναδικό τρόπο, χωρίς εναλλαγές γραμμών ή στηλών, τότε $A = LU$, όπου L κάτω-τριγωνικός και U άνω-τριγωνικός.
Αν τα διαγώνια στοιχεία του L είναι ίσα με 1, η ανάλυση λέγεται Doolittle.
Αν τα διαγώνια στοιχεία του U είναι ίσα με 1 η ανάλυση λέγεται Crout.
Αν τα διαγώνια στοιχεία του L συμπίπτουν με τα διαγώνια στοιχεία του U, η ανάλυση λέγεται Choleski.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ← αντιστρέψιμος $= LU$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -17.5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ← αντιστρέψιμη δεν αναλύεται σε LU όπως μπορούμε να ελέγξουμε.

Είναι πράγματι $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

δηλαδή με εναλλαγή πρώτης - δεύτερης γραμμής προκύπτει ο προηγούμενος πίνακας που αναλύεται σε LU.

εδώ υπάρχει LU ανάλυση — είναι αραιοί πίνακας

Ανάλυση LU σε τριδιαγώνια συστήματα (πίνακας ταινία / ζώνη) Είναι ευσταθής υπολογιστική μέθοδος

π.χ.

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 \quad &= -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 - 4x_3 &= -10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Ακολουθούμε τη μέθοδο Crout, όπου τα L,U έχουν ειδικότερη διδιαγώνιας μορφή λόγω του A, $A = LU \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & 0 \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \text{ άρα}$$

$$L = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -15/4 & 0 \\ 0 & 1 & -56/15 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -4/15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \overset{y = Ux}{\Leftrightarrow} Ly = b \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -4y_1 \quad &= -2 \\ y_1 - \tfrac{15}{4}y_2 &= -4 \\ y_2 - \tfrac{56}{15}y_3 &= -10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2} \\ y_2 &= \tfrac{18}{15} \\ y_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$Ux=y \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 \quad &= \tfrac{1}{2} \\ x_2 - \tfrac{4}{15}x_3 &= \tfrac{18}{15} \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

<u>Ανάλυση LDU</u> $A = LDU$, L κάτω-τριγωνικός με $l_{ii}=1$
U άνω-τριγωνικός με $u_{ii}=1$
D διαγώνιος με $d_{ii}=d_i \neq 0$

~~π.χ.~~ $\cancel{A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}}$

Αν στην ανάλυση LDU τα $d_i > 0$ και A θετικά ορισμένος, τότε $U=L^T$.

<u>Ανάλυση Choleski</u> Θετικά ορισμένοι πίνακες (πραγματικοί) αναλύονται/(μοναδικά) ως $A=LL^T$, όπου L κάτω-τριγωνικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία.
(Η μέθοδος είναι ευσταθής).
~~...~~
Από την ανάλυση LDU ~~αφού d~~ $A=LDU$, με $d_i>0 \Rightarrow U=L^T$ ~~α~~ άρα
$A = L D_1 D_1^T L^T = (LD_1)(LD_1)^T = L_1 L_1^T$, $L_1 = LD_1$
$\sqrt{d_i}$

π.χ. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow Ax=b$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2\end{pmatrix}$

$A^T = A$ και $z^T A z = (z_1, z_2, z_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3\end{pmatrix} = (z_1\ z_2\ z_3)\begin{pmatrix} z_1+z_2+z_3 \\ z_1+2z_2+2z_3 \\ 2z_1+2z_2+8z_3\end{pmatrix}$

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_2^2 + 4z_1z_3 + 4z_2z_3 + 8z_3^2 = z_1^2 + (z_1+z_2)^2 + (z_2+z_3)^2 + (z_1-2z_3)^2 > 0$

$$A = LL^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2+l_{22}^2 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21}+l_{32}l_{22} & l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$Ax=b \Leftrightarrow LL^T x = b \overset{y=L^Tx}{\Leftrightarrow} Ly=b \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_3 = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = -2 \end{array}$$

$$L^T x = y \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ 2x_3 = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

Νόρμα (norm) $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \|x\|$ με

$\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Το αξίωμα $\|x\| \geq 0$ προκύπτει από τα άλλα, αφού $0 = \|x-x\| = \|x+(-x)\| \leq \|x\| + \|-x\|$
$= \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0$.

Επίσης ισχύει $\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big| \geq \|x\| - \|y\|$, αφού
$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$ και επίσης με εναλλαγή των x, y
$\|x-y\| \geq \|y\| - \|x\| \Rightarrow \|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$.

π.χ. $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

π.χ. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$

διότι $\|x\|_1 \geq 0$ και $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_1$

$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

π.χ. $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

π.χ. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_E$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Ευκλείδεια νόρμα

διότι $0 \leq \|x - \lambda y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \lambda y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

$\Rightarrow 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \|x\|_2^2 + \lambda^2 \|y\|_2^2$

Για $\lambda = \frac{\|x\|_2}{\|y\|_2} \Rightarrow 2\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|x\|_2^2 + \frac{\|x\|_2^2}{\|y\|_2^2}\|y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

(αλλιώς από την διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς λ)

Αν $x_i y_i < 0$ τότε $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|\tilde{x}\|_2 \|\tilde{y}\|_2$, όπου στο $\tilde{x}$ το αντίστοιχο x_i γίνεται $-x_i$

~~[illegible]~~

$= \|x\|_2 \|y\|_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$

ανισότητα Cauchy-Schwarz

Άρα $\|x+y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i||y_i|)}$

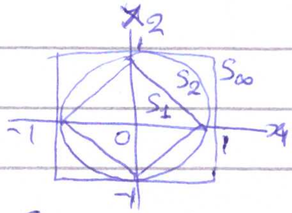
$= \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|} \leq \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2} = \sqrt{(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2}$

$= \|x\|_2 + \|y\|_2 \Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

π.χ. $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x\in\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$

Για $p=\infty \Rightarrow \|\cdot\|_\infty$

π.χ. $\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$, $f\in C[a,b]$



$S_p = \{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$, $p=1,2,\infty$

Απόσταση των x,y $d(x,y) = \|x-y\|$.

Λέμε ότι η ακολουθία $x^{(n)}, n\in\mathbb{N}$ του V συγκλίνει ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ στο διάνυσμα x, αν $\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}-x\|=0$ (γράφουμε $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ή $x=\lim_{n\to\infty} x^{(n)}$)

Λέμε ότι η $x^{(n)}$ είναι ακολουθία Cauchy αν $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\ge N$ $\|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\varepsilon$.

Ο V λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει. (π.χ. ο $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης ως προς κάθε νόρμα).

Ισχύει $\underline{m\|x\|_\infty \le \|x\| \le M\|x\|_\infty}$, όπου $m,M>0$ σταθερές.

Πράγματι, αν e^i η κανονική βάση $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e^i \Rightarrow \|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e^i\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|e^i\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \|e^i\| = \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n}\|e^i\|$
$\Rightarrow \|x\| \le M\|x\|_\infty$, $M=\sum_{i=1}^{n}\|e^i\|$.

Άρα $|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\| \le M\|x-y\|_\infty \Rightarrow \|\cdot\|$ συνεχής. Το $S=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ είναι κλειστό και φραγμένο, άρα $\exists\ m=\min_{x\in S}\|x\|>0$. Το $\frac{x}{\|x\|_\infty}\in S$ διότι $\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_\infty = 1$, άρα
$\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \ge m \Rightarrow \|x\| \ge m\|x\|_\infty$

Νόρμα πίνακα $\|\cdot\| : M_{m\times n}(\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ με

$\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Φυσική νόρμα πινάκων (ή παραγόμενη από τη νόρμα $\|\cdot\|$ των $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) είναι η

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Το σύνολο $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ είναι πράγματι φραγμένο, διότι $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M\|Ax\|_\infty}{m\|x\|_\infty} = \frac{M}{m} \frac{\max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|}{\|x\|_\infty} \leq \frac{M}{m} \frac{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|}{\|x\|_\infty} \leq$

$$\frac{M}{m} \frac{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, \|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{M}{m} \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = C$$

Ισχύει $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ διότι, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$

Πράγματι η $\|A\|$ είναι νόρμα αφού

1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow Ax = 0, \forall x \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda A x\|}{\|x\|} = \sup \frac{|\lambda|\,\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\, \|A\|$

3) $\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{Ax}{\|x\|} + \frac{Bx}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{x\neq 0} \left\|\frac{Ax}{\|x\|}\right\| + \sup_{x\neq 0} \left\|\frac{Bx}{\|x\|}\right\| =$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

4) $\|A \cdot B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$

Ο υπολογισμός $\|A\|$ δεν είναι εύκολος. Όμως για τις $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$, $\|x\|_2$ υπάρχουν τύποι υπολογισμού των αντίστοιχων $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ (για $\|A\|_2$ είναι πιο δύσκολο)

$A \in \mathbb{R}$

π.χ. $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \equiv \|A\|_r$ (νόρμα αθροίσματος γραμμών)

Πράγματι, $\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \right) \le \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|x\|_\infty \right)$

$= \|x\|_\infty \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\Rightarrow \|A\|_\infty \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$\exists k: \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Αν $y_j \equiv \begin{cases} \frac{a_{kj}}{|a_{kj}|}, & a_{kj} \ne 0 \\ 0, & a_{kj} = 0 \end{cases} \Rightarrow \|y\|_\infty = \max_j |y_j| = \max_j 1 = 1$

$\|Ay\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{a_{kj}}{|a_{kj}|} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{kj}|^2}{|a_{kj}|} \right| =$

$= \left| \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|y\|_\infty \cdot \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow$

$\|A\|_\infty \ge \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} \ge \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Τελικά $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

π.χ. $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \equiv \|A\|_\Sigma$ (νόρμα αθροίσματος στηλών)

Πράγματι, $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \|x\|_1 \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow \|A\|_1 \le \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\exists k: \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Αν $y = e^k$ $\Rightarrow \|Ay\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$
$\|y\|_1 = 1$

$= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_1 \ge \frac{\|Ay\|_1}{\|y\|_1} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Τελικά $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

π.χ. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$ → φασματική νόρμα , $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\left[\rho(B) = \max_i |\lambda_i|\right.$ → ιδιοτιμή B $\left.\right]$

Έστω $B = A^TA \Rightarrow B^T = B$ συμμετρικός

$\Rightarrow \exists\ u^i$ ορθοκανονική βάση ιδιοανυσμάτων του B, δηλ. $Bu^i = \lambda_i u^i$, $(u^i, u^j)_2 = \delta_{ij}$, $x = \sum_{i=1}^n c_i u^i$, $x \in \mathbb{R}^n$

Είναι $\lambda_i \geq 0$ διότι $\lambda_i = (Bu^i, u^i)_2 = (A^TAu^i, u^i)_2 = (Au^i, Au^i)_2 = \|Au^i\|_2^2 \geq 0$

(όπου $(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$) $\Rightarrow \|x\|_2^2 = (x, x)_2$)

$(a, Ab) = \sum_{i,j} a_i A_{ij} b_j = \sum_{i,j} a_i (A^T)_{ji} b_j = \sum_{j,i} b_j (A^T)_{ji} a_i = (b, A^Ta) = (A^Ta, b)$

Είναι $(x, x)_2 = \left(\sum_{i=1}^n c_i u^i, \sum_{j=1}^n c_j u^j\right)_2 = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j (u^i, u^j)_2 = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n c_i^2$

$(Ax, Ax)_2 = (A^TAx, x)_2 = (Bx, x)_2 = \left(B\sum_{i=1}^n c_i u^i, \sum_{j=1}^n c_j u^j\right)_2 =$

$= \left(\sum_{i=1}^n c_i Bu^i, \sum_{j=1}^n c_j u^j\right)_2 = \left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i u^i, \sum_{j=1}^n c_j u^j\right)_2 =$

$= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i c_i c_j (u^i, u^j)_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2$

$\Rightarrow \dfrac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \dfrac{(Ax, Ax)_2}{(x, x)_2} = \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n (\max_j \lambda_j) c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \max_j \lambda_j = \rho(B) \Rightarrow \|A\|_2^2 \leq \rho(A^TA)$

Επίσης αν $\lambda_k = \rho(A^TA) \Rightarrow \|Au^k\|_2^2 = (Au^k, Au^k)_2 = (A^TAu^k, u^k)_2 = (Bu^k, u^k)_2 =$

$= (\lambda_k u^k, u^k)_2 = \lambda_k (u^k, u^k)_2 = \lambda_k = \rho(A^TA)$

και $\|u^k\|_2^2 = (u^k, u^k)_2 = 1$

άρα $\|A\|_2^2 \geq \dfrac{\|Au^k\|_2^2}{\|u^k\|_2^2} = \rho(A^TA)$

Τελικά $\|A\|_2^2 = \rho(A^TA) \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$

① $A^T = A \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$ διότι, $A^TAx = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\max(\lambda^2)} = \sqrt{(\max|\lambda|)^2} = \max|\lambda| = \rho(A)$.

x = ιδιοάνυσμα A, λ = ιδιοτιμή A

~~$\|A\|_2 \leq \rho(A)$, άρα~~ $\|A\|_2 = \rho(A)$

② $\rho(A) \leq \|A\|$ διότι $|\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$ $\Rightarrow \rho(A) = \max|\lambda| \leq \|A\|$

x = ιδιοάνυσμα A, λ = ιδιοτιμή A

π.χ. Αν $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ ίδιες

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ προκύπτουν όμοια.

π.χ. Ευκλείδεια νόρμα $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \neq \|A\|_2$

(ή Frobenius ?) $(= \|A\|_F)$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ → $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_E$

$\|A\|_\infty$: $\sum_{j=1}^3 |a_{1j}| = |1| + |-2| + |1| = 4$

$\sum_{j=1}^3 |a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$ $\Rightarrow \|A\|_\infty = \max(4, 4, 7) = 7$

$\sum_{j=1}^3 |a_{3j}| = |4| + |-1| + |2| = 7$

$\|A\|_1$: $\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |1| + |0| + |4| = 5$

$\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = |-2| + |3| + |-1| = 6 \quad \Rightarrow \|A\|_1 = \max(5, 6, 4) = 6$

$\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = |1| + |-1| + |2| = 4$

$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}|^2} = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |3|^2 + |-1|^2 + |4|^2 + |-1|^2 + |2|^2} = \sqrt{37}$.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\|A\|_2 = ?$

$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $|A^TA - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 9)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 1$, $\rho(A^TA) = \max\{9, 9, 1\} = 9 \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{9} = 3.$

Αλλά $A^T = A \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1 \Rightarrow \rho(A) = \max\{3, 1\} = 3 \Rightarrow \|A\|_2 = 3.$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\|A\|_\infty = 2$, $\|A\|_1 = 2$, $\|A\|_2 = 2$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\rho(A) = 0$, πράγματι $\rho(A) \le \|A\|$

<u>Κατάσταση γραμμικών συστημάτων</u>

π.χ. $\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Διαταράσσουμε λίγο το δεύτερο μέλος (τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές) και έχουμε το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.253 \\ 0.218 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1223 \\ -1694 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή μικρή διαταραχή των δεδομένων έδωσε τεράστια μεταβολή στη λύση. Λέμε ότι το σύστημα έχει κακή κατάσταση.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Gauss με οδήγηση (σε υπολογιστή με $\beta=10$, $t=3$,) παίρνουμε ανακριβή αποτελέσματα για το πρώτο σύστημα. Παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.001 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \tilde{x}_1 = -0.443, \quad \tilde{x}_2 = 1$$

Αυτό είναι συνέπεια της κακής κατάστασης του συστήματος.

Είναι $|A| = -10^{-6} \ll 1$, αλλά αυτό δεν είναι ένδειξη διότι η $|A|$ μπορεί να μεγαλώσει ή να μικρύνει πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό το σύστημα χωρίς να αλλάξει η κατάσταση του συστήματος.

Αν με A σταθερό (αντιστρέψιμο) μεταβάλλουμε το b σε $b+\Delta b$, τότε η λύση του συστήματος $Ax=b$ γίνεται $x+\Delta x$ με $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$, $\kappa(A) \equiv \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ ← φυσική νόρμα

$(Ax=b,\ A(x+\Delta x)=b+\Delta b \Rightarrow \dots)$

"δείκτης κατάστασης του A"
"αριθμός κατάστασης του A"

Πράγματι είναι $A(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow A\Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow$
$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|$

Αλλά $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$, άρα $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

Είναι <u>$\kappa(A) \ge 1$</u> διότι $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \ge \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$

Λέμε ότι το σύστημα $Ax=b$ (ή ο A) έχει κακή κατάσταση (ή είναι ασταθές) αν $\kappa(A) \gg 1$, οπότε τότε μια μικρή μεταβολή του b είναι δυνατόν να προκαλέσει μεγάλη μεταβολή της λύσης. Αν ο $\kappa(A)$ δεν είναι πολύ μεγάλος, λέμε ότι το $Ax=b$ (ή ο A) έχει καλή κατάσταση (ή το σύστημα είναι ευσταθές).

π.χ. $\kappa_1\underbrace{\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix}}_{A} \simeq 2.6\times10^6 \gg 1$. Άρα για $\Delta b = (-0.001, 0.001) \Rightarrow \dfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} \sim 10^{-3} \Rightarrow$

$\dfrac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} \sim 10^3$

$\|A\|_1 = 1.693$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -563000 & 659000 \\ 780000 & -913000 \end{pmatrix}$ $\|A^{-1}\| = 1572000$

$\kappa_1(A) = 2.6614\times10^6$

$\Leftrightarrow \kappa(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$ μικρή σχετική διαταραχή του A.

Αν $Ax=b$, $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$ και $\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\| < 1$ τότε $A+\Delta A$ αντιστρέψιμη και
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\kappa}{1-\kappa\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$$

Πράγματι, καταρχήν αν $\|Bx\| \ge \overset{>0}{c}\|x\|$, $\forall x$ τότε $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$, αφού αν $Bx=0 \Rightarrow 0 \ge c\|x\| \Rightarrow x=0$ και αφού $\forall y$
$c\|B^{-1}y\| \le \|B(B^{-1}y)\| = \|BB^{-1}y\| = \|y\| \Rightarrow \frac{\|B^{-1}y\|}{\|y\|} \le \frac{1}{c}$ άρα $\|B^{-1}\| \le \frac{1}{c}$

Εν συνεχεία είναι, $\|(A+\Delta A)y\| = \|Ay+\Delta A y\| \ge \|Ay\| - \|\Delta A\cdot y\|$ και $\|\Delta A\cdot y\| \le \|\Delta A\|\cdot\|y\| \Rightarrow$
$\Rightarrow -\|\Delta A\cdot y\| \ge -\|\Delta A\|\cdot\|y\|$, άρα $\|(A+\Delta A)y\| \ge \|Ay\| - \|\Delta A\|\cdot\|y\|$
Αλλά $y = A^{-1}Ay \Rightarrow \|y\| = \|A^{-1}Ay\| \le \|A^{-1}\|\,\|Ay\| \Rightarrow \|Ay\| \ge \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|}$

άρα $\|(A+\Delta A)y\| \ge \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\|\cdot\|y\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}\left(1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|\right)\|y\|$, άρα

$A+\Delta A$ αντιστρέψιμη με $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$. [αυτή η σχέση ισχύει ανεξάρτητα αν διαταράσσεται το b ή όχι]

Τέλος $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Leftrightarrow Ax + A\Delta x + (\Delta A)x + \Delta A\,\Delta x = b \Leftrightarrow (A+\Delta A)\Delta x = -(\Delta A)x \Leftrightarrow$
$\Delta x = -(A+\Delta A)^{-1}(\Delta A)x \Rightarrow \|\Delta x\| = \|(A+\Delta A)^{-1}(\Delta A)x\| \le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|(\Delta A)x\|$
$\le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|x\|$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta A\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\,\|\Delta A\| = \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Αν $Ax=b$, $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$ και $\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$ τότε $A+\Delta A$ αντιστρέψιμη και $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$

Πράγματι, $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \Leftrightarrow (A+\Delta A)\Delta x = \Delta b - (\Delta A)x \Leftrightarrow$
$\Delta x = (A+\Delta A)^{-1}[\Delta b - (\Delta A)x] \Rightarrow \|\Delta x\| \le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta b - (\Delta A)x\| \le$
$\|(A+\Delta A)^{-1}\|\left(\|\Delta b\| + \|(\Delta A)x\|\right) \le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\cdot\|x\|\right)$
$\le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\,\|x\|\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\dfrac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\|\right)$. Αλλά $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

άρα $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\dfrac{\|\Delta b\|\,\|A\|}{\|b\|} + \|\Delta A\|\right) = \dfrac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$

π.χ. Αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4.001 \end{pmatrix}$ να βρεθεί αν είναι ευσταθές ή όχι το σύστημα $Ax=b$

$|A|=0.001 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος , $A^{-1}=1000\begin{pmatrix} 4.001 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|A\|_\infty = 5.001$, $\|A^{-1}\|_\infty = 8001$

$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 40013.001 \gg 1 \Rightarrow$ ασταθές σύστημα.

π.χ. Έστω το σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Διαταράσσουμε λίγο τα A, b

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0007 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y=\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ πολύ διαφορετική από το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Επιρροή του δείκτη κατάστασης κατά την αναλυτική Gauss λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης

Αν το σύστημα $Ax=b$ υλοποιείται στον υπολογιστή όπου κάθε αριθμός α παριστάνεται ως $fl(\alpha)=\alpha(1+\varepsilon)$, $|\varepsilon| \le u = \begin{cases} \beta^{1-t}, & \text{αποκοπή} \\ \frac{1}{2}\beta^{1-t}, & \text{στρογγύλευση} \end{cases}$ τότε το διάνυσμα b_i παριστάνεται από το $\tilde{b}_i = b_i(1+\varepsilon_i)$, $|\varepsilon_i| \le u$, $i=1,\dots,n$ $\Rightarrow \tilde{b} = b+\Delta b$, $\|\Delta b\|_\infty = \max_i \{ |b_i||\varepsilon_i| \} \le \max_i \{|b_i| . u\} = u \max_i\{|b_i|\} = u\|b\|_\infty$.

Όμοια το A παριστάνεται από $\tilde{A} = A+\Delta A$, $\|\Delta A\|_\infty \le u\|A\|_\infty$ και η υπολογιστική λύση $\tilde{x}$ είναι η ακριβής λύση του $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b} \Leftrightarrow (A+\Delta A)\tilde{x} = b+\Delta b$

Αν $u\kappa_\infty(A)=\mu<1$ τότε $\|\Delta A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \le u\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = u\kappa_\infty(A) = \mu < 1$, άρα $A+\Delta A$ αντιστρέψιμος και το σχετικό σφάλμα

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\kappa_\infty(A)}{1-\|A^{-1}\|_\infty\|\Delta A\|_\infty}\left(\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right)$$

Αλλά $-\|\Delta A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty \ge -\mu \Rightarrow 1-\|\Delta A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty \ge 1-\mu \Rightarrow \frac{1}{1-\|\Delta A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty} \le \frac{1}{1-\mu}$

$$\Rightarrow \frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\kappa_\infty(A)}{1-\mu}\left(\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} + \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}\right) \le \frac{2u\kappa_\infty(A)}{1-u\kappa_\infty(A)}$$

Όταν το $u\kappa_\infty(A)$ πλησιάζει το 1 τότε αναμένουμε μεγάλο σχετικό σφάλμα για την υπολογιστική λύση $\tilde{x}$.

Εκτίμηση σφάλματος

Αν για το σύστημα $Ax=b$, x^* είναι προσεγγιστική λύση τότε

$\varepsilon = x^* - x$ σφάλμα

$\|\varepsilon\| = \|x^* - x\|$ απόλυτο σφάλμα της x^*

$\|\delta\| = \dfrac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} = \dfrac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$ απόλυτο σχετικό σφάλμα της x^*

$r = Ax^* - b$ υπόλοιπο διάνυσμα

Ισχύει $\quad A\varepsilon = r \Leftrightarrow \varepsilon = A^{-1}r$, $\quad \|\varepsilon\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|$, $\quad \dfrac{\|r\|}{\kappa\|b\|} \le \|\delta\| \le \dfrac{\kappa\|r\|}{\|b\|}$

διότι $\quad A\varepsilon = A(x^* - x) = Ax^* - Ax = Ax^* - b = r$

$\|\varepsilon\| = \|A^{-1}r\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|$

$\|r\| = \|A\varepsilon\| \le \|A\|\,\|\varepsilon\| \Rightarrow \|\varepsilon\| \ge \dfrac{\|r\|}{\|A\|} \Rightarrow \dfrac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} \ge \dfrac{\|r\|}{\|A\|\,\|x\|}$, αλλά $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow$

$\|x\| = \|A^{-1}b\| \le \|A^{-1}\|\,\|b\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|\,\|b\|}$, άρα $\|\delta\| \ge \dfrac{\|r\|}{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|b\|} = \dfrac{\|r\|}{\kappa\|b\|}$

και $\|\delta\| = \dfrac{\|\varepsilon\|}{\|x\|} = \dfrac{\|A^{-1}r\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|\,\|r\|}{\|x\|}$, αλλά $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$, άρα

$\|\delta\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\|\,\dfrac{\|A\|}{\|b\|} = \dfrac{\kappa\|r\|}{\|b\|}$

Παρατήρηση Αν το $\|r\|$ είναι μικρό, δεν σημαίνει ότι τα $\|\varepsilon\|$, $\|\delta\|$ είναι μικρά κατ'ανάγκη

π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Για την κακή προσέγγιση, $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ θα βρούμε το $\|r\|$ και τα $\|\varepsilon\|$, $\|\delta\|$

Είναι $r = Ax^* - b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0003 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0002 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|r\|_\infty = 0.0002$ μικρή

$\varepsilon = x^* - x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\varepsilon\|_\infty = \max\{|2|, |-1|\} = 2$ αρκετά μεγάλο

Πράγματι, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = \max\{|-10000| + |10000|, |5000.5| + |-5000|\}$
$= \max\{20000, 10000.5\} = 20000$

$A^{-1}r = \begin{pmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0.0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}r\|_\infty = \max\{|2|, |1|\} = 2 = \|\varepsilon\|$

Επίσης $\|A^{-1}\|_\infty \|r\|_\infty = 20000 \times 0.0002 = 4 \Rightarrow \|\varepsilon\| \le 4$ πράγματι ισχύει

Οι ευθείες $x_1 + 2x_2 = 3$, $1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$ είναι σχεδόν παράλληλες

Επίσης $\|b\|_\infty = \max\{|3|, |3.0001|\} = 3.0001$

$\|A\|_\infty = \max\{|1|+|2|, |1.0001|+|2|\} = 3.0001$

$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 3.0001 \times 20000 = 60002$

Άρα $$\frac{0.0002}{60002 \times 3.0001} \le \|\delta\|_\infty \le \frac{60002 \times 0.0002}{3.0001} \Leftrightarrow 0.111103 \le \|\delta\|_\infty \le 4$$

Αν $x^{(0)} = x^* = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ τότε $r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1.0001 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3.0001\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}3\\3.0003\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3.0001\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0.0002\end{pmatrix}$$

Είναι $A\varepsilon = r^{(0)}$, όπου $\varepsilon = x^{(0)} - x$

άρα $\varepsilon = A^{-1} r^{(0)} = \begin{pmatrix}-10000 & 10000\\ 5000.5 & -5000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.0002\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = x^{(0)} - \varepsilon = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ακριβής λύση

Αν αντί της ακριβούς λύσης $\varepsilon = A^{-1} r^{(0)}$ βρίσκαμε μια προσέγγιση $\varepsilon^{(0)} = A^{-1} r^{(0)}$, τότε μια πρώτη προσέγγιση για το x θα ήταν $x^{(1)} = x^{(0)} - \varepsilon^{(0)}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το νέο υπόλοιπο $r^{(1)} = Ax^{(1)} - b$ και $\varepsilon^{(1)} = A^{-1} r^{(1)} \Rightarrow x^{(1)} - x^{(2)} \Rightarrow x^{(2)} = x^{(1)} - \varepsilon^{(1)}$

Αναδρομικά $r^{(p)} = Ax^{(p)} - b, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$

$\varepsilon^{(p)} = A^{-1} r^{(p)}$

$x^{(p+1)} = x^{(p)} - \varepsilon^{(p)}$