Έμμεσοι ή Επαναληπτικές μέθοδοι (iterative methods)

Για την επίλυση πολύ μεγάλων συστημάτων με πολλά μηδενικά, είναι ασύμφορες από υπολογιστική άποψη η εφαρμογή άμεσων μεθόδων (μεγάλη υπολογιστική εργασία, ~~καταναλώνει~~ μνήμη Η/Υ και αποθηκεύουν και τα μηδέν), οπότε χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης όπου με τη βοήθεια επαναληπτικών τύπων δημιουργούνται ακολουθίες διανυσμάτων που συγκλίνουν στη λύση του συστήματος. Το υπολογιστικό τους κόστος είναι μικρό.

π.χ. για $n=10^4$ με τη μέθοδο Gauss απαιτούνται $\frac{n^3}{3}\sim 10^{12}$ πράξεις και αν ο υπολογιστής εκτελεί 10^6 πράξεις/sec, θα απαιτούνταν μερικές μέρες υπολογισμού.

Ούτως ή άλλως, λόγω των σφαλμάτων στρογγύλευσης του υπολογιστή, και από τις άμεσες μεθόδους στην πράξη μόνο προσεγγιστική λύση παίρνουμε.

$x=Gx+c \Leftrightarrow (I-G)x=c$

αντιστρέψιμος (πίνακας ρύθμισης)

Το σύστημα $Ax=b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$, $A=M-N$, $G=M^{-1}N$, $c=M^{-1}b$

αφού $(M-N)x=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$

Αν η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)}=M^{-1}Nx^{(m)}+M^{-1}b \Leftrightarrow x^{(m+1)}=Gx^{(m)}+c$ συγκλίνει, τότε $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x$.

Πράγματι, από $x^{(m+1)}=M^{-1}Nx^{(m)}+M^{-1}b \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty}x^{(m+1)}=M^{-1}N\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}+M^{-1}b \xRightarrow{y=\lim_{m\to\infty}x^{(m)}}$

$y=M^{-1}Ny+M^{-1}b \Rightarrow My=Ny+b \Rightarrow Ay=b \Rightarrow y=x$.

Η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)}=M^{-1}Nx^{(m)}+M^{-1}b$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\lim\limits_{m\to\infty}G^m=0$, $G=M^{-1}N$

Πράγματι, από $x^{(m+1)}=M^{-1}Nx^{(m)}+M^{-1}b \Rightarrow Mx^{(m+1)}=Nx^{(m)}+b \Rightarrow Mx^{(m+1)}-Mx=Nx^{(m)}+b-Nx-b \Rightarrow$

$x^{(m+1)}-x=G(x^{(m)}-x) \Rightarrow \underbrace{x^{(m)}-x}_{\equiv\varepsilon^{(m)}}=G^m(\underbrace{x^{(0)}-x}_{\equiv\varepsilon^{(0)}}) \Rightarrow \|x^{(m)}-x\| \le \|G^m\|\,\|x^{(0)}-x\|$

Αν $\lim\limits_{m\to\infty}G^m=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty}\|G^m\|=0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x\|=0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x$

Έστω $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x$. Θέτουμε $x^{(0)}=x+d_j$, $d_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ j θέση. Τότε $x^{(m)}-x=G^m d_j=$ j στήλη του G^m

και αφού $\lim\limits_{m\to\infty}(x^{(m)}-x)=0 \Rightarrow$ j στήλη του $G^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $\forall j \Rightarrow G^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

~~Η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)}=M^{-1}Nx^{(m)}+M^{-1}b$ συγκλίνει ανν $\rho(M^{-1}N)<1$~~

~~Πράγματι, έστω $x^{(m)}$ συγκλίνει. Τότε $G^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $G=M^{-1}N \Rightarrow G^m x^{(0)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Αν $c=M^{-1}b$ είναι~~

~~$x^{(m)}=Gx^{(m-1)}+c=G(Gx^{(m-2)}+c)+c=G^2x^{(m-2)}+(G+I)c=\dots=D^{(m)}x^{(0)}+(D^{m-1}+\dots+D+I)c$~~

Η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)} = M^{-1}Nx^{(m)} + M^{-1}b$ συγκλίνει ανν $\rho(\overset{G}{M^{-1}N})<1$

Πράγματι, έστω $\rho(G)<1$, $G=M^{-1}N$. Αφού οι ιδιοτιμές λ του G έχουν $|\lambda|\le\rho(G)$

$\Rightarrow |\lambda|<1 \Rightarrow \lambda^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ ~~άρα (???)~~ $\cancel{\lim_{m\to\infty} G^m = 0}$. Αν $Gz=\lambda z \Rightarrow G^m z=\lambda^m z$ $\Rightarrow G^m z \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Αν $c=M^{-1}b$ είναι

$$x^{(m)} = Gx^{(m-1)}+c = G(Gx^{(m-2)}+c)+c = G^2x^{(m-2)}+(G+I)c=\cdots = G^m x^{(0)} + (G^{m-1}+\cdots+G+I)c$$

Είναι $Gz=\lambda z \Rightarrow (I-G)z = z-Gz = z-\lambda z = (1-\lambda)z \Rightarrow 1-\lambda$ ιδιοτιμή του $I-G$. Αλλά $|\lambda|<1$, άρα $1-\lambda>0 \Rightarrow 1-\lambda\ne 0 \Rightarrow I-G$ αντιστρέψιμος (αν $I-G$ ιδιάζων τότε θα είχε μηδενική ιδιοτιμή) $\Rightarrow \exists (I-G)^{-1}$. ~~Είναι (I-G)~~ Αν $S_n = I+G+G^2+\dots+G^n$ τότε

$$(I-G)S_n = (I-G)(I+G+G^2+\dots+G^n) = (I+G+G^2+\dots+G^n) - (G+G^2+\dots+G^{n+1}) = I-G^{n+1}$$

$$\Rightarrow (I-G)\lim_{n\to\infty} S_n = I - \lim_{n\to\infty} G^{n+1} = I \Rightarrow (I-G)^{-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = I+G+G^2+\dots$$

Άρα $x^{(m)} = G^m x^{(0)} + S_{m-1}c \Rightarrow \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \lim_{m\to\infty} G^m x^{(0)} + (\lim_{m\to\infty} S_{m-1})c = 0 + (I-G)^{-1}c = x$

Αντίστροφα, έστω $\exists \lim x^{(m)}$ οπότε $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$.

Είναι $x - x^{(m)} = (x-c) - (x^{(m)}-c) = Gx - Gx^{(m-1)} = G(x-x^{(m-1)}) = G^2(x-x^{(m-2)}) = \dots = G^m(x-x^{(0)})$
$= G^m u$,
$u = x-x^{(0)}$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} (G^m u) = \lim_{m\to\infty}(x-x^{(m)}) = x - \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x-x=0$ $\cancel{\Rightarrow \rho(G)<1}$, $\forall u$

Αν $Gz=\lambda z \Rightarrow G^m z = \lambda^m z \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \lambda^m = 0 \Rightarrow |\lambda|<1 \Rightarrow \rho(G)<1$.

Αν $\|G\|<1$ (για κάποια νόρμα $\|\cdot\|$) τότε η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)} = Gx^{(m)}+c$, $G=M^{-1}N$, $c=M^{-1}b$ συγκλίνει

Πράγματι, επειδή $\rho(G)\le\|G\| \Rightarrow \rho(G)<1$, άρα $x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$.

Αυτή η πρόταση έχει μεγάλη πρακτική αξία γιατί το να εξετάσουμε αν το $\rho(G)<1$ είναι δύσκολο, ενώ π.χ. τα $\|G\|_1$, $\|G\|_\infty$ υπολογίζονται εύκολα και βλέπουμε αν είναι <1.

Αν $\|G^k\|<1$ για κάποια νόρμα $\|\cdot\|$ και για κάποιο $k\in\mathbb{N}$, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων $x^{(m)}$ με $x^{(m+1)} = Gx^{(m)}+c$, $G=M^{-1}N$, $c=M^{-1}b$ συγκλίνει

Πράγματι αν $Gz=\lambda z$ τότε $G^k z=\lambda^k z$, άρα $\rho(G^k) = [\rho(G)]^k$. Αλλά $\rho(G^k)\le\|G^k\|<1$, άρα $[\rho(G)]^k<1 \Rightarrow \rho(G)<1 \Rightarrow x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$.

Αν ικανοποιείται κάποιο από τα κριτήρια $\|G\|<1$, $\|G^k\|<1$ τότε εφαρμόζουμε τον επαναληπτικό τύπο και σταματάμε όταν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο τερματισμού, π.χ. $\|x^{(M+1)}-x^{(M)}\|<\varepsilon_1$, $\dfrac{\|x^{(M+1)}-x^{(M)}\|}{\|x^{(M+1)}\|}\le\varepsilon_2$ ← συνήθως αυτό χρησιμοποιούμε, $\varepsilon_{1,2}>0$ μικρός.

π.χ. για $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$ είναι $\max|x_i^{(M+1)}-x_i^{(M)}|<\varepsilon$, $\dfrac{\max|x_i^{(M+1)}-x_i^{(M)}|}{\max|x_i^{(M+1)}|}<\varepsilon$. [Για t σημαντικά ψηφία ακρίβεια πρέπει να πάρουμε $\varepsilon_2=\frac{1}{2}10^{-t}$]

Για να είναι $\|\varepsilon^{(M)}\|=\|x^{(M)}-x\|<\varepsilon<1$ πρέπει $M\ge\min(m_1,m_2)$, όπου

$$m_1=\left\lceil\frac{\ln\varepsilon+\ln(1-\|G\|)-\ln\left[(1-\|G\|)\|x^{(0)}\|+\|c\|\right]}{\ln\|G\|}\right\rceil$$

$$m_2=\left\lceil\frac{\ln\varepsilon+\ln(1-\|G\|)-\ln\|(I-G)x^{(0)}-c\|}{\ln\|G\|}\right\rceil,\qquad \lceil 3.14\rceil=4$$

Ισχύει $\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|^m\|x^{(0)}-x\|$

διότι $x^{(m)}-x=(x^{(m)}-c)-(x-c)=Gx^{(m-1)}-Gx=G(x^{(m-1)}-x)\Rightarrow\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|$
$\Rightarrow\dots\Rightarrow\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|^m\|x^{(0)}-x\|$

Ισχύει: αν $\|G\|<1\Rightarrow\|x^{(m)}-x\|\le\dfrac{\|G\|^m}{1-\|G\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

διότι $\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|$ $\cancel{\Rightarrow\|x^{(m)}-x\|+\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|+\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|}$

Αλλά $\|x^{(m-1)}-x\|=\|x^{(m-1)}-x^{(m)}+x^{(m)}-x\|\le\|x^{(m-1)}-x^{(m)}\|+\|x^{(m)}-x\|=\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|+\|x^{(m)}-x\|$, άρα
$\|x^{(m-1)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|+\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\Rightarrow(1-\|G\|)\|x^{(m-1)}-x\|\le\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\Rightarrow$
$\|x^{(m-1)}-x\|\le\dfrac{1}{1-\|G\|}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|$

Είναι $\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|\le\dfrac{\|G\|}{1-\|G\|}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\Rightarrow\|x^{(1)}-x\|\le\dfrac{\|G\|}{1-\|G\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

Άρα ξανά από $\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|\le\|G\|\cdot\|G\|\,\|x^{(m-2)}-x\|\le\dots\le\|G\|^{m-1}\|x^{(1)}-x\|\le$
$\le\|G\|^{m-1}\dfrac{\|G\|}{1-\|G\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|=\dfrac{\|G\|^m}{1-\|G\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

Επίσης $\|x^{(m)}-x\|\le\|G\|\,\|x^{(m-1)}-x\|\le\|G\|\dfrac{1}{1-\|G\|}\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|$

και αν $\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\le\varepsilon$ τότε $\|x^{(m)}-x\|\le\dfrac{\varepsilon\|G\|}{1-\|G\|}$

Άρα αν $\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\|\le\varepsilon\Rightarrow\|x^{(m)}-x\|\le\dfrac{\varepsilon\|G\|}{1-\|G\|}$

Μέθοδος Jacobi

A αντιστρέψιμος και $a_{ii} \neq 0, \forall i$

Επιλέγουμε $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots\ a_{nn} \end{pmatrix} = D$, ~~[illegible]~~ $\Rightarrow M$ αντιστρέψιμος

$A = M - N$ ~~[illegible]~~ $\rightsquigarrow N = \cancel{M} - A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = L + U$, $L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & 0 \end{pmatrix}$

$A = D - L - U$, $U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & \\ 0 & & \ddots\ \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = M^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j$$

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Gx + c \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\Big) = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\Big)$$

$$\Leftrightarrow Dx = (L+U)x + b$$

Άρα ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Jacobi είναι

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}\Big) = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}\Big) \Leftrightarrow Dx^{(m+1)} = (L+U)x^{(m)} + b$$

Αν υπάρχουν πολλά μηδενικά a_{ij} τότε τα αθροίσματα $\sum_j a_{ij} x_j^{(m)}$ υπολογίζονται εύκολα.

Αν ο A έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές τότε ο επαναληπτικός τύπος του Jacobi συγκλίνει.

Πράγματι είναι $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ~~άρα~~ ~~[illegible]~~ $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$.

Είναι $\|G\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \Rightarrow \|G\|_\infty < 1 \Rightarrow x^{(m)}$ συγκλίνει για $m \to \infty$.

Αντίστοιχα ισχύει και για αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά στήλες.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 7x + y + z &= 12 \\ -x + 5y + z &= 12 \\ 2x - y + 6z &= 18 \end{aligned}$$

με τη μέθοδο Jacobi με $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ο $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές, διότι $|7| > |1| + |1|$, $|5| > |-1| + |1|$, $|6| > |2| + |-1|$. Άρα η μέθοδος Jacobi συγκλίνει.

Είναι

$$x^{(m+1)} = \frac{1}{7}\left(12 - y^{(m)} - z^{(m)}\right)$$

$$y^{(m+1)} = \frac{1}{5}\left(12 + x^{(m)} - z^{(m)}\right)$$

$$z^{(m+1)} = \frac{1}{6}\left(18 - 2x^{(m)} + y^{(m)}\right)$$

Για $m=0$, $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$, έχω $x^{(1)} = 1.7114$, $y^{(1)} = 2.4$, $z^{(1)} = 3$

Για $m=1$, προκύπτει $x^{(2)} = 0.93$, $y^{(2)} = 2.1423$, $z^{(2)} = 2.896$

Για $m=15$, $x^{(16)} = 1$, $y^{(16)} = 2$, $z^{(16)} = 3$. (ακριβής λύση).

π.χ.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

με Jacobi $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = D - L - U$$

$$M = D = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix}, \quad N = L + U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = M^{-1}N = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο A δεν έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές ή στήλες, άρα δεν μπορούμε να πούμε αν συγκλίνει η Jacobi.

Επίσης $\|G\|_1 = \|G\|_\infty = 4 > 1$, άρα πάλι δεν μπορούμε να πούμε.

Τέλος βρίσκουμε το $\rho(G)$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του G

$$|G - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow \rho(G) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{0, 0, 0\} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Jacobi συγκλίνει.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= 1 - 2x_2^{(m)} + 2x_3^{(m)} \\ x_2^{(m+1)} &= 1 - x_2^{(m)} - x_3^{(m)} \\ x_3^{(m+1)} &= 1 - 2x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)} \end{aligned}\right|$$

Για $m=0$: $x_1^{(1)} = 1-2x_2^{(0)}+2x_3^{(0)} = 1$

$x_2^{(1)} = 1-x_2^{(0)}-x_3^{(0)} = -1$

$x_3^{(1)} = 1-2x_2^{(0)}-2x_3^{(0)} = -3$

$m=1$: $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m=2$: $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Το κριτήριο τερματισμού $\dfrac{\|x^{(3)}-x^{(2)}\|}{\|x^{(3)}\|} \leq \frac{1}{2}10^{-t}$ ικανοποιείται.
Επόμενα η ακριβής λύση είναι η $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Αλλιώς, $c = M^{-1}b = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = Gx+c \Rightarrow x^{(m+1)} = Gx^{(m)}+c \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_3^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m=0 \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$m=1 \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m=2 \Rightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Μέθοδος Gauss-Seidel

A αντιστρέψιμος με $a_{ii} \neq 0, \forall i$

Επιλέγουμε

$$M = D - L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad |M| = a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$ ~~αντιστρέψιμος~~

$$A = D - L - U$$

$$N = M - A = U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -a_{21} & \ddots & \\ \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = M^{-1} N = (D-L)^{-1} U \qquad (D-L)x^{(m+1)} = Ux^{(m)} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(m)} + (D-L)^{-1} b$$

πιο δύσκολο, σχέση χωρίς τον $(D-L)^{-1}$.

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Gx + c \Leftrightarrow (D-L)x = Ux + b, \text{ άρα } \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} + a_{ii} x_i^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right)$$

(επαναληπτικός τύπος Gauss-Seidel)

Αν ο A έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές ή στήλες τότε ο επαναληπτικός τύπος Gauss-Seidel συγκλίνει.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει πιο γρήγορα από τη ~~Jacobi~~ Jacobi, αλλά και περιπτώσεις που ενώ η Jacobi συγκλίνει, η Gauss-Seidel αποκλίνει.

Σε υπολογιστές με παράλληλη αρχιτεκτονική (παράλληλοι επεξεργαστές) μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Jacobi, όχι όμως η Gauss-Seidel.

π.χ.

$$\begin{aligned} 7x + y + z &= 12 \\ -x + 5y + z &= 12 \\ 2x - y + 6z &= 18 \end{aligned} \qquad \text{Gauss-Seidel}, \quad \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία, άρα συγκλίνει η μέθοδος Gauss-Seidel.

$$x^{(m+1)} = \frac{1}{7}\left(12 - y^{(m)} - z^{(m)}\right)$$

$$y^{(m+1)} = \frac{1}{5}\left(12 + x^{(m+1)} - z^{(m)}\right)$$

$$z^{(m+1)} = \frac{1}{6}\left(18 - 2x^{(m+1)} + y^{(m+1)}\right)$$

Για $m=0 \leadsto \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.7114 \\ 2.5423 \\ 2.8532 \end{pmatrix}$

$m=1 \leadsto \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9435 \\ 2.2113 \\ 3.0560 \end{pmatrix}$

$m=9 \leadsto \begin{pmatrix} x^{(10)} \\ y^{(10)} \\ z^{(10)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ακριβής λύση (Με τη Jacobi είχαμε χρειαστεί $m=15$)

π.χ. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$ Gauss-Seidel, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ο A έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία κατά γραμμές, άρα η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει.

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{3}\left(5 - 2x_2^{(m)}\right)$$
$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_3^{(m)}\right)$$
$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_1^{(m+1)}\right) = \frac{1}{2}\left[3 - \frac{1}{3}\left(5 - 2x_2^{(m)}\right)\right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2^{(m)}$$

$m=0 \leadsto x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 1.5 \\ 0.666 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 1.167 \\ 1.167 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.889 \\ 0.917 \\ 1.056 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.055 \\ 0.972 \\ 0.973 \end{pmatrix}$

$x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.019 \\ 1.014 \\ 0.991 \end{pmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.991 \\ 1.004 \\ 1.004 \end{pmatrix}, \quad x^{(7)} = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.998 \\ 1.002 \end{pmatrix}, \quad x^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{pmatrix}$

$\dfrac{\|x^{(8)} - x^{(7)}\|_\infty}{\|x^{(8)}\|_\infty} < \dfrac{1}{2}10^{-2}$ (για δύο σημαντικά ψηφία)

$\Rightarrow \quad x \simeq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$

π.χ. $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jacobi: $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)}\right)$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(m)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + x_4^{(m)}\right)$$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(m)} + x_3^{(m)}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.2727 \\ -1.1 \\ 1.875 \end{pmatrix}, \dots, x^{(10)} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 1.9998 \\ -0.9998 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$$

$\|x^{(10)} - x\|_\infty = 2 \cdot 10^{-4}$

Gauss-Seidel: $x_1^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)}\right)$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)} - 3x_4^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_4^{(m)}\right)$$

$$x_4^{(m+1)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(m+1)} + x_3^{(m+1)}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.3272 \\ -0.9873 \\ 0.8789 \end{pmatrix}, \dots, x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 2.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$\|x^{(5)} - x\|_\infty = 10^{-4}$, άρα εδώ πιο γρήγορη η Gauss-Seidel.

Για τους συμμετρικούς, θετικά ορισμένους πίνακες στο $\mathbb{R}$, η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει, ενώ η Jacobi όχι πάντα.

Μέθοδος Χαλάρωσης (SOR) – Γενίκευση της Gauss-Seidel

A αντιστρέψιμος, $Ax=b \Leftrightarrow \omega A x = \omega b$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, $a_{ii} \neq 0, \forall i$

$\cancel{\omega A = M_\omega - N_\omega}$ $\qquad M = D - L$

$\cancel{M_\omega = M}$ $\qquad N = U$ $\qquad$ όπως στο Gauss-Seidel

$\cancel{N_\omega = (1-\omega)M + \omega N}$

$$\omega A = \omega(D-L-U) = \omega(D-L) - \omega U = (D-L) - (1-\omega)(D-L) - \omega U$$
$$= (D-L) - [(1-\omega)(D-L) + \omega U] = (D-\omega L) - [(1-\omega)D + \omega U]$$

$$\omega A x = \omega b \Leftrightarrow (D-\omega L)x = [(1-\omega)D + \omega U]x + \omega b$$

$$D-\omega L = \begin{pmatrix} a_{11} & & \Phi \\ \omega a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ \omega a_{n1} & \omega a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \Phi & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D-\omega L)x^{(m+1)} = [(1-\omega)D + \omega U]x^{(m)} + \omega b$$

$$\Rightarrow \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} + a_{ii} x_i^{(m+1)} = (1-\omega) a_{ii} x_i^{(m)} - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} + \omega b_i$$

$$\Rightarrow x_i^{(m+1)} = (1-\omega) x_i^{(m)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right)$$

Για $\omega = 1$, η SOR συμπίπτει με Gauss-Seidel

Αν ο A έχει διαγώνια κυριαρχία τότε η SOR συγκλίνει

Επίσης αν ο A συμμετρικός θετικά ορισμένος στο $\mathbb{R}$ με $0<\omega<2$ ~~τότε~~ SOR συγκλίνει

π.χ.
$$\left.\begin{aligned} 7x + y + z &= 12 \\ -x + 5y + z &= 12 \\ 2x - y + 6z &= 18 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega = 1.25$$

$$x^{(m+1)} = -0.25\, x^{(m)} + \frac{1.25}{7}\left(12 - y^{(m)} - z^{(m)}\right)$$
$$y^{(m+1)} = -0.25\, y^{(m)} + \frac{1.25}{5}\left(12 + x^{(m+1)} - z^{(m)}\right)$$
$$z^{(m+1)} = -0.25\, z^{(m)} + \frac{1.25}{6}\left(18 - 2x^{(m+1)} + y^{(m+1)}\right)$$

$m=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.14286 \\ 3.53571 \\ 3.59375 \end{pmatrix}$, $m=1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33403 \\ 1.30114 \\ 2.98345 \end{pmatrix}$, $m=2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.29424 \\ 1.60530 \\ 2.79931 \end{pmatrix}$

Γραμμικά Μιγαδικά Συστήματα

π.χ. $$\left.\begin{aligned}(2-3i)x+(1+2i)y&=3-i\\(1+3i)x+(2+2i)y&=2\end{aligned}\right\}$$

Είναι $x=\omega+i\varphi$, $y=z+it$, άρα

$$\left.\begin{aligned}(2-3i)(\omega+i\varphi)+(1+2i)(z+it)&=3-i\\(1+3i)(\omega+i\varphi)+(2+2i)(z+it)&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}(2\omega+3\varphi-2t+z)+(-3\omega+2\varphi+t+2z)i&=3-i\\(\omega-3\varphi-2t+2z)+(3\omega+\varphi+2t+2z)i&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}2\omega+3\varphi-2t+z&=3\\-3\omega+2\varphi+t+2z&=-1\\\omega-3\varphi-2t+2z&=2\\3\omega+\varphi+2t+2z&=0\end{aligned}\right\}\overset{\text{Gauss}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}\omega\\\varphi\\t\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\13/33\\-8/11\\34/33\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+i\frac{13}{33}\\\frac{34}{33}-i\frac{8}{11}\end{pmatrix}$$

Μπορεί με επαναληπτική διαδικασία να υπολογιστούν και οι ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα κάποιου πίνακα. (πχ. μέθοδος Δυνάμεων).