1ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ασκήσεις Σφαλμάτων (7 ασκήσεις) 1/2

Άσκηση 1 Γράψτε ένα πρόγραμμα σε μια γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου, το οποίο εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο $\mathcal{A}$ να υπολογίζει τα ψηφία d_{-i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ ενός αριθμού στο σύστημα αριθμών με βάση $\beta \geqslant 2$, ο οποίος αναπαριστά το δεκαδικό μέρος x ενός αριθμού που ανήκει στο δεκαδικό σύστημα αριθμών.
(**Υπόδειξη**: Για να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο $\mathcal{A}$ πρέπει το πρόγραμμά σας να διαβάζει τα στοιχεία του συνόλου της εισόδου $\mathcal{I}$ του αλγορίθμου που είναι ο αριθμός x, η βάση β και ο ακέραιος k, ο οποίος ελέγχει το πλήθος των ζητούμενων επαναλήψεων. Αυτό που πρέπει να τυπώνει είναι αυτό που επιθυμούμε να λάβουμε ως έξοδο από τον αλγόριθμο, που είναι τα ψηφία $d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-k}$. Συνεπώς το πρόγραμμά σας πρέπει:

(α) να διαβάζει τα δεδομένα x, β και k από ένα αρχείο ή να ζητά την τιμή τους,

(β) να εφαρμόζει τα βήματα 2 έως 6 του Αλγορίθμου $\mathcal{A}$,

(γ) να δίνει ως έξοδο τα ψηφία $d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-k}$.

Ελέγξτε το πρόγραμμά σας σε ένα γνωστό σας αποτέλεσμα).

Αλγόριθμος $\mathcal{A}$

Βήμα 1. *Είσοδος* $\mathcal{I} = \{x, \beta, k\}$.

Βήμα 2. Θέσε $i = -1$ και πήγαινε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3. Θέσε $y_{-1} = x$ και πήγαινε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 4. Αντικατάστησε το i με $i + 1$ και, αν ισχύει $i \leqslant k$ πήγαινε στο Βήμα 5, διαφορετικά πήγαινε στο Βήμα 7.

Βήμα 5. Αν ισχύει $i = 0$, πήγαινε στο Βήμα 6, διαφορετικά υπολόγισε το $y_{-i} = (y_{-i+1} \times \beta) - d_{-i}$ και πήγαινε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 6. Αν ισχύει $y_{-i} = 0$, πήγαινε στο Βήμα 7, διαφορετικά υπολόγισε το $d_{-i-1} = \lfloor y_{-i} \times \beta \rfloor$ και πήγαινε στο Βήμα 4.

Βήμα 7. *Έξοδος* $\mathcal{O} = \{d_{-1}, d_{-2}, \ldots\}$.

Άσκηση 2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x = 0.12307$, χρησιμοποιώντας στους υπολογισμούς το πολύ τρία σημαντικά ψηφία. Να βρείτε το σφάλμα διάδοσης, το παραχθέν σφάλμα, καθώς και το ολικό σφάλμα.

Άσκηση 3 Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις (α) ακριβώς, (β) με αποκοπή με 3 σημαντικά ψηφία και (γ) με στρογγυλοποίηση με 3 σημαντικά ψηφία.

α) 13.2 + 0.0841, β) 0.0314 × 129, γ) (132 + 0.713) – (112 + 22).

Άσκηση 4 Να προσδιορίσετε μια καλή προσέγγιση του μεγαλύτερου αριθμού x, που ικανοποιεί την εξίσωση sin x = x, σ' ένα σύστημα αριθμών μηχανής με $\beta = t = 10$, $-L = U = 100$.

Άσκηση 5 Να βρεθεί κατάλληλος τρόπος υπολογισμού της e^{x-y}, για μεγάλα θετικά x και y, ώστε να μη χάνεται η ακρίβεια.

Άσκηση 6 Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό sin 30, υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου του Taylor, για τη συνάρτηση $\sin x$, με $N + 1$ όρους

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

για $x = 30$ και αρκετά μεγάλο N. (Μάλιστα, για να μην έχουμε προβλήματα υπερχείλισης στον παρονομαστή λόγω του παραγοντικού, υπολογίζουμε το άθροισμα ως $\sum_{k=0}^{N} t_k$, όπου οι όροι t_k υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις $t_0 = x$, $t_{k+1} = -t_k \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}$, $k \geq 0$.) Παρατηρούμε ότι για $N \geq 40$ η υπολογιστική τιμή του αθροίσματος (σε απλή ακρίβεια) δεν μεταβάλλεται πλέον και είναι -0.240487×10^5 (!). Αιτιολογήστε το φαινόμενο.

Άσκηση 7 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \left(\log \dfrac{1}{x}\right)^{-1/8}, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0,1)$. Υπολογίζοντας όμως τιμές της για μικρό $x > 0$, π.χ. στον HP33, βρίσκουμε

$$f(10^{-40}) = 0.568\ldots, \quad f(10^{-80}) = 0.520\ldots, \quad f(10^{-99}) = 0.507\ldots.$$

Πού, κατά τη γνώμη σας, οφείλεται το γεγονός ότι οι αριθμητικοί αυτοί υπολογισμοί δεν φαίνεται να επιβεβαιώνουν ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$;