Μη-γραμμικές εξισώσεις

Άσκηση 1 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$. Με τη μέθοδο της διχοτόμησης να βρεθεί η δεύτερη προσέγγιση της ρίζας. Να προσδιοριστεί ο αριθμός των επαναλήψεων, που θα χρειαστούν, ώστε η προσεγγιστική ρίζα της εξίσωσης να έχει ανοχή $\varepsilon = 10^{-6}$.

Άσκηση 2 Η εξίσωση $5x^3 - 20x + 3 = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα ρ στο διάστημα $[0, 1]$. Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος (σταθερού σημείου)

$$x_{k+1} = g(x_k) = \frac{5x_k^3 + 3}{20}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

συγκλίνει στη ρίζα αυτή για κάθε $x_0 \in [0,1]$. Να γίνουν 3 επαναλήψεις με $x_0 = 0.2$ και να δοθεί μια καλή εκτίμηση του σφάλματος $|x_3 - \rho|$. Επίσης, θέτοντας $\varepsilon_k = x_k - \rho$, να δειχθεί ότι $\lim \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{3\rho^2}{4}$ όταν $k \to \infty$.

Άσκηση 3 Δείξτε ότι η εξίσωση $xe^{-x} - e^{-3} = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές λύσεις r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$). Δείξτε επίσης ότι η επαναληπτική μέθοδος:

$$x_{k+1} = 3 + \ln x_k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

συγκλίνει στη λύση r_2, αν $x_0 > r_1$, και αποκλίνει, αν $x_0 < r_1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος:

$$x_{k+1} = e^{x_k - 3}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

συγκλίνει στη λύση r_1, αν $x_0 < r_2$, και αποκλίνει, αν $x_0 > r_2$. Τέλος, υπολογίστε τις λύσεις r_1 και r_2 με ακρίβεια δεκατεσσάρων δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιώντας ως αρχική τιμή $x_0 = 2$ και για τις δύο μεθόδους.
(**Απάντηση:** Οι ζητούμενες λύσεις είναι οι $r_1 = 0.05246909745772$ και $r_2 = 4.50524149579288$.)

Άσκηση 4 Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x^2(7 - 3x^2), & |x| < 1, \\ \sqrt{|x|}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

α) Αποδείξτε ότι, για $|x_0| < 1$, η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει, με τάξη σύγκλισης ένα, στη ρίζα $\rho = 0$ της εξίσωσης.

β) Τι θα συμβεί αν $|x_0| \geq 1$;