Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #1.

Εισαγωγή:

• Τι είναι Στοχαστικότητα ?

Η δυνατότητα μοντελοποίησης (μαθηματικής περιγραφής) ενός φαινομένου με χρήση ενός πειράματος τύχης.

• Αν μπορούμε να προβλέψουμε με απόλυτη ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός φαινομένου, τότε αυτό είναι (μελετάται ως) ντετερμινιστικό: όσες φορές κι αν επαναληφθεί το αντίστοιχο πείραμα, σε ελεγχόμενες συνθήκες, δίνει πάντοτε το ίδιο (απόλυτα προβλέψιμο) αποτέλεσμα.

• Αν δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός φαινομένου, τότε αυτό είναι (μελετάται ως) στοχαστικό: όσες φορές κι αν επαναληφθεί το πείραμα, σε ελεγχόμενες συνθήκες, δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα.

Όμως: Τα δυνατά αποτελέσματα, μετά από "άπειρες" επαναλήψεις παρουσιάζουν "στατιστικές κανονικότητες", δηλ. μπορούν να μοντελοποιηθούν (ως τυχαίες μεταβλητές) μέσω παραμέτρων τύχης.

Τυχαίες Μεταβλητές

Παράδειγμα: Ρίψη δύο ζαριών.

$\underline{\Omega} = \{ (i, j) : 1 \leq i, j \leq 6 \}$

$X(i,j) := i+j$

Παράδειγμα: Έστω η ρίψη δύο νομισμάτων.

$\underline{\Omega} = \{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \}$

Έστω X να είναι το πλήθος των όψεων "K".

Δηλ, έχω μια αντιστοιχία της μεταβλητής X για κάθε στοιχείο του $\underline{\Omega}$.

Εδώ, η X μπορεί να πάρει τις τιμές: 0, 1 ή 2.

(Γιατί?)

Ορισμός: Έστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω.
Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μία <u>τυχαία μεταβλητή</u>
(δηλ. η συνάρτηση που ορίζεται πάνω στον δειγματικό χώρο).

Τυχαίες Μεταβλητές
- → Διακριτές (όταν το "σύνολο τιμών" είναι πεπερασμένο ή άπειρα αριθμήσιμο).
- → Συνεχείς (όταν παίρναν τιμές σ' ένα διάστημα του $\mathbb{R}$)

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας & Συνάρτηση Κατανομής

Έστω X διακριτή τ.μ.

Τότε $P\{X = a_i\} = f_X(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X

<u>Ιδιότητες:</u>
- $0 \leq f_X(a_i) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{\infty} f_X(a_i) = 1$

$F_X(x) = \sum f(x_i)$: Συνάρτηση Κατανομής.

$F_X(x) = P(X \leq x)$

Έστω X συνεχής τ.μ.

Τότε $P\{X = a_i\} = f_X(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X

<u>Ιδιότητες</u>
- $0 \leq f_X(a_i) \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a_i) = 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$: Συνάρτηση κατανομής

$F_X(x) = P(X \leq x)$

Ισχύει ότι: $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$.

Απόδειξη:

$$(X \leq y) = (x < X \leq y) \cup (X \leq x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \leq y) = P(x < X \leq y) + P(X \leq x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x < X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x) \quad \blacksquare.$$

Άσκηση: Ο αριθμός των πελατών που μπαίνουν σε ένα μαγαζί σε μία ώρα αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p(x) = \begin{cases} cx & , x=1,2,3 \\ c(10-x) & , x=4,5 \\ 0 & , \text{αλλού}. \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα να μπουν στο μαγαζί σε μία ώρα περισσότεροι από 2 και λιγότεροι από 5 πελάτες.

Λύση:

i) Ισχύει ότι $\sum_{x=1}^{5} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{3} cx + \sum_{x=4}^{5} c(10-x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c + 2c + 3c + 6c + 5c = 1 \Rightarrow 17c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{17}.$$

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{17} & , x=1,2,3 \\ \frac{10-x}{17} & , x=4,5 \\ 0 & , \text{αλλού}. \end{cases}$$

ii) • Για $x \in (-\infty, 1)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in (-\infty,1)} P(X = t) = 0$

• Για $x \in [1,2)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in [1,2)} P(X = t) =$

$= P(X = 1) = \frac{1}{17}$

• Για $x \in [2,3)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in [2,3)} P(X = t) =$

$= P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{17} + \frac{2}{17} = \frac{3}{17}$

• Για $x \in [3,4)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in [3,4)} P(X = t) =$

$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{17} + \frac{2}{17} + \frac{3}{17} = \frac{6}{17}$

• Για $x \in [4, 5)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in [4,5)} P(X = t) =$

$= P(X \le 3) + P(X = 4) = \frac{6}{17} + \frac{6}{17} = \frac{12}{17}$

• Για $x \in [5, +\infty)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t=-\infty}^{x \in [5,+\infty)} P(X = t) =$

$= P(X \le 4) + P(X = 5) = \frac{12}{17} + \frac{5}{17} = 1.$

Οπότε:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{17} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{17} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{17} & , \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{12}{17} & , \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & , \quad 5 \leq x . \end{cases}$$

iii) $P(2 < X < 5) = P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) =$

$$= \frac{12}{17} - \frac{3}{17} = \frac{9}{17} \blacksquare.$$

<u>Άσκηση:</u> Στην προηγούμενη άσκηση υπολογίστε τις πιθανότητες:

i) $P(X<2)$, ii) $P(X>1)$, iii) $P(X>3 / X \geq 2)$

<u>Λύση:</u>

i) $P(X<2) = P(X=1) = \frac{1}{17} = F(1)$.

ii) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17}$

iii) $P(X>3 / X \geq 2) \xlongequal{P(A/B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \dfrac{P(X>3, X \geq 2)}{P(X \geq 2)} =$

$$= \frac{P(X>3)}{P(X \geq 2)} = \frac{1 - P(X \leq 3)}{1 - P(X<2)} = \frac{1 - P(X \leq 3)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(1)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{6}{17}}{1 - \frac{1}{17}} = \frac{11}{16} \blacksquare.$$

Άσκηση: Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx &, 0 \le x < 1 \\ k &, 1 \le x \le 2 \\ 0 &, \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) Να υπολογιστεί η σταθερά k.

ii) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(X < \frac{1}{2})$, $P(X < \frac{3}{2})$, $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

iii) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X.

Λύση:

i) Ισχύει ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx\,dx + \int_1^2 k\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^1 + \left[kx\right]_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} + 2k - k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x &, 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} &, 1 \le x \le 2 \\ 0 &, \text{αλλού} \end{cases}$$

ii) $\bullet\ P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{0}^{1/2} \frac{2}{3}x\,dx = \left[\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{12}$

$\bullet\ P\left(X < \frac{3}{2}\right) = \int_{-\infty}^{3/2} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x\,dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3}\,dx =$

$= \left[\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x\right]_1^{3/2} = \frac{2}{3}$

$\bullet\ P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \frac{2}{3}x\,dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3}\,dx =$

$= \left[\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{2}{3}x\right]_1^{3/2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$ ■.

iii) • Για $x \in (-\infty, 0)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

• Για $x \in (0,1)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{3} t\,dt = \left[\frac{\cancel{2}}{3}\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_0^x = \frac{x^2}{3}$$

• Για $x \in (1,2)$: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{3} t\,dt + \int_{1}^{x} \frac{2}{3}\,dt =$$

$$= \left[\frac{\cancel{2}}{3}\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}t\right]_1^x = \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2x-1}{3}$$

• Για $x \in (2,+\infty)$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{3} t\,dt + \int_{1}^{2} \frac{2}{3}\,dt + \int_{2}^{+\infty} 0\,dt =$

$$= \left[\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} t\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 1. \blacksquare$$