# Στοχαστική Ανάλυση

## Φροντιστήριο #2

Σύνδεση με το προηγούμενο μάθημα:

**Διακριτή τ.μ. $X$**

- $0 \leq p_X(a_i) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(a_i) = 1$
- $P_X(x) = \sum p_X(x_i)$

**Συνεχής τ.μ. $X$**

- $0 \leq f_X(a_i) \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a_i) = 1$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

## Μέτρα θέσης και Διασποράς

Ορισμός: Έστω $X$ τ.μ. διακριτή. Έστω $p(x)$ η σ.π.π. της $X$. Τότε ορίζεται η:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, p(a_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Η ποσότητα $E(X)$ ονομάζεται Μέση τιμή της $X$.

π.χ. → Έστω μία τ.μ. $X$ που παίρνει τιμές $0, 1$ και $2$ με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα.

Γύρω από ποιά τιμή "κυμαίνεται" η τ.μ. $X$ ?

Απάντηση:

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4} \quad \blacksquare.$$

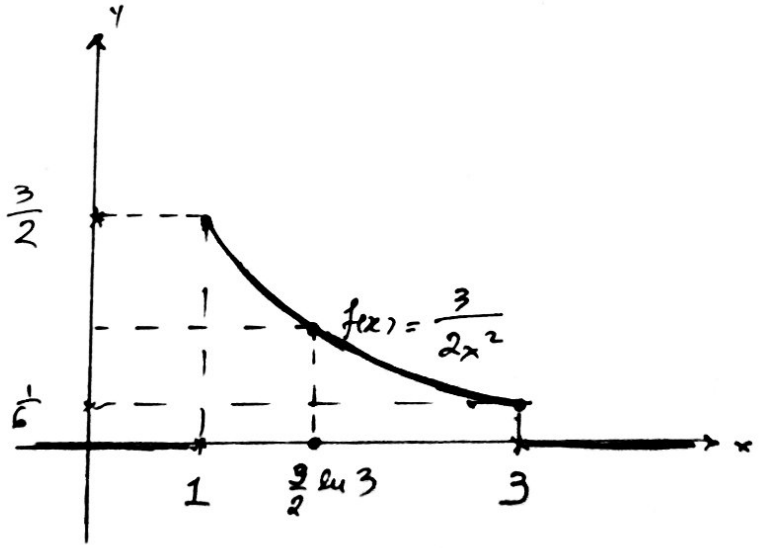
Ορισμός: Έστω $X$ συνεχής τ.μ. Τότε ορίζεται η μέση τιμή της $X$ ως εξής:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\, dx.$$

π.χ. → Έστω μία συνεχής τ.μ. $X$ με $f(x) = \frac{3}{2x^2}$, $x \in [1,3]$.

Τότε $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_1^3 x\cdot\frac{3}{2x^2}\,dx =$

$$= \frac{3}{2}\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{2}\Big[\ln(x)\Big]_1^3 = \frac{3}{2}\Big(\ln 3 - \ln 1\Big) = \frac{3}{2}\ln 3$$



Ιδιότητες της Μέσης Τιμής:

- Αν η $X$ είναι σταθερή $= c$, τότε $E(X) = c$
- $E(cX) = c\,E(X)$, $c \in \mathbb{R}$ σταθερά
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- Αν $X, Y$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε:
  $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Γενικά, ισχύει: $E(aX + \mu Y) = a\,E(X) + \mu\,E(Y)$

  (γραμμικότητα...)

- Αν $X \le Y$, τότε $E(X) \le E(Y)$.

Ορισμός: Έστω $X$ τ.μ. Τότε:

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

ονομάζεται διακύμανση της τ.μ. $X$

ή $V(X) = \sum (x-\mu)^2 \, p(x)$

Ορισμός: Τυπική Απόκλιση μιας τ.μ. $X$ (συμβ: $\sigma_X$ ) ορίζεται η ποσότητα:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\left[(X-\mu)^2\right]}$$

Ισχύει: $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

Παρατηρήσεις - Συμβολισμοί :

- Η διακύμανση $V(X)$ ονομάζεται και διασπορά.
- Η μέση τιμή συμβολίζεται και με $\mu_X$
- Η διασπορά συμβολίζεται και με $\sigma_X^2$.

Στο προηγούμενο μάθημα, λύσαμε την άσκηση:

Άσκηση: Έστω $X$ τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 \le x < 1 \\ k, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) $k = ?$

β) $P(X < \frac{1}{2}) = ;$ , $P(X < \frac{3}{2}) = ;$ , $P(X \geq \frac{1}{2}) = ;$ $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = ;$

γ) Να βρεθεί η $F(x)$.

δ) Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της $X$.

(Είχαμε λύσει τα α, β, γ ερωτήματα.
Θα λύσουμε το δ.)

Λύση:

α) $k = \frac{2}{3}$. Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

δ) • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{2}{3}x\,dx =$

$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$

• $E[X^2] = \int_0^1 \frac{2}{3}x^3\,dx + \int_1^2 \frac{2}{3}x^2\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$

$= \left[\frac{x^4}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{9}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{31}{18}$

• Άρα, $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{31}{18} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 =$

$\simeq 0,23$

■.

# Παραδείγματα τ.μ. $X$

## Διακριτών

- Ομοιόμορφη Διακριτή τ.μ. $X$

- Διωνυμική τ.μ. $X$

$$p(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

όπου $p$ η πιθανότητα επιτυχίας
$n$ = επαναλήψεις
$EX = n \cdot p$
$Var(X) = np(1-p)$

- τ.μ. Poisson

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

όπου $\lambda$ = ο ρυθμός που συμβαίνουν τα γεγονότα.

- Γεωμετρική τ.μ.

$$p(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

όπου $p$ = πιθανότητα επιτυχίας

## Συνεχών

- Ομοιόμορφη Κατανομή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha \le x \le b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Εκθετική τ.μ.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

$\lambda$ = παράμετρος της Εκθετικής.

Άσκηση: Μία τ.μ. $X$ έχει κατανομή (πυκνότητα) πιθανότητας ως εξής:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

i) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της $X$ και να δοθεί η γρ. παράσταση

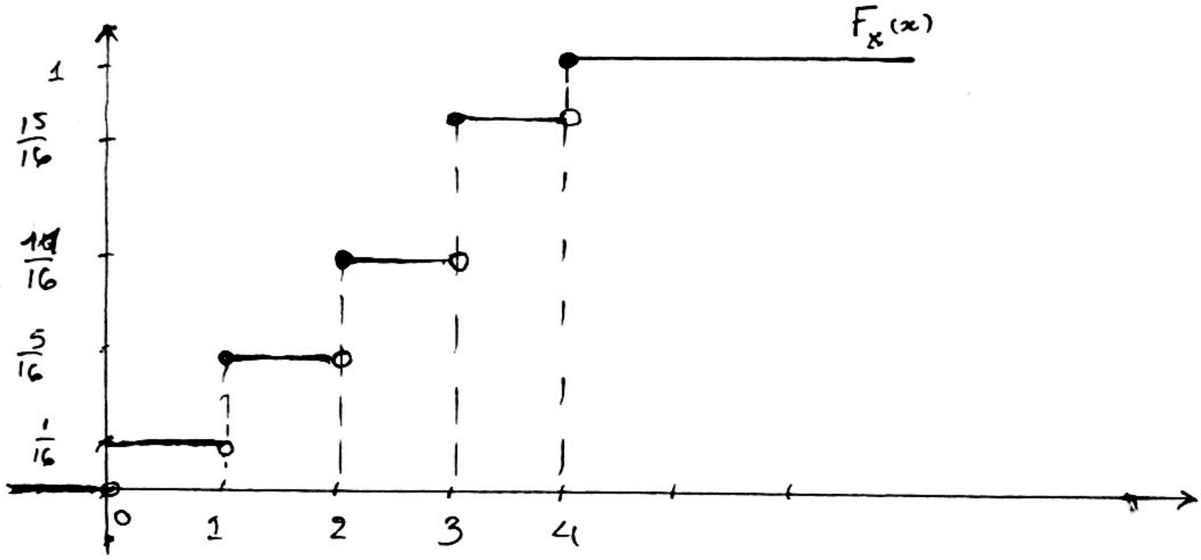
ii) $EX = ;$ , $V(X) = ;$

Λύση:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x<0 \\ \frac{1}{16} & , \; 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} & , \; 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} & , \; 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & , \; 3 \le x < 4 \\ 1 & , \; 4 \le x . \end{cases}$$

''

$P\{X \le x\}$



ii) $EX = \sum_{x=0}^{4} x \cdot P\{X = x\} = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2\frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} =$

$$= 2$$

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot P\{X = x\} = 0^2 \frac{1}{16} + 1^2 \frac{4}{16} + 2^2 \frac{6}{16} + 3^2 \frac{4}{16} + 4^2 \frac{1}{16} =$$

$$= 5.$$

Άρα, $V(X) = EX^2 - (EX)^2 = 5 - 2^2 = 1.$ ■

Άσκηση: Αν γνωρίζετε ότι η $X$ είναι μία διωνυμική τ.μ. με $E[X]=6$ και $Var(X)=2,4$, να βρείτε την $P\{X=5\}$.

Λύση:

$X \sim B(n,p)$ και $E(X)=6$ και $Var(X)=2,4$.

Τότε $p(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$,

όπου $p$ : πιθανότητα επιτυχίας

και $n$ : αριθμός δοκιμών.

Επίσης, γνωρίζω ότι:

$$\left.\begin{array}{l} E(X) = n \cdot p \\ Var(X) = np(1-p) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} np = 6 \\ np(1-p) = 2,4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} n = \frac{6}{p} \\ \frac{6}{p} p(1-p) = 2,4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = \frac{6}{p} \\ 6-6p = 2,4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} n = \frac{6}{p} \\ p = \frac{6-2,4}{6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} n = 10 \\ p = 0,6 \end{array}$$

Άρα $P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^5 \simeq 0,2$ ∎

# Πολυμεταβλητές κατανομές

Σε πολλά προβλήματα ενδιαφερόμαστε για περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού. Έτσι, οδηγούμαστε στη μελέτη της σχέσης ανάμεσα σε διαφορετικές τ.μ. και στον ορισμό της από κοινού συνάρτησης κατανομής.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $X, Y$ δύο τ.μ. Ως <u>από κοινού συνάρτηση πιθανότητας</u> των $X$ & $Y$ ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \text{ έτσι ώστε}$$

$$p(x,y) = P(X=x,\ Y=y), \quad \text{αν } X,Y \text{ διακριτές}$$

ή

$$f(x,y) = P(x < X < x+dx,\ y < Y < y+dy), \text{ αν } X,Y \text{ συνεχείς}.$$

Ιδιότητες:

1) $f(x,y) \geq 0, \ \forall x,y$

2) $\sum_x \sum_Y p(x,y) = 1$ , αν $X, Y$ διακριτές

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1, \text{ αν } X,Y \text{ συνεχείς}.$$

Επίσης, $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$

είναι η <u>από κοινού συνάρτηση κατανομής</u> των τ.μ. $X$ & $Y$.

## Περιθώριες συναρτήσεις κατανομής:

- Αν $X, Y$ διακριτές : $p_X(x) = P(X=x) = \sum_y p(x,y)$

$$p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x p(x,y)$$

- Αν $X, Y$ συνεχείς : $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx .$$

Δύο τ.μ. $X$ & $Y$ θα ονομάζονται ανεξάρτητες αν:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}$$

δηλ. $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad , \quad \forall x, y).$

Άσκηση: Έστω $X$ και $Y$ δύο διακριτές τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(x,y)$ ως εξής:

| Y \ X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/9 | 1/3 | 1/9 |
| 2 | 1/9 | 0 | 1/18 |
| 3 | 0 | 1/6 | 1/9 |

Υπολογίστε τις συναρτήσεις πιθανότητας των $X$ κ' $Y$. Είναι οι τ.μ. ανεξάρτητες?

Λύση:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} p(x,y) = p(x,1) + p(x,2) + p(x,3) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{2}{9} & , \text{αν } x=1 \\ \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} & , \text{αν } x=2 \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} & , \text{αν } x=3 \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p(x,y) = p(1,y) + p(2,y) + p(3,y) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} & , \text{αν } y=1 \\ \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} & , \text{αν } y=2 \\ 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} & , \text{αν } y=3 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι: $p_X(1) \cdot p_Y(1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{81} \neq \frac{1}{9} = p(1,1)$

Άρα, γενικά $p_X(x) \cdot p_Y(y) \neq p(x,y)$

Οπότε, οι τ.μ. είναι εξαρτημένες. ■

Άσκηση: Έστω $X, Y$ συνεχείς τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & , 0 \leq x \leq 2 , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι οι τ.μ. ανεξάρτητες;

Λύση:

- $f_X(x) = \int_0^1 x \cdot y \, dy = \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{x}{2}$

- $f_Y(y) = \int_0^2 x \cdot y \, dx = \left[ y \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2y$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{x}{2} \cdot 2y = x \cdot y = f(x,y) \quad , \forall x, y.$

Άρα, οι τ.μ. $X, Y$ είναι ανεξάρτητες ■.

Άσκηση: Έστω $X, Y$ τ.μ. με σ.π.π.:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y e^{-x} & , \ 0 < x < +\infty \ , \ 0 < y < 2 \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις. Είναι $X, Y$ ανεξάρτητες;

Λύση:

- $$f_X(x) = \int_0^2 f(x,y)\,dy = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-x} y \, dy = \frac{1}{2} e^{-x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x} \cdot 2 = e^{-x}.$$

- $$f_Y(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} y \, dx = \frac{1}{2} y \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} y \left( \lim_{x \to +\infty} (-e^{-x}) + e^{0} \right) = \frac{1}{2} y.$$

Ισχύει ότι $f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-x} y = f(x,y), \quad \forall x, y$

Άρα, οι $X, Y$ ανεξάρτητες ■