Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #4

__Άσκηση:__ Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης διανυσματικής τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο

$$p(x,y) = \begin{cases} c\left(\frac{x}{y}\right), & x=1,2,3, \quad y=1,2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

i) Βρείτε τη τιμή της σταθεράς c

ii) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των τ.μ. X & Y

iii) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές των μεταβλητών X & Y.

__Λύση:__

i) Πρέπει $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} c\left(\frac{x}{y}\right)=1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{3}\left(cx+\frac{cx}{2}\right)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(c+\frac{c}{2}\right)+\left(2c+c\right)+\left(3c+\frac{3c}{2}\right)=1 \Rightarrow 7c+2c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{9}.$$

ii) $$P_X(x) = \sum_{y=1}^{2}\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x}{9}\sum_{y=1}^{2}\frac{1}{y} = \frac{x}{9}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{x}{9} = \frac{x}{6}, x=1,2,3$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=1}^{3}\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{y} = \frac{1}{9y}\sum_{x=1}^{3}x = \frac{1}{9y}(1+2+3) = \frac{6}{9y} = \frac{2}{3y}, y=1,2$$

iii) $$E[X] = \sum_{x=1}^{3} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x^2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{2} y \cdot p_Y(y) = \sum_{y=1}^{2} y \frac{2}{3y} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$ ■.

<u>Άσκηση:</u> Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διανυσματικής τ.μ. (X,Y) δίνεται από τον τύπο

$$p(x,y) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y}, \quad x,y = 0,1,2,\dots$$

Είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες;

<u>Λύση:</u>

$$\cdot\ p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1},$$

$$x = 0,1,2,\dots$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \cdot 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}, \quad y = 0,1,2,\dots$$

Οπότε: $p_X(x) \cdot p_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} = p(x,y).$$

Άρα, οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες για όλα τα $x, y = 0, 1, 2, \dots$

<u>Άσκηση</u>: Έστω X τυχαία ομοιόμορφη μεταβλητή στο διάστημα $(10, 15)$.

i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \le 13)$ και $P(X > 11 / X \le 13)$.

ii) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της X.

iii) Να βρεθούν η μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y = X^2$.

<u>Λύση</u>: Η $X \sim U(10, 15)$.

Θυμάμαι ότι, αν $X \sim U[\alpha, b]$

Τότε
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha \le x \le b \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Οπότε:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15-10}, & 10 < x < 15 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Δηλ.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 10 < x < 15 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) $P(X \le 13) = \int_{10}^{13} f(x)\,dx = \int_{10}^{13} \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{x}{5}\right]_{10}^{13} = \frac{3}{5}$

$$P(X > 11 / X \leq 13) = \frac{P(11 < X \leq 13)}{P(X \leq 13)} =$$

$$= \frac{\int_{11}^{13} \frac{1}{5}\,dx}{\frac{3}{5}} = \frac{\left[\frac{x}{5}\right]_{11}^{13}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

ii) $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \ a < x < b \\ 1 & , \ x \geq b \end{cases}$$

Άρα $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 10 \\ \frac{x-10}{5} & , \ 10 < x < 15 \\ 0 & , \ x \geq 15. \end{cases}$$

$$\left(F(x) = P(X \leq x) = \int_{10}^{x} f(t)\,dt = \int_{10}^{x} \frac{1}{5}\,dt = \left[\frac{t}{5}\right]_{10}^{x} = \frac{x-10}{5} \right)$$

iii) $$E[Y] = E[X^2] = \int_{10}^{15} x^2 f(x)\,dx = \int_{10}^{15} \frac{x^2}{5}\,dx = \left[\frac{x^3}{15}\right]_{10}^{15} = \frac{475}{3}$$

$$E[Y^2] = E[X^4] = \int_{10}^{15} x^4 f(x)\,dx = \int_{10}^{15} \frac{x^4}{5}\,dx = \left[\frac{x^5}{25}\right]_{10}^{15} = 26375$$

$$Var(Y^2) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{11750}{9}$$

■.

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y+2)}{54} & , x=0,1,2 \text{ και } y=0,1,2 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(X>1, Y\leq 1)$, $P(X>1 / Y<2)$.

Λύση:

$$P_X(x) = \sum_{y=0}^{2} p(x,y) = \sum_{y=0}^{2} \frac{(x+1)(y+2)}{54} = \frac{2(x+1)}{54} + \frac{3(x+1)}{54} + \frac{4(x+1)}{54} =$$

$$= \frac{9(x+1)}{54} = \frac{x+1}{6} \quad , x=0,1,2.$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} p(x,y) = \sum_{x=0}^{2} \frac{(x+1)(y+2)}{54} = \frac{y+2}{54} + \frac{2(y+2)}{54} + \frac{3(y+2)}{54} =$$

$$= \frac{6(y+2)}{54} = \frac{y+2}{9} \quad , y=0,1,2.$$

(Παρατηρώ ότι $P_X(x)\cdot P_Y(y) = \dfrac{x+1}{6}\cdot\dfrac{y+2}{9} = \dfrac{(x+1)(y+2)}{54} = p(x,y)$

άρα, οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.).

$$P(X>1, Y\leq 1) = \sum_{x=2}^{2}\sum_{y=0}^{1} p(x,y) = \sum_{x=2}^{2}\sum_{y=0}^{1} \frac{(x+1)(y+2)}{54} =$$

$$= \sum_{x=2}^{2}\left[\frac{(x+1)\cdot 2}{54} + \frac{(x+1)\cdot 3}{54}\right] = \frac{6}{54} + \frac{9}{54} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{15}{54} = \frac{5}{18}$$

$$P(X>1 / Y<2) = \frac{P(X>1, Y<2)}{P(Y<2)} = \frac{P(X\geq 2, Y\leq 1)}{P(Y\leq 1)} =$$

$$= \frac{\sum_{Y=0}^{1}\sum_{X=2}^{2} p(x,y)}{P(Y=0)+P(Y=1)} = \frac{\sum_{Y=0}^{1} P(2,y)}{P(Y=0)+P(Y=1)} = \frac{P(2,0)+P(2,1)}{P(Y=0)+P(Y=1)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{54}+\frac{9}{54}}{\frac{2}{9}+\frac{3}{9}} = \frac{1}{2}$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Έστω οι τ.μ. X, Y με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{|x+y|}{8} &, \text{αν } x,y \in A = \{-1, 0, 1\} \\ 0 &, \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y/X=0]$, καθώς και η $Var(Y/X=0)$.

<u>Λύση:</u>

$$P_X(x) = \sum_{Y=-1}^{1} p(x,y) = \sum_{Y=-1}^{1} \frac{|x+y|}{8} = \frac{1}{8}\sum_{Y=-1}^{1}|x+y| = \frac{|x-1|+|x|+|x+1|}{8}, \quad x\in\{-1,0,1\}$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=-1}^{1} p(x,y) = \sum_{x=-1}^{1}\frac{|x+y|}{8} = \frac{1}{8}\sum_{x=-1}^{1}|x+y| = \frac{|y-1|+|y|+|y+1|}{8}, \quad y\in\{-1,0,1\}.$$

$$P_{Y|X}(x,y) = \frac{p(x,y)}{P_X(x)} = \frac{|x+y|}{|x-1|+|x|+|x+1|}$$

$$P_{Y|X}(0,y) = \frac{|y|}{1+0+1} = \frac{|y|}{2}$$

Άρα, $E[Y/X=0] = \sum_{y=-1}^{1} y \cdot p_{Y/X=0}(0,y) = \sum_{y=-1}^{1} y \cdot \frac{|y|}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{y=-1}^{1} y|y| = \frac{1}{2}(-1+1) = 0.$$

και, $E[Y^2/X=0] = \sum_{y=-1}^{1} y^2 \cdot p_{Y/X=0}(0,y) = \sum_{y=-1}^{1} y^2 \frac{|y|}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{y=-1}^{1} y^2|y| = \frac{1}{2}(1+0+1) = 1.$$

Άρα, $Var(Y/X=0) = E[Y^2/X=0] - \left(E[Y/X=0]\right)^2 =$

$$= 1 - 0 = 1. \quad \blacksquare$$

<u>Άσκηση:</u> Αν X, Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ. τότε θα ισχύει: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. (Εφόσον $E(X)$, $E(Y)$ υπάρχουν).

<u>Λύση:</u>

- Έστω X, Y συνεχείς τ.μ. Έστω $f(x,y)$ η από κοινού σ.π.π. της δ.τ.μ. (X,Y). Έστω $f_X(x)$ & $f_Y(y)$ οι περιθώριες συναρτήσεις των X και Y αντίστοιχα.

Λόγω της ανεξαρτησίας των X & Y θα έχουμε:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Τότε, $$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x)\cdot f_Y(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\cdot E[X]\, dy = E[X] \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy =$$

$$= E[X]\cdot E[Y] \; \blacksquare.$$

<u>Άσκηση:</u> Οι χρόνοι ζωής X, Y δύο λαμπτήρων (σε έτη) ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1.
Αν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες:

i) να βρεθεί η από κοινού σ.π.π.

ii) να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- μετά από 1 έτος να μη λειτουργεί κανένας λαμπτήρας,
- μετά από 1 έτος να μη λειτουργεί τουλάχιστον 1 λαμπτήρας.

<u>Λύση:</u>

Θυμάμαι ότι:

Εκθετική Κατανομή: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$\mu = E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

i) $f_X(x) = e^{-x}, \ x \geq 0 \quad , \ F_X(x) = 1 - e^{-x}, \ x \geq 0$

$f_Y(y) = e^{-y}, \ y \geq 0 \quad , \ F_Y(y) = 1 - e^{-y}, \ y \geq 0.$

Οι X, Y ανεξάρτητες, οπότε:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-(x+y)}, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

ii) • $P(X \le 1, Y \le 1) = F(1,1) = (1-e^{-1})(1-e^{-1})$

• $P(X \le 1 \text{ ή } Y \le 1) = P(X \le 1) + P(Y \le 1) - P(X \le 1, Y \le 1) =$

$$= F_X(1) + F_Y(1) - F(1,1) = (1-e^{-1}) + (1-e^{-1}) - (1-e^{-1})^2$$

(θυμάμαι ότι $F_X(x) = P(X \le x)$) ■.

<u>Άσκηση:</u> Οι χρόνοι ζωής (σε 1000-άδες ώρες) δύο εξαρτημάτων ενός μοντέλου αυτοκινήτου... περιγράφονται από δύο συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού σ.π.π.:

$$f(x,y) = \begin{cases} x e^{-x(1+y)} & , x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

<u>Λύση:</u>

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x(1+y)}\, dy = \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+y)}\, dy = x e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy =$$

$$= x e^{-x} \left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^{+\infty} = e^{-x} \left[-e^{-xy} \right]_0^{+\infty} = e^{-x} \quad , x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x(1+y)}\, dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+y)}\, dx = \int_0^{+\infty} x \left[-\frac{e^{-x(1+y)}}{1+y} \right]' dx =$$

$$= \left[-\frac{x}{1+y} e^{-x(1+y)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} e^{-x(1+y)}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{1+y}\left[x\, e^{-x(1+y)}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{1+y}\left[-\frac{e^{-x(1+y)}}{1+y}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{1+y}\left[-\left[\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x(1+y)}) - 0\right]\right] + \frac{1}{(1+y)^2}\left[-\lim_{x\to+\infty}(e^{-x(1+y)}) + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+y)^2} \quad , y \geq 0 .$$

Παρατηρώ ότι: $f_X(x)\cdot f_Y(y) = e^{-x}\cdot\frac{1}{(1+y)^2} \neq xe^{-x(1+y)} = f(x,y)$

Άρα, X, Y όχι ανεξάρτητες. ■