Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #5

Εκθετική Κατανομή

Μια συνεχής κατανομή. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

και συνάρτηση κατανομής: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$

Η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Άσκηση: Ένα φορτηγό μεταφέρει προϊόντα από την πόλη Α στην πόλη Β και επιστρέφει ξανά στην Α. Έστω ότι ο χρόνος που απαιτείται για να κάνει το ταξίδι αυτό, ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 20 ώρες.

i) Ποιά η πιθανότητα το ταξίδι να διαρκέσει το πολύ 15 ώρες;

ii) — // — να διαρκέσει από 15 μέχρι 25 ώρες;

iii) — // — να διαρκέσει περισσότερες από 25 ώρες;

iv) — // — να διαρκέσει παραπάνω από 40 ώρες δεδομένου ότι ήδη έχουν περάσει 15 ώρες από τη στιγμή που το φορτηγό έφυγε απο την πόλη Α;

v) Ας υποθέσουμε οτι η διάρκεια του καθε ταξιδιού είναι ανεξάρτητη από τις διάρκειες των προηγούμενων και επόμενων ταξιδιών, ποια η πιθανότητα ακριβώς 2 στα 5 ταξίδια να διαρκούν περισσότερες απο 25 ώρες;

<u>λύση:</u>

Έστω X τ.μ. που μετρά το χρόνο που διαρκεί το ταξίδι. Απο υπόθεση, η $X \sim$ Εκθετική κατανομή με $E[X]=20h$, άρα $\lambda=\frac{1}{20}$, ενώ η σ.π.π. θα είναι:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}=\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x} & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$$

i) $$P(X\leq 15)=\int_{-\infty}^{15} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{15}\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}\,dx=\frac{1}{20}\int_{0}^{15}e^{-\frac{1}{20}x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{20}\left[-20e^{-\frac{1}{20}x}\right]_0^{15}=\frac{1}{20}\left[-20e^{-\frac{15}{20}}+20e^{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot 20\left[-e^{-\frac{3}{4}}+1\right]=1-e^{-\frac{3}{4}}$$

ii) $P(15 \le X \le 25) = \int_{15}^{25} f(x)\,dx = \int_{15}^{25} \frac{1}{20} e^{-\frac{1}{20}x} dx =$

$= \frac{1}{20}\left[-20e^{-\frac{1}{20}x}\right]_{15}^{25} = \frac{1}{20}\cdot 20\left[-e^{-\frac{25}{20}} + e^{-\frac{15}{20}}\right] =$

$= e^{-\frac{3}{4}} - e^{-\frac{5}{4}}$

iii) $P(X > 25) = \int_{25}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{20}\int_{25}^{+\infty} e^{-\frac{1}{20}x}\,dx =$

$= \frac{1}{20}\left[-20\,e^{-\frac{1}{20}x}\right]_{25}^{+\infty} = \frac{1}{20}\left[\lim_{x\to+\infty}\left(-20e^{-\frac{1}{20}x}\right) + 20\,e^{-\frac{25}{20}}\right] =$

$= \frac{1}{20}\cdot 20\cdot e^{-\frac{5}{4}} = e^{-\frac{5}{4}}$

iv) $P(X > 40 / X > 15) = P(X > 15+25 / X > 15) =$

$= P(X > 25) = e^{-\frac{5}{4}}$

v) Θέλω την πιθανότητα ακριβώς 2 στα 5 ταξίδια να διαρκούν περισσότερο από 25h.

Θεωρώ τη μεταβλητή Y, η οποία μετράει το πλήθος των ταξιδιών που διαρκούν περισσότερο από 25h.

Εφόσον η διάρκεια κάθε ταξιδιού είναι ανεξάρτητη από τις διάρκειες των προηγούμενων 5' επόμενων ταξιδιών, η Y ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, όπου ως επιτυχία θεωρούμε το ενδεχόμενο ένα ταξίδι να διαρκεί >25h, με $P(X>25)=e^{-\frac{5}{4}}$

Συνεπώς, $Y \sim B(n=5,\ p=P(X>25))$ με

συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_Y(y)=\begin{cases}\binom{5}{y}\cdot p^{y}(1-p)^{5-y}=\binom{5}{y}e^{-\frac{5y}{4}}\left(1-e^{-\frac{5}{4}}\right)^{5-y}, & y=0,1,2,3,4,5\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

Άρα, ψάχνω :

$$P(Y=2)=\binom{5}{2}e^{-\frac{5}{2}}\left(1-e^{-\frac{5}{4}}\right)^{3}\simeq 0{,}298$$ ∎.

<u>Θυμάμαι:</u> Διωνυμική τ.μ.

Έστω πείραμα με 2 δυνατά αποτελέσματα: Επιτυχία, $P(E)=p$ / Αποτυχία, $P(A)=1-p$

Επαναλαμβάνω το πείραμα n ανεξάρτητες φορές.

$X := \#$ επιτυχιών στις n επαναλήψεις.

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,\dots,n.$$

$X:\Omega\to\mathbb{R}$

Γράφω, $X\sim B(n,p)$.

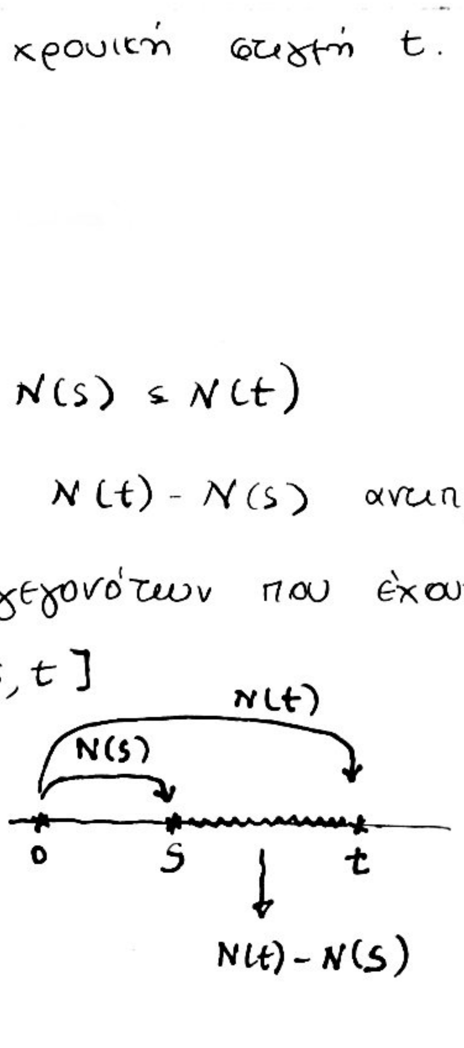
Διαδικασία Poisson

<u>Στοχαστική Διαδικασία</u>: $\{X(t),\ t \in T\}$ είναι μία συλλογή από τ.μ. Δηλ., για κάθε $t \in T$, η $X(t)$ είναι μια τ.μ. (t = χρόνος, $X(t)$ = κατάσταση της διαδικασίας στον χρόνο t)

Το σύνολο T
- → Διακριτό → Διαδικασία διακριτού χρόνου
- ή
- → Συνεχές → Διαδικασία Συνεχούς χρόνου

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης</u>: $\{N(t), t \geq 0\}$, αν $N(t)$ αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό "γεγονότων" που έχουν συμβεί έως τη χρονική στιγμή t.

<u>Ιδιότητες</u>:
- $N(t) \geq 0$
- $N(t) \in \mathbb{Z}$
- Αν $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$
- Για $s<t$, το $N(t) - N(s)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των γεγονότων που έχουν συμβεί στο διάστημα $(s, t]$



<u>Διαδικασία Poisson:</u> Μια διαδικασία καταμέτρησης $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$, αν:

1. $N(0) = 0$
2. Παρουσιάζει ανεξ. προσαυξήσεις (δηλ. οι αριθμοί των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα σε μη επικαλυπτόμενα χρον. διαστήματα είναι ανεξάρτητοι.
3. Ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, δηλ:

$$\boxed{P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Γενικά:

Στοχαστικές Διαδικασίες

Άφιξης

περιστατικά που έχουν χαρακτήρα "άφιξης".

π.χ. →
- άφιξη μηνυμάτων σ' ένα δέκτη
- αγορές πελάτη σε κατάστημα

Bernoulli (διακριτός χρόνος)

Poisson (Συνεχής χρόνος)

Markov

Πειράματα που εξελίσσονται στο χρόνο και η μελλοντική εξέλιξη παρουσιάζει εξαρτήσεις από το παρελθόν.

π.χ. → Η πιθανότητα του επόμενου άλματος εξαρτάται από την παρούσα κατάσταση (τυχαίος περίπατος ... βατράχου ανάμεσα σε 3 βράχια).

Άσκηση: Πελάτες καταφθάνουν σ' ένα μαγαζί σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες ανά ώρα.

i) Αν ο ιδιοκτήτης του μαγαζιού θέλει να το κλείσει για λίγη ώρα, πόσο χρόνο μπορεί να λείψει ώστε ο μέσος όρος των πελατών που θα περάσουν και θα βρουν το μαγαζί κλειστό να είναι μικρότερος από 5;

ii) Αν λείψει για 15 λεπτά, ποιά η πιθανότητα ότι θα χάσει ακριβώς 3 πελάτες;

iii) Αν κλείσει για 45 λεπτά, ποιά η πιθανότητα να χάσει το πολύ 2 πελάτες;

Λύση:

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 10$ πελάτες/ώρα.

Τότε: $$P(N(t)=x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-10t}\frac{(10t)^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$$

i) Αναζητώ το χρόνο t τ.ω.: το χρονικό διάστημα $(s, s+t)$ ο μέσος όρος των πελατών που θα φθάσουν στο μαγαζί να είναι < 5.

Δηλ. ψάχνω t για το οποίο:

$$E[N(s+t)-N(s)] < 5 \Rightarrow E[N(t)] < 5 \Rightarrow \lambda \cdot t < 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t < \frac{5}{\lambda} \Rightarrow t < \frac{5}{10} \Rightarrow t < \frac{1}{2}.$$

Άρα, το μαγαζί μπορεί να μείνει κλειστό για διάστημα μικρότερο της μισής ώρας.

ii) $P(\{3 \text{ πελάτες σε } 15 \text{ λεπτά}\}) =$

$= P(\{3 \text{ πελάτες στο χρον. διάστημα } (s, s+\frac{1}{4}]\}) =$

$= P(N(s+\frac{1}{4}) - N(s) = 3) = P(N(\frac{1}{4}) = 3) =$

$$= \frac{e^{-\frac{10}{4}} \left(\frac{10}{4}\right)^3}{3!} = e^{-\frac{5}{2}} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{6} = \frac{125}{48} e^{-\frac{5}{2}}.$$

iii) $P(\{\text{το πολύ } 2 \text{ πελάτες σε } 45 \text{ λεπτά}\}) =$

$= P(\{\text{το πολύ } 2 \text{ πελάτες στο } (s, s+\frac{3}{4}]\}) =$

$= P(N(s+\frac{3}{4}) - N(s) \leq 2) = P(N(\frac{3}{4}) \leq 2) =$

$= P(N(\frac{3}{4}) = 0) + P(N(\frac{3}{4}) = 1) + P(N(\frac{3}{4}) = 2) =$

$$= \sum_{x=0}^{2} P\left(N\left(\tfrac{3}{4}\right) = x\right) =$$

$$= e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4}\right)^0}{0!} + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4}\right)^1}{1!} + e^{-\frac{30}{4}} \frac{\left(\frac{30}{4}\right)^2}{2!} = \dots$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Υποθέστε ότι κλήσεις φθάνουν σ' ένα τηλεφωνικό κέντρο σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό 3 κλήσεις ανά λεπτό.

i) Έστω T ο χρόνος μεταξύ $2^{ης}$ και $3^{ης}$ κλήσης. Ποιά είναι η κατανομή του T.

ii) Ποιά η πιθανότητα ακριβώς 4 κλήσεις να φθάσουν τα επόμενα 2 λεπτά;

iii) Ποιά η πιθανότητα η επόμενη κλήση να φτάσει μέσα στα επόμενα 20 δευτερόλεπτα και η δεύτερη κλήση (μετά από αυτή) ύστερα από τουλάχιστον 60 sec;

iv) Δοθέντος ότι έχουμε ακριβώς 5 κλήσεις τα τελευταία 2 λεπτά, ποια η πιθανότητα ότι όλες έφτασαν το τελευταίο λεπτό;

<u>Λύση:</u>

Έστω X τ.μ. που μετρά τις κλήσεις στο τηλ. κέντρο.

$X \sim \text{Poisson}(3)$, $\lambda = 3$ κλήσεις /min.

Άρα, $P(N(t)=x) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-3t}\dfrac{(3t)^x}{x!}, \; x=0,1,2,\dots$

i) Οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ αφίξεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

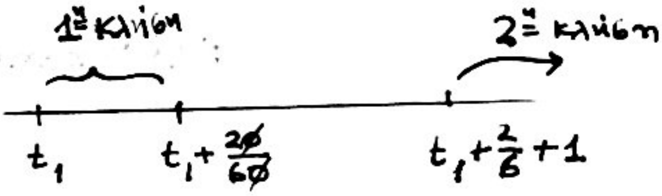
Δηλ. $T \sim Εκθ(3)$

$$f(t) = \begin{cases} 3e^{-3t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

ii) $P(N(2)=4) = e^{-3\cdot 2}\dfrac{(3\cdot 2)^4}{4!} = e^{-6}\dfrac{3^4\cdot 2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 27\cdot e^{-6}$

iii)

~~$P(\{1 \text{ κλήση στο } [t_1, t_1+\frac{1}{3}]\})$~~



$$P\left(\{1 \text{ κλήση στο } [t_1, t_1+\tfrac{1}{3}]\}, \{1 \text{ κλήση στο } [t_1+\tfrac{1}{3}+1]\}\right) =$$

$$= P\{1 \text{ κλήση στο } (0,\tfrac{1}{3})\}, \{1 \text{ κλήση στο } (0,1)\}) =$$

$$= P(N(\tfrac{1}{3})=1)\cdot P(N(1)=1) =$$

$$= e^{-3\frac{1}{3}}\frac{(3\frac{1}{3})^1}{1!}\cdot e^{-3}\frac{3^1}{1!} = e^{-1}\cdot e^{-3}\cdot 3 = 3e^{-4}$$

iv)

$$\overbrace{t_1 \longrightarrow t_1+1 \longrightarrow t_1+2}^{5 \text{ κλήσεις}}$$
$$t_1 \longrightarrow \underbrace{t_1+1 \longrightarrow t_1+2}_{5 \text{ κλήσεις}}$$

$$P\Big(\{5 \text{ κλήσεις στο } [t_1+1, t_1+2]\} \,/\, \{5 \text{ κλήσεις στο } [t_1, t_1+2]\} \Big) =$$

$$= \frac{P\big(\{5 \text{ κλήσεις στο } [t_1+1, t_1+2]\}, \{5 \text{ κλήσεις στο } [t_1, t_1+2]\}\big)}{P\big(\{5 \text{ κλήσεις στο } (t_1, t_1+2)\}\big)} =$$

$$= \frac{P\big(\{5 \text{ κλήσεις στο } (t_1+1, t_1+2)\}, \{0 \text{ κλήσεις στο } (t_1, t_1+1)\}\big)}{P\big(\{5 \text{ κλήσεις στο } (t_1, t_1+2)\}\big)} =$$

$$= \frac{P(N(1)=5)\cdot P(N(1)=0)}{P(N(2)=5)} = \frac{e^{-3}\frac{3^5}{5!}\; e^{-3}\frac{3^0}{0!}}{e^{-6}\frac{6^5}{5!}} =$$

$$= \frac{e^{-3}\cdot e^{-3}\,\frac{3^5}{5!}}{e^{-6}\,\frac{6^5}{5!}} = \left(\frac{3}{6}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Άσκηση: Σ' ένα ασύρματο δίκτυο παρατηρούνται παράνομα σήματα που παρενοχλούν τη συνομιλία δύο οντοτήτων. Η εμφάνιση των σημάτων αποτελεί μία διαδικασία Poisson με ρυθμό 0,1 σήματα το λεπτό.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην υπάρχουν παράνομα σήματα στα πρώτα 2 λεπτά συνομιλίας.

ii) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχει ένα παράνομο σήμα σε 2 λεπτά συνομιλίας.

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 2 παράνομα σήματα στα πρώτα 3 λεπτά συνομιλίας.

iv) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 3 παράνομα σήματα στα πρώτα 2 λεπτά και 5 παράνομα σήματα στα πρώτα 3 λεπτά συνομιλίας.

v) Αν στα πρώτα 2 λεπτά δεν παρουσιάζεται κανένα παράνομο σήμα, να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί ακριβώς ένα παράνομο σήμα στο αμέσως επόμενο λεπτό της συνομιλίας

vi) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν από 1 έως 3 παράνομα σήματα σε 1 λεπτό συνομιλίας.

Λύση:

Έστω μια διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, που μετράει το πλήθος των παράνομων σημάτων που φτάνουν στο δίκτυο σε ορισμένο χρονικό διάστημα με ρυθμό $\lambda = 0,1$ σήματα/λεπτό.

Τότε $P(N(t)=x) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{-\frac{t}{10}}\dfrac{\left(\frac{t}{10}\right)^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

i) $P(\{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\}) = P(N(2)=0) =$

$= e^{-\frac{2}{10}}\dfrac{\left(\frac{2}{10}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{1}{5}} \simeq 0,8187$

ii) $P(\{1 \text{ σήμα στο } [t_0, t_0+2]\}) = P(N(t_0+2)-N(t_0)=1) =$

$= P(N(2)=1) = e^{-\frac{2}{10}}\dfrac{\left(\frac{2}{10}\right)^1}{1!} = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}}$

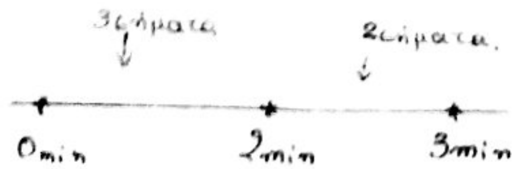
iii) $P(\{0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ σήματα στο χρ. διαστ. } [0,3]\}) =$

$= P(N(3)\le 2) = \sum_{x=0}^{2} P(N(3)=x) =$

$= P(N(3)=0) + P(N(3)=1) + P(N(3)=2) =$

$= e^{-\frac{3}{10}}\dfrac{\left(\frac{3}{10}\right)^0}{0!} + e^{-\frac{2}{10}}\dfrac{\left(\frac{3}{10}\right)^1}{1!} + e^{-\frac{3}{10}}\dfrac{\left(\frac{3}{10}\right)^2}{2!}$

iv)



$P(\{3 \text{ σήματα στο } [0,2]\}, \{5 \text{ σήματα στο } [0,3]\}) =$

$= P(\{3 \text{ σήματα στο } [0,2]\}, \{2 \text{ σήματα στο } [2,3]\}) =$

$$= P(N(2)=3) \cdot P(N(3)-N(2)=2) =$$

$$= P(N(2)=3) \cdot P(N(1)=2) =$$

$$= e^{-\frac{2}{10}} \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^3}{3!} \cdot e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{2!}$$

v) $P(\{1 \text{ σήμα στο } [2,3]\} / \{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\}) =$

$$= \frac{P(\{1 \text{ σήμα στο } [2,3]\}, \{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\})}{P(\{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\})} =$$

$$= \frac{P(\{1 \text{ σήμα στο } [2,3]\}) \cdot P(\{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\})}{P(\{0 \text{ σήματα στο } [0,2]\})} =$$

$$= P(\{1 \text{ σήμα στο } [2,3]\}) =$$

$$= P(N(3)-N(2)=1) =$$

$$= P(N(1)=1) =$$

$$= e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^1}{1!} = \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}}$$

vi) $P(\{\text{απο } 1 \text{ εως } 3 \text{ σηματα στο } [t_1, t_1+1]\}) =$

$= P(\{1 \leq N(t_1+1) - N(t_1) \leq 3\}) =$

$= P(\{1 \leq N(1) \leq 3\}) =$

$$= \sum_{x=1}^{3} P(N(1)=x) = P(N(1)=1) + P(N(1)=2) + P(N(1)=3) =$$

$$= e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^1}{1!} + e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{2!} + e^{-\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{3!}$$