Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #9

Άσκηση: Υποθέστε ότι έχετε μια συνάρτηση rand(·) που σας επιστρέφει έναν τυχαίο αριθμό (ομοιόμορφα κατανεμημένο) στο (0,1). Απαντήστε γράφοντας τον αντίστοιχο ψευδοκώδικα στα παρακάτω ερωτήματα:

i) Πώς θα προσομοιώνατε μία ομοιόμορφη τ.μ. στο $(-5,15)$?

ii) Έστω X μια διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $p(0)=0{,}5$, $p(2)=0{,}2$, $p(4)=0{,}2$ & $p(6)=0{,}1$. Με ποιον τρόπο θα προσομοιώνατε την συγκεκριμένη τ.μ.?

iii) Έστω X μια τ.μ. με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \left(1 + e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^{-1}, \quad \text{για } x > a$$

Προσομοιώστε τη X με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Λύση:

i) Έστω $X \sim U(-5,15)$ με συνάρτηση π.π.:

$$f(x) = \frac{1}{15-(-5)} = \frac{1}{20}, \quad \forall x \in (-5,15)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-5}^{x} \frac{1}{20}\,dt = \left[\frac{1}{20}t\right]_{-5}^{x} = \frac{x+5}{20}$$

Άρα, $F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \le -5 \\ \frac{x+5}{20} & , -5 < x < 15 \\ 1 & , x \ge 15 \end{cases}$

Η F είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

$F(x) = u \Rightarrow \frac{x+5}{20} = u \Rightarrow x+5 = 20u \Rightarrow x = 20u - 5$

Άρα, $F^{-1}(u) = 20u - 5$.

Προσομοίωση:

Βήμα 1: Δημιουργώ τυχαίο αριθμό $U \in (0,1)$

Βήμα 2: Θέτω $X = F^{-1}(U) = 20U - 5$ και

η X είναι μια τ.μ: $X \sim U(-5, 15)$.

ii) X διακριτή.

```
U = rand(.)
if U < 0,5 return 0;
if 0,5 < U < 0,7 return 2;
if 0,7 < U < 0,9 return 4;
    else return 6;
```

iii) $F(x) = u \Rightarrow u = \left[1 + e^{-\frac{x-a}{b}}\right]^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-a}{b}}} \Rightarrow 1 + e^{-\frac{x-a}{b}} = \frac{1}{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x-a}{b}} = \frac{1}{u} - 1 \Rightarrow -\frac{x-a}{b} = \ln\left(\frac{1}{u}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{b} = -\ln\left(\frac{1}{u}-1\right) \Rightarrow x-a = -b\ln\left(\frac{1}{u}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a - b\ln\left(\frac{1}{u}-1\right).$$

Άρα : $v = \text{rand}(\cdot)$

$X = a - b\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right)$

■.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Μαρκοβιανή Αλυσίδα: μία διακριτή στοχαστική διαδικασία $\{X_n,\ n=0,1,2,\dots\}$, όπου X_n παίρνει τιμές από το σύνολο $\{0,1,2,\dots\}$.

P_{ij} : Πιθανότητα Μετάβασης ($1^{ης}$ τάξης) =

= η πιθανότητα η τ.μ. X να βρεθεί στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή $n+1$, δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή n είναι στην κατάσταση i.

$$P_{ij} = P\{X_{n+1}=j \,/\, X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\ \dots,\ X_0=i_0\}.$$

- $P_{ij} \geq 0$
- $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i=0,1,2,\dots$

Γενικά:
Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μία τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου όπου περιλαμβάνει ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση σε κάθε βήμα, με την κατάσταση να μεταβάλλεται

τυχαία μεταξύ των βημάτων. Τα βήματα συχνά θεωρούνται στιγμές χρόνου. Η πιθανότητα του επόμενου βήματος εξαρτάται μόνο απο τη παρούσα κατάσταση του συστήματος κι όχι αθροιστικά απο τα προηγούμενα βήματα.

Μια γνωστή Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι "ο περίπατος του μεθυσμένου": τυχαία διαδρομή σε μία αριθμημένη γραμμή, κάθε βήμα είναι στον επόμενο ή προηγούμενο ακέραιο με ίση πιθανότητα.

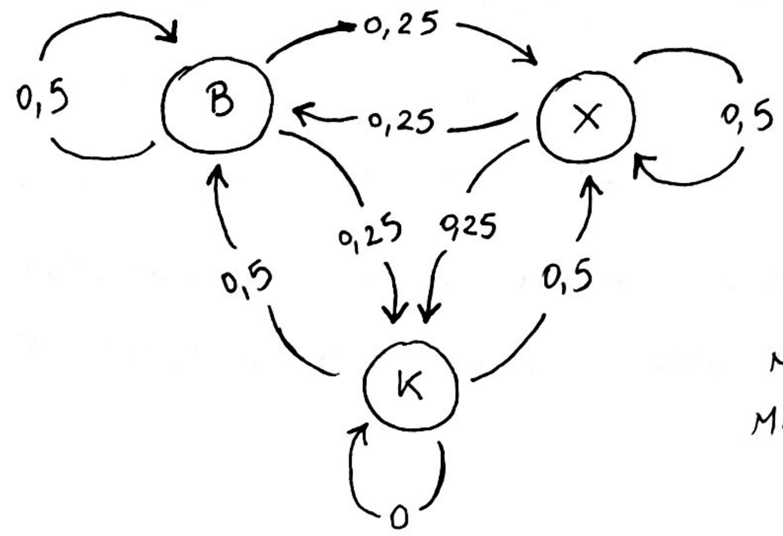
π.χ. → Έστω ότι σ' ένα τόπο έχω τρείς καταστάσεις καιρού: Καλός (Κ), Βροχερός (Β), Χιόνι (Χ). Ισχύουν τα εξής:

1) Ποτέ δεν κάνει καλό καιρό 2 συνεχόμενες ημέρες
2) Αν ο καιρός είναι (Κ), τότε την επομένη ή θα βρέχει (Β) ή θα χιονίζει (Χ) με ίση πιθανότητα.
3) Αν (Χ) ή (Β), τότε η πιθανότητα να διατηρηθεί και την επόμενη μέρα ο καιρός είναι 50% ή απο 25% να αλλάξει σε κάτι άλλο.

Τότε, η αλληλουχία: ΧΧΚΒΚΧΒΒΒΧ

είναι μία αλυσίδα Markov του καιρού για 10 συνεχόμενες ημέρες.

Μπορώ να μοντελοποιήσω το παράδειγμα αυτό ως εξής:



Με
Μαρκοβιανή Αλυσίδα

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ K \\ B \\ X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & B & X \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

ο πίνακας μετάβασης $1^{ης}$ τάξης της Μαρκοβιανής Αλυσίδας.

(!) Παρατήρηση: Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα είναι 1.

Άλλα Παραδείγματα Μαρκοβιανών Αλυσίδων:

- Τυχαίος Περίπατος βατράχου ανάμεσα σε 3 βράχια
- Επιλογή γεύματος
- Αλλαγή κατάστασης απασχόλησης: Εργασία / Ανεργία.

Μαθηματικός Ορισμός της Αλυσίδας Markov:

Μαθηματικό Σύστημα που μεταβάλλεται από μία κατάσταση σε μία άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων.

Οπότε, αν $X_1, X_2, X_3, \ldots$ είναι μία ακολουθία τ.μ., θα είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα ανν:

$$(*) \quad P\left(X_{n+1}=x \,/\, X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n\right) = P\left(X_{n+1}=x \,/\, X_n=x_n\right)$$

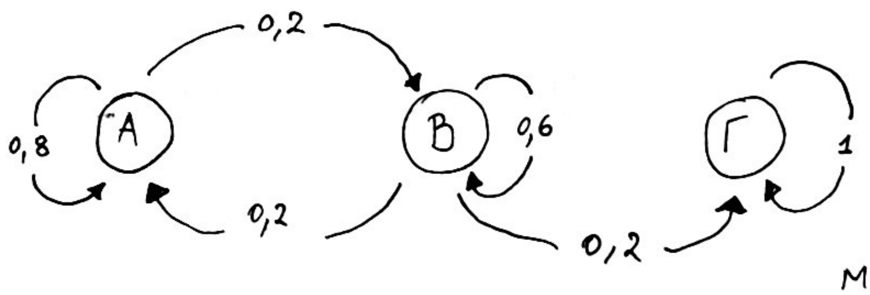
<u>Δηλαδή</u>: η πιθανότητα με την οποία μία μαρκοβιανή αλυσίδα βρίσκεται σε μία κατάσταση <u>δεν</u> εξαρτάται από όλες τις προηγούμενες καταστάσεις, παρά μόνο από την αμέσως προηγούμενη. (Δεν διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές)

Η (*) είναι γνωστή ως <u>Μαρκοβιανή Ιδιότητα</u>.

Άσκηση: Μελετώντας τα αποτελέσματα των φοιτητικών εκλογών παρατηρούμε τα εξής ως προς τις παρατάξεις Α, Β, Γ: οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη Α στις επόμενες εκλογές την ψηφίζουν πάλι με πιθανότητα 0,8 και την παράταξη Β με πιθανότητα 0,2. Οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη Β στις επόμενες εκλογές την ψηφίζουν πάλι με πιθανότητα 0,6, την παράταξη Α με πιθανότητα 0,2 και την παράταξη Γ με πιθανότητα 0,2.
Οι φοιτητές που ψηφίζουν την παράταξη Γ την ξαναψηφίζουν με πιθανότητα 1.
Μοντελοποιήστε το παραπάνω παράδειγμα με μία μαρκοβιανή αλυσίδα και υπολογίστε τον πίνακα μετάβασης $1^{ης}$ τάξης.

Λύση

(Κατάσταση i := Ένας φοιτητής ψηφίζει την παράταξη i.)



Γράφημα Μαρκοβιανής Αλυσίδας

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ \Gamma \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Πίνακας μετάβασης $1^{ης}$ τάξης.

Άσκηση: Έστω $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με $P(Y_n=1)=p$ και $P(Y_n=0)=1-p$.

Για $n=2,3,\dots$ ορίζουμε μία νέα ακολουθία:

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } Y_{n-1}=Y_n=1 \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ν.δ.ο. αυτή <u>δεν</u> είναι αλυσίδα Markov.

<u>Λύση:</u>

Αρκεί ν.δ.ο. για μία συγκεκριμένη τριάδα τιμών της $\{X_n : n=2,3,\dots\}$ <u>δεν</u> ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$P\{X_{n+1}=\alpha / X_n=\beta\} = P\{X_{n+1}=\alpha / X_n=\beta, X_{n-1}=\gamma\} \quad (*)$$

οι τ.μ. X_n μπορούν να πάρουν τιμές: 0 ή 1.

Συγκεκριμένα:

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } Y_{n-1}=Y_n=1. \\ 1, & \text{αν } Y_{n-1}=1, Y_n=0 \\ 1, & \text{αν } Y_{n-1}=0, Y_n=1 \\ 1, & \text{αν } Y_{n-1}=Y_n=0 \end{cases}$$

Οπότε, ας θέσουμε στην (*) τις τιμές $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$:

Τότε:

- $$P\{X_{n+1}=0/X_n=1\} = \frac{P\{X_{n+1}=0, X_n=1\}}{P\{X_n=1\}} =$$

$$= \frac{P\{Y_n=Y_{n+1}=1, \quad Y_n=1, Y_{n-1}=0\}}{P\{Y_{n-1}=1, Y_n=0\}+P\{Y_{n-1}=0, Y_n=1\}+P\{Y_{n-1}=Y_n=0\}} =$$

$$= \frac{(1-p)\cdot p \cdot p}{p(1-p) + p(1-p) + (1-p)^2} = \frac{p^2(1-p)}{(1-p)[2p + (1-p)]} = \frac{p^2}{p+1}.$$

Όμως, η πιθανότητα:

- $P\{X_{n+1} = 0 / X_n = 1, X_{n-1} = 0\} =$

$$= \frac{P\{X_{n+1} = 0,\ X_n = 1,\ X_{n-1} = 0\}}{P\{X_n = 1,\ X_{n-1} = 0\}} =$$

$$= \frac{P\{Y_n = Y_{n+1} = 1,\ \ Y_n = 1, Y_{n-1} = 0,\ \ Y_{n-2} = Y_{n-1} = 1\}}{P\{Y_{n-2} = Y_{n-1} = 1,\ \ Y_n = 0\}} = 0.$$

Άρα, δεν είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα. ■

<u>Άσκηση:</u> Μία αφηρημένη καθηγήτρια έχει δύο ομπρέλες τις οποίες χρησιμοποιεί όταν πηγαίνει από το σπίτι της στο γραφείο και πίσω. Εάν βρέχει και η ομπρέλα είναι διαθέσιμη εκεί που βρίσκεται, την παίρνει. Εαν δεν βρέχει, ξεχνά πάντα να πάρει ομπρέλα. Αν βρέχει με πιθανότητα p και δεν βρέχει με πιθανότητα $1-p$, μοντελοποιήστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μία αλυσίδα Markov και γράψτε τον πίνακα μετάβασης ($1^{ης}$ τάξης).

<u>Λύση:</u>

Κατάσταση i : i ομπρέλες είναι διαθέσιμες εκεί που βρίσκεται (σπίτι ή γραφείο), $i = 0, 1, 2$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1-p"] \arrow[r, bend left, "p"] & 1 \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[loop right, "1-p"]
\end{tikzcd}
$$

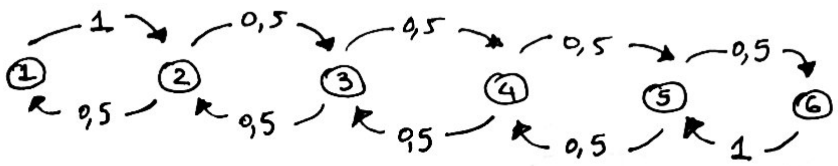
$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Άσκηση: Ένα ποντίκι μετακινείται κατά μήκος ενός πλακόστρωτου δρόμου με 6 πλακάκια. Απο κάθε πλακάκι $i \neq 1, 6$ μετακινείται είτε στο πλακάκι $i-1$ είτε στο $i+1$ με την ίδια πιθανότητα. Απο το πλακάκι 1 ή το πλακάκι 6 μετακινείται στο πλακάκι 2 ή 5 αντίστοιχα, με πιθανότητα 1, Μοντελοποιήστε το πρόβλημα με μία μαρκοβιανή αλυσίδα και βρετε τον πίνακα μετάβασης $1^{ης}$ τάξης.

Λύση:

Κατάσταση i : το ποντίκι βρίσκεται στο i πλακάκι

$$i = 1, \dots, 6.$$



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

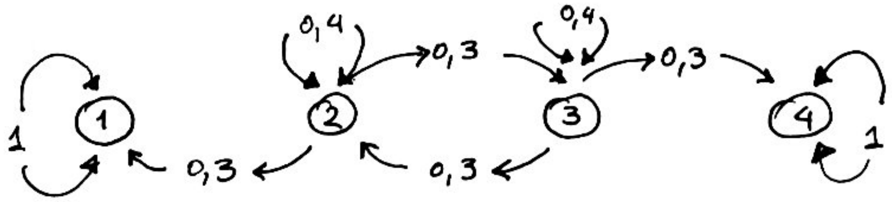
Άσκηση: Μία Μύγα μετακινείται κατα μήκος μιας ευθείας γραμμής με μοναδιαία άλματα. Σε κάθε χρονική περίοδο, μετακινείται μία μονάδα προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά με πιθανότητα 0,3 αντίστοιχα, ενώ παραμένει στην ίδια θέση με πιθανότητα 0,4, εκτός απο την αρχική και τελική θέση.

Αν οι θέσεις είναι συνολικά 4, να μοντελοποιήσετε το πρόβλημα με μία μαρκοβιανή αλυσίδα. Ποιές θα πρέπει να είναι οι πιθανότητες μετάβασης απο την 1η θέση και την τελευταία θέση, αν υποθέσουμε οτι όταν η μύγα βρεθεί σε αυτές τις θέσεις, δεν μετακινείται σε κάποια άλλη διπλανή.

Λύση:

Έστω i η κατάσταση: η μύγα βρίσκεται στην i-θέση.

$$i = 1, 2, 3, 4.$$



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Διότι, όταν η μύγα βρεθεί στην 1η ή 4η θέση, τότε το σίγουρο είναι οτι στον επόμενο χρόνο θα είναι πάλι εκεί. Άρα, η πιθανότητα μετάβαση απο την 1η θέση στην 1η (αντίστοιχα απο την 4η θέση στην 4η) θα είναι 1.

Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα $\mathbb{P}$ είναι 1.