Στοχαστική Ανάλυση -

Φροντιστήριο #10

Μαρκοβιανές Αλυσίδες (συνέχεια...)

Πιθανότητα μετάβασης n-τάξης: $P_{ij}^{(n)}$: είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην j μετά από n βήματα.

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+k} = j / X_k = i\} \quad n, i, j \geq 0.$$

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(m)}$$

Δηλ. η πιθανότητα να μεταβώ από την κατάσταση i στην j μετά από $n+m$ βήματα μέσω μονοπατιού που περνά από την κατάσταση k.

Πίνακας Μετάβασης n-οστής τάξης:

$$\mathbb{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & P_{02}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & & & \\ P_{i0}^{(n)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Ισχύει ότι:

$$\boxed{\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{(n)} \cdot \mathbb{P}^{(m)}}$$

Κατηγοριοποίηση καταστάσεων:

- Η κατάσταση j είναι προσβάσιμη από την κατάσταση i $(i \to j)$ αν $P_{ij}^{(n)} > 0$, για κάποιο $n > 0$.

- Οι καταστάσεις i, j επικοινωνούν ανν $i \to j$ & $j \to i$ $(i \leftrightarrow j)$

Ιδιότητες: (Σχέση ισοδυναμίας)

- $i \leftrightarrow i$ (διότι $P_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i / X_0 = i\} = 1$)
- Αν $i \leftrightarrow j$ τότε και $j \leftrightarrow i$
- Αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$ $\Rightarrow$ $i \leftrightarrow k$.

Άρα, η σχέση "$\leftrightarrow$" είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Δύο καταστάσεις που επικοινωνούν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, ή κλάση επικοινωνίας.

- Ανάγωγη Μαρκοβιανή Αλυσίδα: αν αποτελείται από μία μόνο κλάση επικοινωνίας. (Δηλ. όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους.

- Έμμονη Κατάσταση: Αν η πιθανότητα f_i να ξαναβρεθώ στην κατάσταση i μετά από n βήματα (ξεκινώντας από την i) είναι $f_i = 1$.

- Μεταβατική Κατάσταση: Αν η παραπάνω $f_i < 1$.

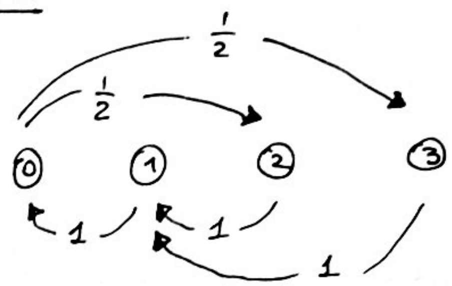
- Απορροφητική Κατάσταση: Αν είναι αδύνατο να φύγουμε από αυτή την κατάσταση.
Άρα, $P_{ii} = 1$ και $P_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

Άσκηση: Δίνονται οι πίνακες μετάβασης δύο Μαρκοβιανών αλυσίδων:

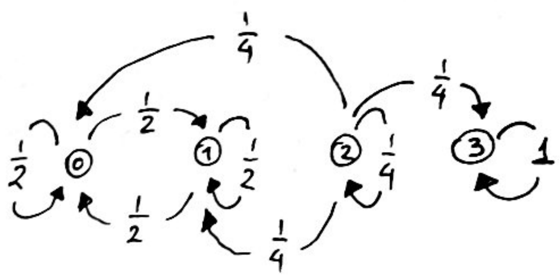
$$\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να σχηματίσετε τα γραφήματα, να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας και να κατηγοροποιήσετε τις καταστάσεις. Έπειτα, να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P_{12}^{(2)}$ για την πρώτη αλυσίδα και $P_{23}^{(3)}$ για την δεύτερη αλυσίδα.

Λύση:



Μαρκοβ. Αλυσίδα 1.



Μαρκοβ. Αλυσίδα 2.

Κλάσεις ισοδυναμίας:

Για την Μαρκοβ. Αλυσίδα 1:

$\{0, 1, 2, 3\}$.

Αναγωγη Αλυσίδα.

Για την Μαρκοβιανή Αλυσίδα 2:

$\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

Κατηγοριοποίηση Καταστάσεων:

Για την Μαρκοβ. Αλυσίδα 1:

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες (η πιθανότητα να ξαναβρεθώ μετά απο n βήματα είναι 1)

Για την Μαρκοβιανή Αλυσίδα 2:

Κατάσταση 3: Εμμονη
Κατάσταση 2: μεταβατική
Καταστάσεις 0 και 1: Έμμονες

• Θα υπολογίσω το $P_{12}^{(2)}$ για την πρώτη αλυσίδα.

Θα υπολογίσω πρώτα τον $\mathbb{P}_1^{(2)}$ (πίνακας μετάβασης 2ης τάξης).

$$\mathbb{P}_1^{(2)} = \mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Άρα, } P_{12}^{(2)} = \frac{1}{2}.$$

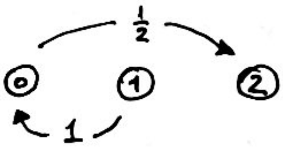
• Θα υπολογίσω το $P_{23}^{(3)}$ για την δεύτερη αλυσίδα.

Θα υπολογίσω πρώτα τον $\mathbb{P}_2^{(3)}$ (πίνακας μετάβασης 3ης τάξης).

$$\mathbb{P}_2^{(3)} = \mathbb{P}_2 \cdot \mathbb{P}_2 \cdot \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{21}{64} & \frac{21}{64} & \frac{1}{64} & \boxed{\frac{21}{64}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Άρα, } P_{23}^{(3)} = \frac{21}{64}$$

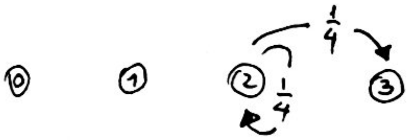
<u>β' τρόπος</u> | Μπορώ να βρω τις ζητούμενες πιθανότητες ($P_{12}^{(2)}$ & $P_{23}^{(3)}$) και απο τα αντίστοιχα γραφήματα των αλυσίδων.

Συγκεκριμένα, για την αλυσίδα 1: Το $P_{12}^{(2)}$ είναι η πιθανότητα να μεταβώ απο το 1 στο 2 σε 2 βήματα.



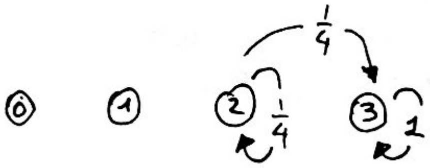
$0 \to 1 \to 2$ με πιθανότητα $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Για την αλυσίδα 2 και τον πιθανότητα $P_{23}^{(3)}$, είναι η πιθανότητα να μεταβώ απο το 2 στο 3 σε 3 βήματα. Έχω τις εξής περιπτώσεις:



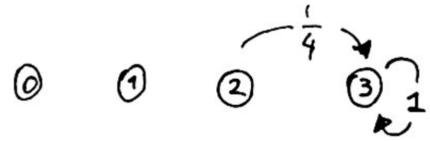
<u>Μονοπάτι Α:</u> $2 \to 2 \to 2 \to 3$

με πιθανότητα: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$



<u>Μονοπάτι Β:</u> $2 \to 2 \to 3 \to 3$

με πιθανότητα: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{16}$



<u>Μονοπάτι Γ:</u> $2 \to 3 \to 3 \to 3$

με πιθανότητα: $\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

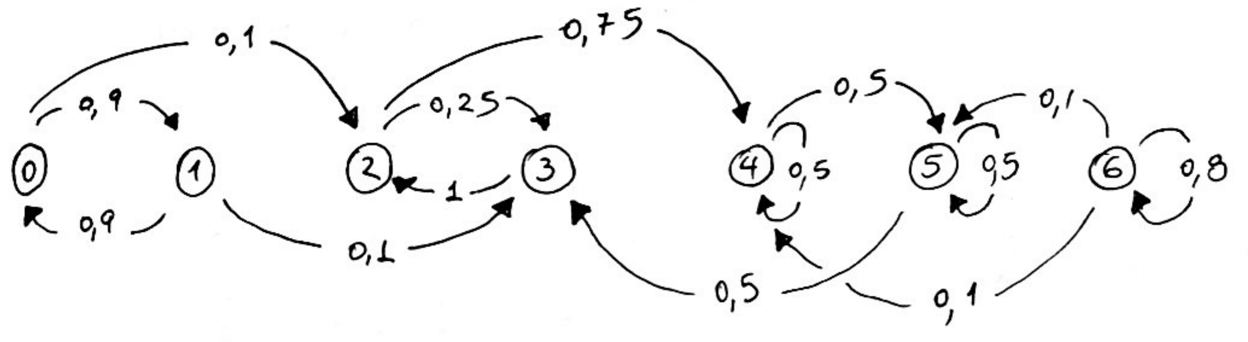
Άρα, $P_{23}^{(3)} = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{21}{64}$ ■.

<u>Άσκηση:</u> Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα έχει επτά καταστάσεις αριθμημένες από 0 έως 6 και ο πίνακας μετάβασης 1ης τάξης είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{array}$$

Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

λύση:



Κλάσεις ισοδυναμίας:

$$\underbrace{\{0,1\}}_{\text{μεταβατικές}} \quad , \quad \underbrace{\{2,3,4,5\}}_{\text{έμμονες}} \quad , \quad \underbrace{\{6\}}_{\text{μεταβατική}}$$

■

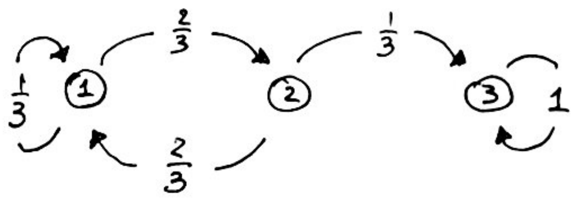
Άσκηση: Έστω ο πίνακας μετάβασης πρώτης τάξης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας να είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας. Ποιές είναι έμμονες και ποιές μεταβατικές καταστάσεις; Υπολογίστε την πιθανότητα:

$$P(X_1 = 2,\ X_3 = 3 / X_0 = 1).$$

Λύση:



Παρατηρώ ότι: $1 \to 2$ κ' $2 \to 1$: Άρα $1 \leftrightarrow 2$

Η κατάσταση 3 δεν επικοινωνεί με καμία άλλη κατάσταση.

Άρα, έχω 2 κλάσεις ισοδυναμίας:

$$\{1, 2\} \quad \text{κ'} \quad \{3\}.$$

Η κατάσταση 3 είναι έμμονη και απορροφητική.

Οι καταστάσεις 1, 2 είναι μεταβατικές.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(X_1 = 2, X_3 = 3 / X_0 = 1)$ βρίσκω όλα τα δυνατά μονοπάτια που ξεκινούν από το 1, σε ένα βήμα είναι στο 2 και στα επόμενα 2 βήματα στο 3.

Από το γράφημα, το μοναδικό τέτοιο μονοπάτι, είναι το:

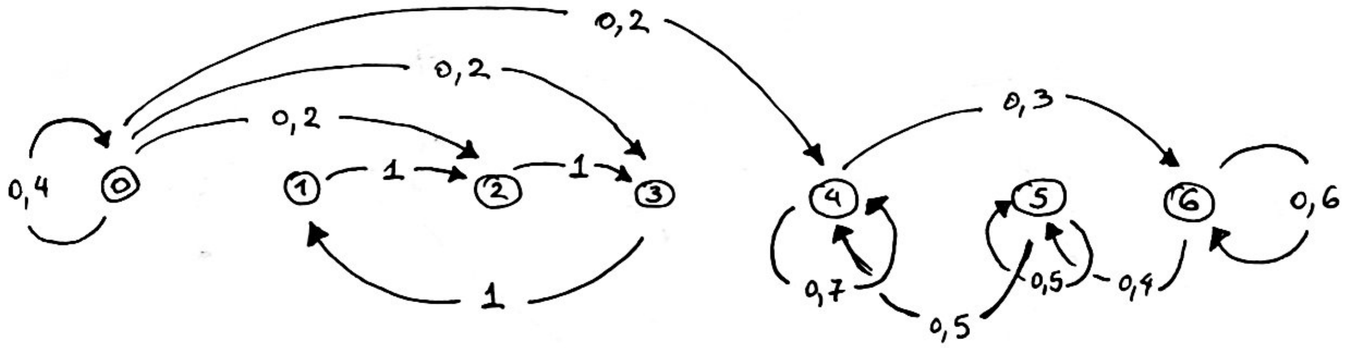
$$1 \to 2 \to 3 \to 3 \quad \text{με πιθανότητα: } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9} \quad \blacksquare.$$

__Άσκηση:__ Έστω ο πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας με καταστάσεις $\{0,1,2,3,4,5,6\}$:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Να κάνετε το γράφημα της αλυσίδας. Να βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας. Ποιές καταστάσεις είναι έμμονες και ποιές μεταβατικές;

__Λύση:__



Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{0\}$, $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$.

Έμμονες καταστάσεις: 1, 2, 3, 4, 5, 6

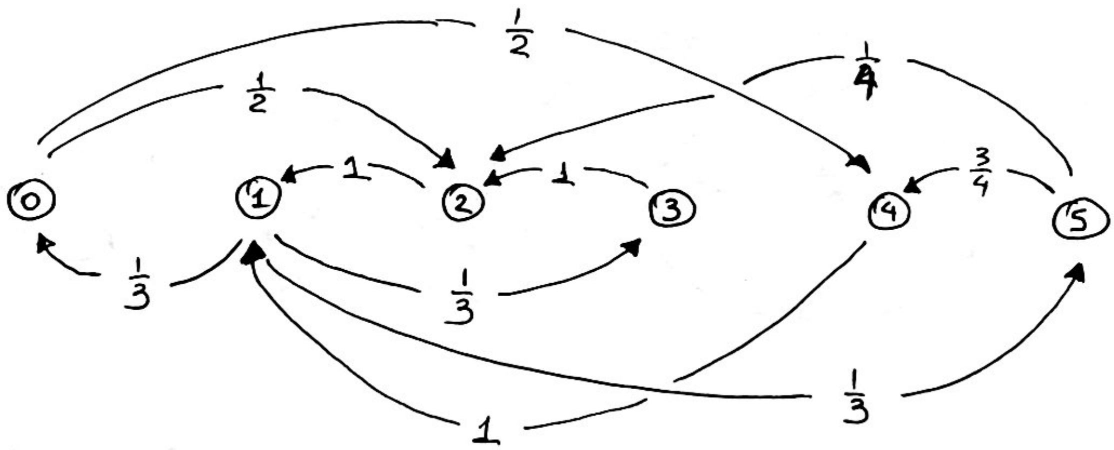
Μεταβατικές καταστάσεις: 0

Άσκηση: Έστω μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης τον:

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Σχηματίστε το γράφημα της αλυσίδας. Ποιές είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας; Ποιές είναι έμμονες και ποιές μεταβατικές καταστάσεις;

Λύση:



Παρατηρώντας την αλυσίδα, βλέπω ότι:

- $0 \to 2 \to 1$ και $1 \to 0$: Άρα $0 \leftrightarrow 1$
- $0 \to 2$ και $2 \to 1 \to 0$: Άρα $0 \leftrightarrow 2$
- $0 \to 2 \to 1 \to 3$ και $3 \to 2 \to 1 \to 0$: Άρα $0 \leftrightarrow 3$
- $0 \to 4$ και $4 \to 1 \to 0$: Άρα $0 \leftrightarrow 4$
- $1 \to 5$ και $5 \to 4 \to 1$: Άρα $1 \leftrightarrow 5$

Οπότε, έχω μία κλάση ισοδυναμίας: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Η αλυσίδα είναι Ανάγωγη.

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες (η πιθανότητα να ξαναβρεθώ μετά από n βήματα είναι 1 για κάθε κατάσταση i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

<u>Άσκηση:</u> Έστω μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ όπου κάθε $X_n \in \{1, 2, 3\}$. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης πρώτης τάξης είναι:

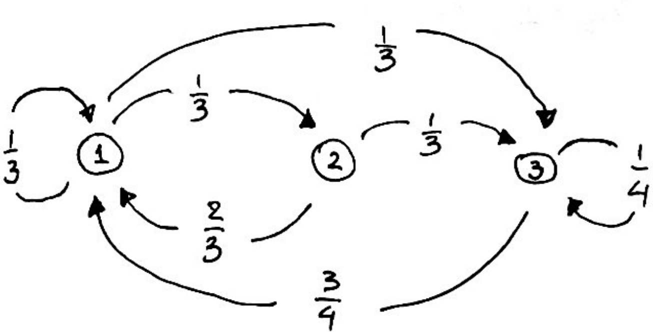
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X_2 = 2)$

Γνωρίζουμε ότι $P(X_0 = i) = \frac{1}{3}$, $\forall\, i = 1, 2, 3$.

<u>Λύση:</u>

Το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Παρατηρώ ότι:

$1 \to 2$ και $2 \to 1$: $1 \leftrightarrow 2$

$1 \to 2 \to 3$ και $3 \to 1$: $1 \leftrightarrow 3$

Άρα, έχω μία κλάση ισοδυναμίας:

$\{1, 2, 3\}$.

Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους.

— // — είναι έμμονες.

$$P(X_2=2) = \sum_{i=1}^{3} P(X_2=2 / X_0=i) \cdot P(X_0=i) =$$

$$= P(X_2=2/X_0=1)\cdot P(X_0=1) + P(X_2=2/X_0=2)\cdot P(X_0=2) +$$

$$+ P(X_2=2/X_0=3)\cdot P(X_0=3) =$$

$$= P_{12}^{(2)} \cdot \frac{1}{3} + P_{22}^{(2)} \cdot \frac{1}{3} + P_{32}^{(2)} \cdot \frac{1}{3} \quad (*).$$

Υπολογίζω τον πίνακα μετάβασης $2^{ης}$ τάξης:

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}\cdot\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{9} & \frac{11}{36} \\ \frac{17}{36} & \frac{2}{9} & \frac{11}{36} \\ \frac{7}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

Οπότε, η σχέση (*) γίνεται:

$$P(X_2=2) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{36}$$

<u>Άσκηση:</u> Ένας βουλευτής αποκαλύπτει στον Α το αν θα είναι υποψήφιος ή όχι στις επόμενες εκλογές. Ο Α το μεταφέρει στον Β, ο Β στον Γ κ.τ.λ. Έστω ότι υπάρχει πιθανότητα a κάθε άνθρωπος να αλλάξει την πληροφορία που έχει και να την μεταφέρει λανθασμένα στον επόμενο. Μοντελοποιήστε το παραπάνω παράδειγμα με μία μαρκοβιανή αλυσίδα. Δώστε το γράφημα της αλυσίδας και τον πίνακα μετάβασης πρώτης τάξης.

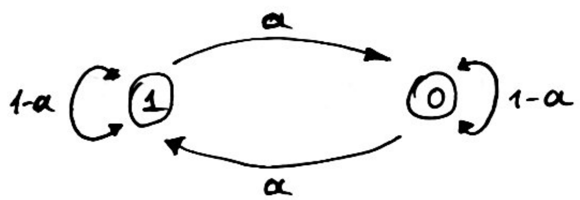
Ποιά η πιθανότητα η πληροφορία που θα λάβει ο τέταρτος κατά σειρά άνθρωπος να είναι σωστή, αν υποθέσουμε ότι $a = 0{,}2$;

<u>Λύση:</u>

Έστω οι καταστάσεις:

1 : κάποιος έχει την σωστή πληροφορία

0 : — // — λάθος πληροφορία.



και ο πίνακας μετάβασης πρώτης τάξης:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα ο τέταρτος άνθρωπος να λάβει τη σωστή απάντηση είναι $P(X_3=1)$.

Από το γράφημα της αλυσίδας, παρατηρώ ότι έχω τις εξής περιπτώσεις ξεκινώντας από την 1 κατάσταση (ο πρώτος άνθρωπος παίρνει τη σωστή πληροφορία από τον βουλευτή), και βρεθώ στην 1 μετά από 3 βήματα:

$1 \to 1 \to 1 \to 1$ με πιθανότητα $(1-\alpha)^3$

$1 \to 1 \to 0 \to 1$ με πιθανότητα $\alpha^2(1-\alpha)$

$1 \to 0 \to 1 \to 1$ με πιθανότητα $\alpha^2(1-\alpha)$

$1 \to 0 \to 0 \to 1$ με πιθανότητα $\alpha^2(1-\alpha)$.

Άρα, $P(X_3=1) = (1-\alpha)^3 + 3\alpha^2(1-\alpha) = (1-\alpha)\left[(1-\alpha)^2+3\alpha^2\right] =$

$= (1-\alpha)\left[1-2\alpha+\alpha^2+3\alpha^2\right] = (1-\alpha)\left[4\alpha^2-2\alpha+1\right]$.

Για $\alpha=0,2$ έχω:

$P(X_3=1) = 0,8\left[4\cdot 0,2^2 - 2\cdot 0,2+1\right] = 0,608$.

β΄ τρόπος: Μπορώ να υπολογίσω την πιθανότητα $P(X_3=1)$ από τον πίνακα μετάβασης 3ης τάξης: $\mathbb{P}^{(3)}$.

$\mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}\times\mathbb{P}\times\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)^2+\alpha^2 & 2\alpha(1-\alpha) \\ 2\alpha(1-\alpha) & \alpha^2+(1-\alpha)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} (1-a)^2+a^2 & 2a(1-a) \\ 2a(1-a) & a^2+(1-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1-a)^3 + a^2(1-a) + 2a^2(1-a) & a[(1-a)^2+a^2] + 2a(1-a)^2 \\ 2a(1-a)^2 + a^3 + a(1-a)^2 & 2a^2(1-a) + (1-a)a^2 + (1-a)^3 \end{bmatrix}$$

Οπότε το στοιχείο P_{11} του $\mathbb{P}^{(3)}$ είναι:

$$P(X_3=1) = (1-a)^3 + a^2(1-a) + 2a^2(1-a) = (1-a)^3 + 3a^2(1-a) \;\blacksquare.$$