Στοχαστική Ανάλυση

Φροντιστήριο #11

<u>Άσκηση:</u> Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

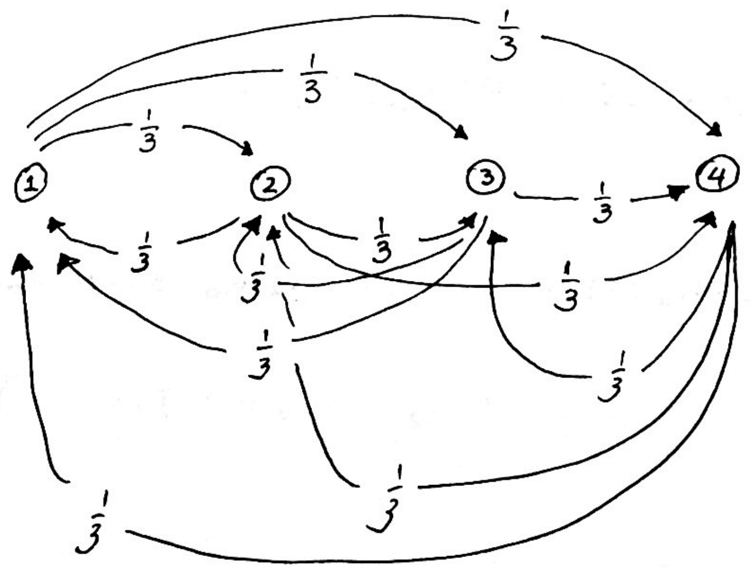
οι καταστάσεις είναι: $\{1,2,3,4\}$.

i) $P(X_2 = 1 / X_0 = 1) = ;$

ii) $P(X_2 = 1)$ αν $P(X_0 = i) = \frac{1}{4}, \forall i$

iii) $P(X_1 = 2, X_3 = 1) = ;$

<u>Λύση:</u>



Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Άρα, έχω μία κλάση επικοινωνίας: $\{1,2,3,4\}$ και η αλυσίδα είναι ανάγωγη.

i) Υπολογίζω τον πίνακα μετάβασης $2^{ης}$ τάξης:

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Άρα, $P(X_2 = 1 / X_0 = 1) = \mathbb{P}_{11}^{(2)} = \frac{1}{3}$.

Διαφορετικά, μπορώ να το υπολογίσω από τα πιθανά μονοπάτια:

- $1 \to 2 \to 1$ με πιθανότητα $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

ή
- $1 \to 3 \to 1$ — // — $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

ή
- $1 \to 4 \to 1$ — // — $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Οπότε $P(X_2 = 1 / X_0 = 1) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

ii) $P(X_2 = 1) = \sum_{i=1}^{4} P(X_2 = 1 / X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) =$

$= P(X_2 = 1 / X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) + P(X_2 = 1 / X_0 = 2) \cdot P(X_0 = 2) + P(X_2 = 1 / X_0 = 3) \cdot P(X_0 = 3) +$

$+ P(X_2 = 1 / X_0 = 4) \cdot P(X_0 = 4) =$

$= P_{11}^{(2)} \cdot \frac{1}{4} + P_{21}^{(2)} \cdot \frac{1}{4} + P_{31}^{(2)} \cdot \frac{1}{4} + P_{41}^{(2)} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{12} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{4}$

iii) $P(X_1=2 / X_3=1) = \sum_{i=1}^{4} P(X_1=2, X_3=1 / X_0=i) \cdot P(X_0=i) =$

$= P(X_1=2, X_3=1 / X_0=1) \cdot P(X_0=1) + P(X_1=2, X_3=1 / X_0=2) \cdot P(X_0=2) +$

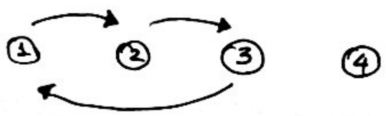
$+ P(X_1=2, X_3=1 / X_0=3) \cdot P(X_0=3) + P(X_1=2, X_3=1 / X_0=4) \cdot P(X_0=4)$

(*)

Κάθε πιθανότητα της μορφής $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=i)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το γράφημα.

Δηλ.:

• $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=1)$



Μονοπάτι α: $1 \to 2 \to 3 \to 1$

με πιθανότητα: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Μονοπάτι β: $1 \to 2 \to 4 \to 1$

με πιθανότητα: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Άρα, $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=1) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$.

• $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=2) = 0$, διότι $2 \to 2$ αδύνατο.

• $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=3)$

Μονοπάτι α: $3 \to 2 \to 3 \to 1$, $p = \frac{1}{27}$

Μονοπάτι β: $3 \to 2 \to 4 \to 1$, $p = \frac{1}{27}$

άρα, $P(X_1=2, X_3=1 / X_0=3) = \frac{2}{27}$

• $P(X_1=2,\ X_3=1 / X_0=4)$

<u>Μονοπάτι α</u>: $4 \to 2 \to 3 \to 1$, $p=\frac{1}{27}$

<u>Μονοπάτι β</u>: $4 \to 2 \to 4 \to 1$, $p=\frac{1}{27}$

Άρα, $P(X_1=2,\ X_3=1 / X_0=4) = \frac{2}{27}$.

Οπότε, η (*) γίνεται:

$$P(X_1=2,\ X_3=1) = \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{4} + 0 + \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\cancel{3}\,\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot 9} = \frac{1}{18} \quad \blacksquare$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω η μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις $\{0,1,2,3,4,5\}$ και πίνακα μετάβασης:

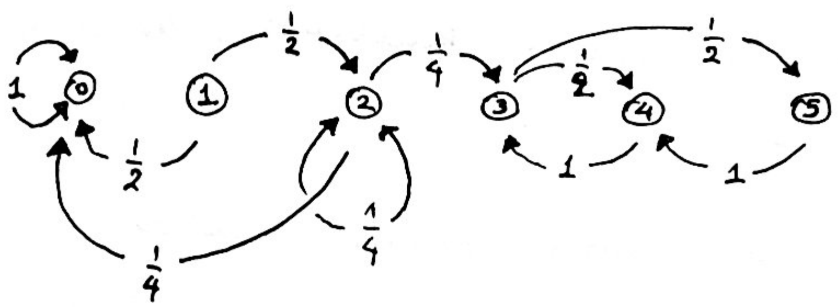
$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

i) Σχηματίστε το γράφημα. Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας. Ποιές καταστάσεις είναι έμμονες, μεταβατικές, απορροφητικές; Ποιά είναι η περίοδος των έμμονων;

ii) Αν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 1, ποιό είναι το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι η αλυσίδα να βρεθεί σε μία έμμονη κατάσταση;

Λύση:

i)



Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3,4,5\}$.

Κατάσταση 0: Έμμονη, απορροφητική, απεριοδική

Καταστάσεις 1 & 2: Μεταβατικές (ξεκινώντας από αυτές δεν επιστρέφω ποτέ σ' αυτές)

Καταστάσεις 3, 4 & 5: Έμμονες (μετά από κάποια βήματα θα επιστρέψω σ' αυτές) Απεριοδικές.

ii) Σχηματίζω τον πίνακα μετάβασης πρώτης τάξης των μεταβατικών καταστάσεων $\mathbb{P}_T$, καθώς και του πίνακα $I - \mathbb{P}_T$. (Μεταβατικές: 1 & 2).

$$\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad I - \mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφω τον $I - P_T$ κι έχω:

$$S = (I - P_T)^{-1} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ψάχνω το αναμενόμενο πλήθος βημάτων μέχρι η Μαρκοβιανή αλυσίδα να βρεθεί σε έμμονη κατάσταση, αν υποθέσω ότι ξεκίνησε από την 1.

Δηλ, ψάχνω το αναμενόμενο πλήθος βημάτων που η αλυσίδα θα παραμείνει στις μεταβατικές καταστάσεις 1 & 2, μέχρι να βρεθεί σε κάποια από τις έμμονες καταστάσεις: 0,3,4 ή 5 αν ξεκίνησε από την 1.

Το πλήθος αυτό είναι το $S_{11} + S_{12} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ βήματα.

(*) Υπολογισμός αντίστροφου:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{r_2 : r_2 \cdot \frac{4}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right] \overset{r_1 : r_1 + \frac{1}{2} r_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \end{array}\right].$$

Άρα, $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$. ■

Περιοδικότητα Καταστάσεων

- Μία κατάσταση i έχει περίοδο k αν κάθε επιστροφή στην κατάσταση i μπορεί να συμβεί μόνο σε πολλ/σια του k χρονικά βήματα.

- Αν $k=1$, τότε η κατάσταση ονομάζεται απεριοδική.

- Η περιοδικότητα χαρακτηρίζει μία ολόκληρη κλάση ισοδυναμίας.

Οριακές Πιθανότητες

- Μπορεί να συμβεί το εξής: $P_{ij}^{(n)} \to \ell$, όταν $n \to +\infty$, $\forall i$.

Δηλ. να υπάρχει μια οριακή πιθανότητα η μαρκοβιανή αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση j μετά απο μεγάλο αριθμό βημάτων ανεξάρτητα απο την κατάσταση i (αρχική κατάσταση).

<u>Θεώρημα:</u> $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ και $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$ και

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1.$$

(αν η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ανάγωγη και εργοδική(*)).

((*) εργοδική = καταστάσεις έμμονες πεπερασμ. πλήθους)

Άσκηση: Ένας μπασκεμπολίστας πετυχαίνει ένα καλάθι σύμφωνα με τις ακόλουθες πιθανότητες:

- $\frac{1}{2}$ αν έχει χάσει τις 2 προηγούμενες προσπάθειες
- $\frac{2}{3}$ αν έχει χάσει στη μία απο τις 2 προηγούμενες προσπάθειες
- $\frac{3}{4}$ αν δεν έχει χάσει στις 2 προηγούμενες προσπάθειες.

Να μοντελοποιήσετε το πρόβλημα με μία μαρκοβιανή αλυσίδα και να υπολογιστούν οι οριακές πιθανότητες.

Λύση:

Ορίζω τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $X_n = 1$, αν η n-οστή βολή είναι εύστοχη και $X_n = 0$, αν η n-οστή βολή είναι άστοχη.

Ορίζω τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $Y_n = (X_n, X_{n+1})$.

Άρα, οι πιθανές τιμές της Y_n είναι: $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

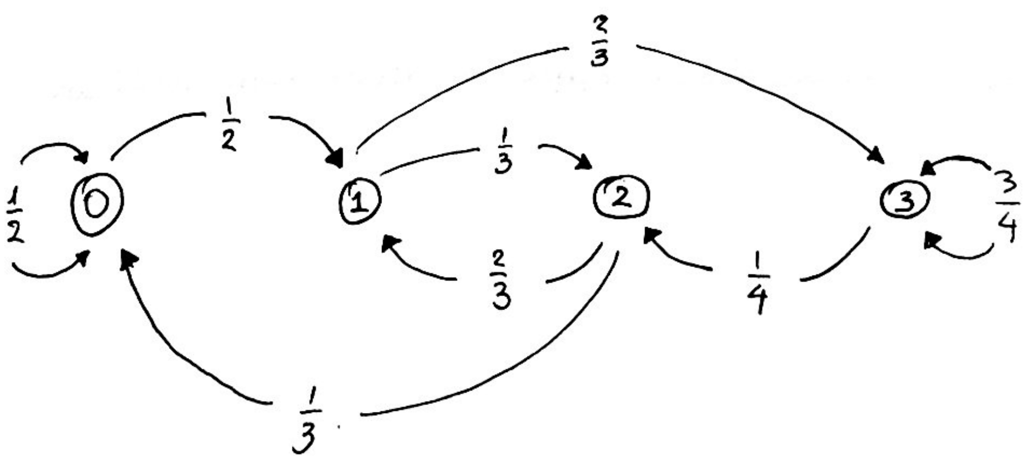
Επομένως, έχω 4 καταστάσεις και τις ονομάζω ως εξής:

0 : $(0,0)$

1 : $(0,1)$

2 : $(1,0)$

3 : $(1,1)$



Και ο πίνακας μετάβασης 1ης τάξης της αλυσίδας είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Κλάσεις ισοδυναμίας: $0 \to 1 \to 2 \to 0$, άρα $1 \leftrightarrow 0$

$1 \leftrightarrow 2$

$1 \to 3 \to 2 \to 1$, άρα $1 \leftrightarrow 3$

Επομένως, έχω μία κλάση ισοδυναμίας: $\{0, 1, 2, 3\}$ και όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες.

Άρα, ορίζονται οι οριακές πιθανότητες:

$\cdot\ \pi_0 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i P_{i0} \Rightarrow \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \pi_3 P_{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + 0 \cdot \pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_2}$ (1)

$\cdot\ \pi_1 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i P_{i1} \Rightarrow \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + 0 \cdot \pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_2}$ (2)

$\cdot\ \pi_2 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i P_{i2} \Rightarrow \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 = 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_1 + 0 \cdot \pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3}$ (3)

$$\cdot\ \pi_3 = \sum_{i=0}^{3} \pi_i P_{i3} \Rightarrow \pi_3 = \pi_0 P_{03} + \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_3 = 0\cdot\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 + 0\cdot\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \Rightarrow \boxed{\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3} \quad (4)$$

και $\boxed{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1}$ (5).

λύνω το (Σ) απ (1) έως (5) :

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 = \pi_2 \\ 3\pi_0 = 2\pi_2 \\ 3\pi_3 = 8\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{8}{3}\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{8}{3}\pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \pi_1 + \pi_1 + \frac{8}{3}\pi_1 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{8}{3}\pi_1 \\ \frac{10}{3}\pi_1 + 2\pi_1 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 = \frac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{8}{3}\pi_1 \\ \frac{16\pi_1}{3} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi_2 = \frac{3}{16} \\ \pi_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{1}{8} \\ \pi_3 = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{1}{2} \\ \pi_1 = \frac{3}{16} \end{array}$$

■

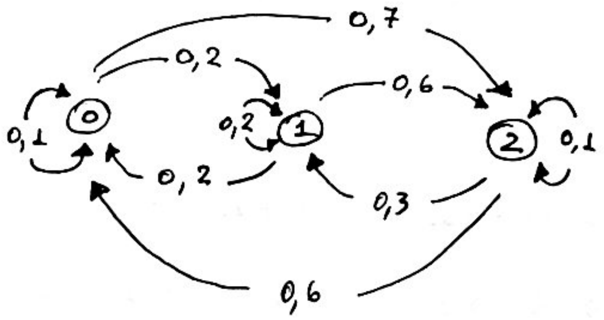
<u>Άσκηση:</u> Έστω η αλυσίδα τριών καταστάσεων $\{0,1,2\}$ με πίνακα μετάβασης:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \mathbb{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Να βρεθούν:

- $P\{X_3 = 1 / X_0 = 0\}$
- $P\{X_3 = 1 / X_1 = 0\}$
- $P\{X_0 = 0 / X_3 = 1\}$ αν $P\{X_0 = i\} = \frac{1}{3}$, $\forall i$.

<u>Λύση:</u>



Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Άρα, έχω μία κλάση ισοδυναμίας: $\{0,1,2\}$. Ανάγωγη Αλυσίδα.

Υπολογίζω τον $\mathbb{P}^{(3)}$.

για την πιθανότητα $P\{X_3 = 1 / X_0 = 0\}$ υπολογίζω το στοιχείο $P_{01}^{(3)}$

α Βρίσκω τα πιθανά μονοπάτια:

- $0 \to 0 \to 0 \to 1$ με πιθανότητα $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2$
- $0 \to 0 \to 1 \to 1$ —//— $0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$
- $0 \to 1 \to 1 \to 1$ —//— $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$
- $0 \to 1 \to 0 \to 1$ —//— $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$
- $0 \to 2 \to 1 \to 1$ —//— $0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2$
- $0 \to 2 \to 2 \to 1$ —//— $0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3$

• $0 \to 2 \to 0 \to 1$ με πιθανότητα $0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2$

... και αθροίζω τις παραπάνω πιθανότητες.

Για την πιθανότητα $P\{X_3 = 1 / X_1 = 0\}$ έχω:

$$P\{X_3 = 1 / X_0 = 0\} = \sum_{i=0}^{2} P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = i\} \cdot P(X_0 = i) =$$

$$= P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 0\} \cdot P\{X_0 = 0\} + P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 1\} \cdot P(X_0 = 1) +$$

$$+ P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 2\} \cdot P(X_0 = 2). \quad (*)$$

• Για το $P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 0\}$:

πιθανά μονοπάτια: (α) $0 \to 0 \to 0 \to 1$ με πιθαν. $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,002$

(β) $0 \to 0 \to 1 \to 1$ —//— $0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,004$

(γ) $0 \to 0 \to 2 \to 1$ —//— $0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,042$

• Για το $P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 1\}$:

πιθανά μονοπάτια: (α) $1 \to 0 \to 0 \to 1$ με πιθαν. $0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,004$

(β) $1 \to 0 \to 1 \to 1$ —//— $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

(γ) $1 \to 0 \to 2 \to 1$ —//— $0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,042$

• Για το $P\{X_3 = 1, X_1 = 0 / X_0 = 2\}$:

πιθανά μονοπάτια: (α) $2 \to 0 \to 0 \to 1$ με πιθαν. $0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,012$

(β) $2 \to 0 \to 1 \to 1$ —//— $0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,024$

(γ) $2 \to 0 \to 2 \to 1$ —//— $0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,126$

Άρα, η (*) γίνεται:

$$P\{X_3 = 1 / X_1 = 0\} = (0{,}004 + 0{,}042 + 0{,}002)\frac{1}{3} + (0{,}004 + 0{,}008 + 0{,}042)\frac{1}{3} +$$

$$+ (0{,}012 + 0{,}024 + 0{,}126)\frac{1}{3} =$$

$$= 0{,}088 \blacksquare$$

<u>Άσκηση:</u> Έστω ότι μία αράχνη κυνηγά μια μύγα ενώ κινείται μεταξύ των θέσεων 1 & 2 με βάση τον πίνακα μετάβασης:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

Η μύγα κινείται μεταξύ των θέσεων 1 & 2 σύμφωνα με τον πίνακα μετάβασης:

$$P_M = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Η αράχνη πιάνει την μύγα αν συναντηθούν στο ίδιο σημείο. Έστω ότι η αράχνη ξεκινά απο το 1 και η μύγα απο το 2.

α) Μοντελοποιήστε το παράδειγμα με μία αλυσίδα 3 καταστάσεων και βρείτε τον πίνακα μετάβασης.

β) Κατά μέσο όρο, μετά απο πόσα βήματα η αράχνη θα πιάσει τη μύγα;

<u>Λύση:</u>

Κατάσταση 0 : Αράχνη και μύγα στο ίδιο σημείο
(A:1 & M:1 ή A:2 & M:2)

Κατάσταση 1 : A:1 & M:2

Κατάσταση 2 : A:2 & M:1

- $P_{00} = 1 \quad , \quad P_{01} = P_{02} = 0.$

- $P_{10} = P(A:1, M:2 \rightsquigarrow A:1, M:1 \text{ ή } A:2, M:2) =$

$= P_{A11} \cdot P_{M21} + P_{A12} \cdot P_{M22} =$

$= 0,7 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,54$

- $P_{11} = P(A:1, M:2 \rightarrow A:1, M:2) = P_{A11} \cdot P_{M22} = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$

- $P_{12} = P(A:1, M:2 \rightarrow A:2, M:1) = P_{A12} \cdot P_{M21} = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$

- $P_{20} = P(A:2, M:1 \rightarrow A:1, M:1 \text{ ή } A:2, M:2) =$

$= P_{A21} \cdot P_{M11} + P_{A22} \cdot P_{M12} =$

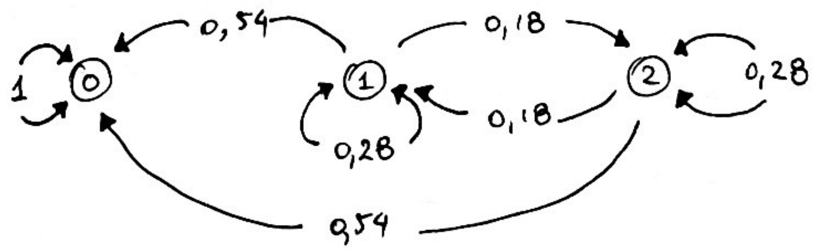
$= 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54$

- $P_{21} = P(A:2, M:1 \rightsquigarrow A:1, M:2) = P_{A21} \cdot P_{M12} = 0,18$

- $P_{22} = P(A:2, M:1 \rightsquigarrow A:2, M:1) = P_{A22} \cdot P_{M11} = 0,28$

Συνεπώς, ο πίνακας μετάβασης πρώτης τάξης είναι:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,54 & 0,28 & 0,18 \\ 0,54 & 0,18 & 0,28 \end{bmatrix} \end{array}$$



Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{0\}$, $\{1,2\}$

0: Έμμονη & απορροφητική

1,2: Μεταβατικές.

$$P_T = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,18 \\ 0,18 & 0,28 \end{pmatrix} , \quad I - P_T = \begin{pmatrix} 0,72 & -0,18 \\ -0,18 & 0,72 \end{pmatrix}$$

$$S = (I - P_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,48 & 0,37 \\ 0,37 & 1,48 \end{pmatrix}$$

Η αράχνη ξεκινά από την θέση 1 & η μύγα από την θέση 2. Συνεπώς, η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 1.

Ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να πιασεί η μύγα είναι:

$S_{11} + S_{12} = 1,85$. βήματα ∎.