Πιθανότητες

Φροντιστήριο #2

Ασκήσεις:

Άσκηση: Τοποθετούμε σ' ένα ράφι 6 βιβλία μαθηματικών και 4 φυσικής. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι 3 ορισμένα βιβλία μαθηματικών μαζί.

Λύση:

Όλα τα βιβλία μπορούν να διαταχθούν με 10! διαφορ. τρόπους. Αν θεωρήσω τα 3 συγκεκριμένα βιβλία σαν ένα, τότε έχουμε 8! διαφορ. τρόπους να διαταχθούν τα βιβλία. Τα 3 αυτά συγκεκριμένα βιβλία έχουν 3! διαφορ. τρόπους να διαταχθούν.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{8!\,3!}{10!} = \frac{2\cdot 3}{9\cdot 10} = \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{15} \quad \blacksquare$$

Άσκηση: Οι πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας μετά από 20 χρόνια είναι 0,8 και μιά γυναίκα 0,9. Να βρεθεί η πιθανότητα μετά από 20 χρόνια:

i) να ζουν και οι δύο.

ii) να μη ζει κανένας

iii) να ζει τουλάχιστον ένας

Λύση:

Έστω A το ενδεχόμενο: "ο άντρας είναι ζωντανός μετά από 20 χρόνια"

B — // — : " η γυναίκα — // —

Τότε $P(A)=0,8$, $P(B)=0,9$.

Τα A και B ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

i) $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0,8\cdot 0,9 = 0,72$

ii) $P(A'\cap B') = P(A')\cdot P(B') = 0,2\cdot 0,1 = 0,02$

iii) $P(\text{τουλάχιστον ένας ζωντανός}) = 1 - P(\text{κανένας ζωντανός}) =$

$= 1 - 0,02 = 0,98$. ■

Άσκηση: Δύο όπλα A & B σημαδεύουν ένα στόχο. Η πιθανότητα ώστε το όπλο A να χτυπήσει τον στόχο είναι $\frac{1}{3}$, η πιθανότητα ώστε το όπλο B να χτυπήσει τον στόχο είναι $\frac{1}{5}$. Τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i) το A να μην χτυπήσει τον στόχο
ii) και τα δύο όπλα να χτυπήσουν τον στόχο.
iii) τουλάχιστον ένα να χτυπήσει τον στόχο
iv) κανένα όπλο να χτυπήσει τον στόχο.

Λύση:

$P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$

i) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ii) $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

iii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$

iv) $P((A\cup B)') = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ ■

Άσκηση: Μία μηχανή κατασκευάζει 12.000 βίδες την ημέρα από τις οποίες το 3% είναι ελαττωματικές. Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι ελαττωματικές 12 από ένα τυχαίο δείγμα με 600 βίδες.

Λύση:

Στις 100 βίδες οι 3 είναι ελαττωματικές

12.000 x;

$$x = 3 \cdot \frac{12.000}{100} = 360 \text{ βίδες.}$$

Άρα, στις 12.000 βίδες → 360 ελαττωμ.
→ 11.640 καλές

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{\binom{360}{12} \cdot \binom{11.640}{588}}{\binom{12.000}{600}}$$

■.

Άσκηση: Ποιά η πιθανότητα να έρθει ένα τουλάχιστον 4 σε 2 ρίψεις ζαριού?

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A_1: " 4 στην $1^{η}$ ρίψη" και A_2: " 4 στη $2^{η}$ ρίψη".

Ζητάω την πιθανότητα:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \overset{(*)}{=} P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

[(*) τα A_1, A_2 ανεξάρτητα ενδεχόμενα, όχι ξένα μεταξύ τους, επομένως $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$]

■.

Άσκηση: Ποιά η πιθανότητα 10 άνθρωποι (τυχαίοι) να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές ημερομηνίες;

λύση:

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P(\text{όλοι έχουν διαφορ. ημέρα γενέθλια}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{356}{365}$$

ο πρώτος μπορεί να έχει μια οποιαδήποτε μέρα γενέθλια

ο δεύτερος μπορεί να έχει σε 364 ημέρες από τις 365 ...

Άσκηση: Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν Η/Υ, το 25% έχουν και τα δύο. Επιλέγω τυχαία έναν μαθητή της πόλης αυτής. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i) να έχει μόνο ένα από τα δύο.

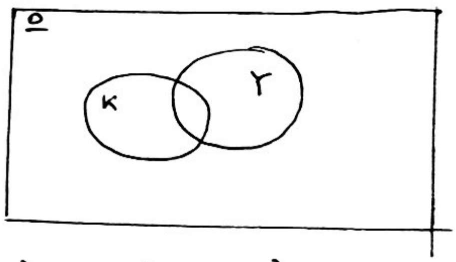
ii) να μην έχει κανένα από τα δύο.

iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα: $K = \{$ο μαθητής έχει κινητό$\}$

$Y = \{$ο μαθητής έχει Η/Υ$\}$



Τότε $P(K) = 0{,}6$, $P(Y) = 0{,}4$, $P(K \cap Y) = 0{,}25$.

i) $P((K \cap Y') \cup (Y \cap K')) \xlongequal[\text{ξένα μεταξύ τους}]{K \cap Y' \text{ και } Y \cap K'} P(K \cap Y') + P(Y \cap K') \xlongequal[A \cap B' = A - B]{}$

$= P(K - Y) + P(Y - K) \overset{(*)}{=} P(K) - P(K \cap Y) + P(Y) - P(K \cap Y) =$

$= 0{,}6 + 0{,}4 - 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$

((*) Ισχύει ότι $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$)

ii) $P\left((K \cup Y)'\right) = 1 - P(K \cup Y) = 1 - \left[P(K) + P(Y) - P(K \cap Y) \right] =$

$= 1 - \left[0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}25 \right] = 0{,}25.$

iii) $P\left[(K \cap Y)'\right] = 1 - P(K \cap Y) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ ■.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

<u>Ορισμός</u>: Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω.
Αν $P(A) \neq 0$, τότε η <u>δεσμευμένη πιθανότητα του B δοθέντος του A</u>, συμβολίζεται με $P(B/A)$ και ισχύει ότι:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

π.χ. Ρίχνουμε 2 δίκαια ζάρια. Το ένα μπλε και το άλλο γκρίζο. Ποιά η πιθανότητα το άθροισμα να είναι 8, αν δίνεται ότι και οι 2 αριθμοί είναι άρτιοι.

<u>Λύση</u>:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$N(\Omega) = 36$

Έστω τα ενδεχόμενα:

$A = \{$οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι$\}$

$B = \{$το άθροισμα είναι 8$\}$

Οπότε:

$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$.

Επομένως: $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \dfrac{1}{3}$ ■

<u>Άσκηση:</u> Επιλέγουμε ένα χαρτί από μία τράπουλα 52 χαρτιών και μετά ένα δεύτερο, α) μετά από επανατοποθέτηση του πρώτου β) χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα να τραβήξουμε 2 άσσους;

<u>Λύση:</u>

A_1: Το γεγονός "άσσος στο πρώτο τράβηγμα"

A_2: — // — δεύτερο —//—

Ζητώ: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

α) $P(A_1) = \dfrac{4}{52}$, $P(A_2/A_1) = \dfrac{4}{52}$

Άρα, $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{169}$

β) $P(A_1) = \dfrac{4}{52}$, $P(A_2/A_1) = \dfrac{3}{51}$

Άρα, $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{3}{51} = \dfrac{1}{221}$

■.

Άσκηση: Ένα δοχείο περιέχει 5 μπλε και 7 κόκκινες μπάλες. Επιλέγω τυχαία 2 μπάλες τη μία μετά την άλλη, χωρίς επανάθεση. Ποιά η πιθανότητα:

i) να είναι και οι δύο μπλε;

ii) να είναι η δεύτερη μπλε, αλλά όχι η πρώτη;

iii) να είναι τουλάχιστον μία μπάλα μπλε;

Λύση:

i) Έστω M_1 το ενδεχόμενο: "η πρώτη μπάλα είναι μπλε".

Τότε $P(M_1) = \frac{5}{12}$

Έστω M_2 το ενδεχόμενο: "η δεύτερη μπάλα είναι μπλε".

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_2 / M_1) \cdot P(M_1) \overset{(*)}{=} \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{12} = \frac{20}{132}$$

((*) αφού όταν έχει επιλεχτεί η $1^{η}$ μπάλα και είναι μπλε, στο δοχείο υπάρχουν άλλες 4 μπλε από το σύνολο των 11 μπαλών)

ii) $$P(M_2 \cap M_1^c) = P(M_2 / M_1^c) \cdot P(M_1^c) = \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{132}$$

iii) $$P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) \quad (**)$$

Θα υπολογίσω το $P(M_2)$:

Έχω ότι το ενδεχόμενο η $2^{η}$ μπάλα να είναι μπλε προκύπτει από δύο αμοιβαία αποκλειόμενους τρόπους: είτε η πρώτη είναι μπλε και η δεύτερη είναι μπλέ, είτε η πρώτη είναι κόκκινη και η δεύτερη είναι μπλέ. Άρα:

$$M_2 = (M_2 \cap M_1) \cup (M_2 \cap M_1^c)$$

Άρα, $P(M_2) = P\left[(M_2 \cap M_1) \cup (M_2 \cap M_1^c)\right] \underline{\underline{\text{ξένα μεταξύ τους}}}$

$= P(M_2 \cap M_1) + P(M_2 \cap M_1^c) = \frac{20}{132} + \frac{35}{132} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$

Η σχέση (**) γίνεται:

$P(M_1 \cup M_2) = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} - \frac{20}{132} = \frac{15}{22}$ ▪.

<u>Άσκηση:</u> Ποιά η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη συμβολοσειρά τεσσάρων δεκαεξαδικών ψηφίων να έχει τουλάχιστον ένα επαναλαμβανόμενο ψηφίο;

<u>Λύση:</u>

Για ένα δεκαεξαδικό αριθμό έχω 16 ψηφία στη διάθεσή μου. Οι διαφορετικοί τρόποι να κατασκευάσω ένα δεκαεξαδικό αριθμό 4 ψηφίων είναι 16^4.

Ένας δεκαεξαδικός αριθμός 4 ψηφίων με κανένα επαναλαμβανόμενο ψηφίο δημιουργείται με $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ διαφορετικούς τρόπους.

Άρα, το πλήθος των δεκαεξαδικών ψηφίων με τουλάχιστον ένα επαναλαμβανόμενο ψηφίο είναι : $16^4 - 16\cdot15\cdot14\cdot13 =$

$= 21.856$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{21.856}{16^4} \simeq 33,3\,\%$ ■

Άσκηση: Ποιά η πιθανότητα ένας τυχαίος επιλεγμένος ακέραιος αριθμός από το 1 ως το 1.000 να είναι πολλ/σιος του 4 ή του 7?

Λύση:

Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$, $A = \{x \in \Omega : x = 4k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y \in \Omega : y = 7k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Τότε $A \cap B$ είναι το σύνολο όλων των ακεραίων από το Ω που είναι πολλαπλάσιοι του 4 και του 7 (δηλαδή του 28).

Θα υπολογίσω το $N(A)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1.000 \\ & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \uparrow \\ & & & 4\cdot1 & & & & 4\cdot2 & & & 4\cdot250 \end{array}$$

άρα $N(A) = 250$.

Θα υπολογίσω το $N(B)$.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 14 & \dots & 994 & \dots & 1000 \\ & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & & & 7\cdot1 & & 7\cdot2 & & 7\cdot142 & & \end{array}$$

άρα $N(B) = 142$

Θα υπολογίσω το $N(A \cap B)$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 28 & \dots & 56 & \dots & 980 & \dots & 1000 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 28\cdot 1 & & 28\cdot 2 & & 28\cdot 35 & & \end{array}$$

άρα $N(A \cap B) = 35$.

Επομένως, $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 250 + 142 - 35 = 357$

Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{357}{1000} = 35,7\%$ ■

$\boxed{\text{Το Θεώρημα Bayes:}}$

Έστω Ω δ.χ. Έστω ότι ο Ω είναι η ένωση ~~...~~ αμοιβαία ξένων ενδεχομένων $B_1, B_2, \dots B_n$.

Έστω A ενδεχόμενο του Ω με $P(A) \neq 0$.

Έστω $k \in \mathbb{Z}$ με $1 \leq k \leq n$. Τότε:

$$P(B_k / A) = \frac{P(A/B_k) \cdot P(B_k)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n)}$$

11.✱ Έστω μία ιατρική εξέταση που αναζητά μια ασθένεια που απαντάται σε 5 ανθρώπους στους 1.000. Υποθέστε ότι το ποσοστό των λανθασμένα θετικών αποτελεσμάτων είναι 3% και των λανθασμένα αρνητικών 1%.
Δηλαδή σε ποσοστό 99% κάποιος που έχει την ασθένεια η εξέταση είναι θετική και σε ποσοστό 97% κάποιος που δεν έχει την ασθένεια βρίσκεται αρνητικός.
Ποιά η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο, που ελέγχεται θετικά για την ασθένεια, να έχει πράγματι την ασθένεια;

Λύση:

Έστω A το ενδεχόμενο: "Το άτομο ελέγχεται θετικά για την ασθένεια".

Έστω B_1 το ενδεχόμενο: "Το άτομο έχει πράγματι την ασθένεια"
Έστω B_2 —//— —//— δεν έχει την ασθένεια".

Τότε: $P(A/B_1) = 0{,}99$, $P(A^c/B_1) = 0{,}01$
$P(A^c/B_2) = 0{,}97$, $P(A/B_2) = 0{,}03$

Επίσης $P(B_1) = \frac{5}{1000} = 0{,}005$ και $P(B_2) = 0{,}995$

Τότε:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2)} = \frac{0{,}99\cdot 0{,}005}{0{,}99\cdot 0{,}005 + 0{,}03\cdot 0{,}995} \simeq 0{,}1422$$

ή 14,2%

■.

Άσκηση: Τα πορτοκάλια που πουλιούνται σ' ένα κατάστημα προέρχονται απο 4 παραγωγούς τους Α, Β, Γ, Δ σε ποσοστό 10%, 20%, 30%, 40% αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι ένα ποσοστό 4%, 3%, 2%, 1% των πορτοκαλιών των Α, Β, Γ, Δ αντιστοίχως δεν είναι καλό. Παίρνουμε τυχαία ένα πορτοκάλι και αποδεικνύεται ότι δεν είναι καλό. Ποιά η πιθανότητα να είναι ένα απο αυτά του παραγωγού Δ;

Λύση:

$$P(A) = \frac{10}{100}, \quad P(B) = \frac{20}{100}, \quad P(\Gamma) = \frac{30}{100}, \quad P(\Delta) = \frac{40}{100}$$

$$P(\text{κακό}/A) = \frac{4}{100}, \quad P(\text{κακό}/B) = \frac{3}{100}, \quad P(\text{κακό}/\Gamma) = \frac{2}{100}, \quad P(\text{κακό}/\Delta) = \frac{1}{100}$$

Ζητάμε την πιθανότητα:

$$P(\Delta/\text{κακό}) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=\!=} \frac{P(\text{κακο}/\Delta)\cdot P(\Delta)}{P(\text{κακο}/A)\cdot P(A) + P(\text{κακο}/B)\cdot P(B) + P(\text{κακο}/\Gamma)\cdot P(\Gamma) + P(\text{κακο}/\Delta)\cdot P(\Delta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{100}\cdot\frac{40}{100}}{\frac{4}{100}\cdot\frac{10}{100} + \frac{3}{100}\cdot\frac{20}{100} + \frac{2}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{40}{100}} = \frac{\frac{40}{100^2}}{\frac{40+60+60+40}{100^2}} =$$

$$= \frac{40}{200} = \frac{1}{5} \quad \blacksquare.$$