Πιθανότητες και Στατιστική

Φροντιστήριο #6

<u>Άσκηση:</u> Έστω η τ.μ. X που παίρνει τιμές $1, 2, \ldots$ με αντίστοιχες πιθανότητες:

$$p(x) = P(X=x) = \frac{c}{3^x}.$$

Να προσδιοριστεί η σταθερά c και να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) $P(X > 1 / X \leq 3)$ και ii) $P(X > 4 / X \geq 2)$

<u>Λύση:</u>

- Η $p(x)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας. Επομένως ισχύουν:
  - $p(x) \geq 0, \ \forall x = 1, 2, \ldots$

    Επειδή $\frac{1}{3^x}$ είναι εκθετική, ισχύει ότι $\frac{1}{3^x} > 0$.

    Άρα, θα πρέπει και $c > 0$.

  - $\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \frac{c}{3^x} = 1 \Rightarrow c \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 1 \xrightarrow[\substack{\text{Άρα, όταν } x=1 \\ \text{τότε } y=0}]{\text{θέτω } x-1=y} c \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{3}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

Άρα, $\quad p(x) = \dfrac{2}{3^{x}} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$

i) $$P(X>1 \,/\, X\le 3) = \frac{P(X>1 \wedge X\le 3)}{P(X\le 3)} =$$

$$= \frac{P(1<X\le 3)}{P(X\le 3)} = \frac{P(X=2)+P(X=3)}{P(X\le 3)} =$$

$$= \frac{P(X=2)+P(X=3)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}}{\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}} \simeq 0{,}307$$

ii) $P(X > 4 / X \geq 2) = \dfrac{P(X>4 \wedge X \geq 2)}{P(X \geq 2)} =$

$$= \frac{P(X > 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{1 - P(X \leq 4)}{1 - P(X < 2)} = \frac{1 - P(X \leq 4)}{1 - P(X \leq 1)} =$$

$$= \frac{1 - \left(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right)}{1 - P(X=1)} =$$

$$= \frac{1 - \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}\right]}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{27}.$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Έστω τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 1 \\ k, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

i) $k = ?$

ii) $P(X < \frac{1}{2}) = ?$, $P(X < \frac{3}{2}) = ?$, $P(X > \frac{1}{2}) = ?$,

$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = ?$

iii) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X

iv) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της X.

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 kx\,dx + \int_1^2 k\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^1 + \left[kx\right]_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} + 2k - k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3k}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}.$

Άρα, $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & , \; 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \; 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \; \text{αλλού.} \end{cases}$

ii) $P(X < \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{3}x\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} =$

$= \frac{1}{3}\left[x^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4} - 0\right] = \frac{1}{12}.$

$P(X < \frac{3}{2}) = \int_{-\infty}^{3/2} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{3/2} f(x)\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{2}{3}x\,dx + \int_1^{3/2} \frac{2}{3}\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[x\right]_1^{3/2} =$

$= \frac{1}{3}\left[x^2\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[x\right]_1^{3/2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2} - 1\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$P\left(X > \tfrac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$P\left(\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \frac{2}{3}x\,dx + \int_{1}^{3/2} \frac{2}{3}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{1}^{3/2} = \frac{7}{12}.$$

iii) • Για $x \in (-\infty, 0)$:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0.$$

• Για $x \in (0,1)$:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{2}{3}t\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{3}\left[t^2\right]_0^x = \frac{x^2}{3}$$

• Για $x \in (1,2)$:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2}{3}t\,dt + \int_1^x \frac{2}{3}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{3}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[t\right]_1^x = \frac{2x-1}{3}$$

• Για $x \in (2, +\infty)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2}{3} t\, dt + \int_1^2 \frac{2}{3}\, dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{3}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[t\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 1$$

iv) $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x\, dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - 0\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x^2 dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{31}{18}.$$

Οπότε, $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{31}{18} - \frac{121}{81} = \frac{37}{162}$ ∎

Άσκηση: Έστω η παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{17}x & , x = 1,2,3 \\ \frac{1}{17}(10-x) & , x = 4,5 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

i) Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X

ii) Να βρεθεί η μέση τιμή της μεταβλητής $Z = X^3 + 1$.

Λύση:

i) $$E[X] = \sum_{x=1}^{5} x \cdot f(x) = \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{2}{17} + 3 \cdot \frac{3}{17} + 4 \cdot \frac{6}{17} + 5 \cdot \frac{5}{17} =$$

$$= \frac{63}{17}.$$

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{5} x^2 f(x) = \frac{1}{17} + \frac{8}{17} + \frac{27}{17} + \frac{96}{17} + \frac{125}{17} = \frac{257}{17}$$

Άρα $$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{257}{17} - \frac{63^2}{17^2} = \frac{400}{17^2}.$$

ii) $$E[Z] = E[X^3+1] = \sum_{x=1}^{5} (x^3+1) \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{5} x^3 f(x) + \sum_{x=1}^{5} f(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{3} \frac{x^4}{17} + \sum_{x=4}^{5} \frac{x^3(10-x)}{17} + 1 =$$

$$= \frac{1}{17} + \frac{16}{17} + \frac{81}{17} + \frac{384}{17} + \frac{625}{17} + 1 = \frac{1124}{17}.$$

<u>Άσκηση:</u> Έστω τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x), & x \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η c

ii) Να βρεθεί η $F_X(x)$

iii) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(1/2 \le X \le 3/2)$ και

$P(X \le 2/3 \,/\, X \ge 1/2)$

iv) $E(X) =;$, $Var(X) =;$

v) $E(Y) =;$, όπου $Y = \frac{1}{X}$.

<u>Λύση:</u>

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx^2(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{12}c = 1 \Rightarrow c = 12.$

Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 - 12x^3, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

ii) • Για $x \in (-\infty, 0]$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0.$$

• Για $x \in (0,1)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{0}^{x \in (0,1)} (12t^2 - 12t^3)\,dt =$$

$$= 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{4x^3 - 3x^4}{12}\right) =$$

$$= 4x^3 - 3x^4.$$

• Για $x \in [1, +\infty)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x \in [1,+\infty)} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (12t^2 - 12t^3)\,dt = 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 1.$$

Άρα,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 4x^3 - 3x^4, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

iii) $P(1/2 \le X \le 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{3/2} (12x^2 - 12x^3)\,dx =$

$= 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{11}{16}$

$P(X \le 2/3 \,/\, X \ge 1/2) = \frac{P(X \le 2/3,\ X \ge 1/2)}{P(X \ge 1/2)} =$

$= \frac{P(1/2 \le X \le 2/3)}{P(X \ge 1/2)} = \frac{\int_{1/2}^{2/3} (12x^2 - 12x^3)\,dx}{\int_{1/2}^{1} (12x^2 - 12x^3)\,dx} = \frac{11}{27}$

iv) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 (12x^3 - 12x^4)\,dx = \frac{3}{5}$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (12x^4 - 12x^5)\,dx = \frac{2}{5}$

Άρα, $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{5} - \frac{3^2}{5^2} = \frac{1}{25}$

v) $E[Y] = E[1/X] = \int_0^1 \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_0^1 (12x - 12x^2)\,dx =$

$= 12\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2.$ ∎

Θεωρητικές Κατανομές Πιθανότητας

Α. Διακριτές κατανομές

όπως :

α) Ομοιόμορφη κατανομή

β) Διωνυμική κατανομή

γ) Υπεργεωμετρική κατανομή

δ) Γεωμετρική κατανομή

ε) κατανομή Poisson.

Β. Συνεχείς κατανομές.

όπως :

α) Ομοιόμορφη Συνεχής κατανομή

β) Εκθετική κατανομή

γ) Γάμμα & Βήτα κατανομές.

δ) κανονική κατανομή.

Διωνυμική κατανομή (Bionomial Distribution)

<u>Πείραμα</u>: Έστω πείραμα με δύο δυνατά αποτελέσματα

Αποτελέσματα → Επιτυχία (E) : $P(E)=p$
→ Αποτυχία (A) : $P(A)=1-p$

π.χ. → Η ρίψη ενός νομίσματος & έστω $P(K)=p$, $P(\Gamma)=1-p$

Επαναλαμβάνω το πείραμα n ανεξάρτητες φορές.

Ορίζω X := ο αριθμός των επιτυχιών κατά τις n επαναλήψεις του πειράματος.

Η X είναι μια διακριτή τ.μ., αφού $X: \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$

όπου $\underline{\Omega} = \underbrace{\{E,A\} \cdot \{E,A\} \cdot \ldots \cdot \{E,A\}}_{n-\text{φορές}}$

$$\left(\begin{array}{l} X(E,E,\ldots,E) = n \\ X(A,A,\ldots,A) = 0 \end{array} \right).$$

Το σύνολο τιμών της X είναι το $S_X = \{0,1,\ldots,n\}$

Τότε, $f_X(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$x = 0,1,\ldots,n$

Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με n δοκιμές και πιθανότητα επιτυχίας p και θα γράφουμε:

$$X \sim B(n, p)$$

και:
$$\sum_{x=0}^{n} f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [p+(1-p)]^n = 1.$$

Αν $X \sim B(n,p)$ τότε:

$$E[X] = np$$
$$Var[X] = np(1-p).$$

π.χ. Το 25% εκείνων που εξετάζονται για δίπλωμα οδήγησης αποτυγχάνουν.

$X :=$ # αποτυχόντων σε 25 εξετασθέντες

$X \sim B(25, \frac{25}{100})$. Τότε:

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) =$

$$= 1 - \binom{25}{0}\left(\frac{25}{100}\right)^0\left(1-\frac{25}{100}\right)^{25} = 0{,}9992$$

• $P(X \leq 20) = \sum_{x=0}^{20} P(X=x) = \sum_{x=0}^{20} \binom{25}{x} \left(\frac{25}{100}\right)^{x} \left(1-\frac{25}{100}\right)^{25-x} \simeq 1$

Π.Χ → Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μία οικογένεια, ώστε η πιθανότητα να αποκτήσει ένα τουλάχιστον αγόρι κι ένα τουλάχιστον κορίτσι να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0,9. Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

Λύση:

Έστω n ο ζητούμενος αριθμός παιδιών που πρέπει να αποκτήσει η οικογένεια.

Ορίζω $X :=$ ο αριθμός των αγοριών στο σύνολο των n παιδιών

Τότε $n-X$ θα είναι ο αριθμός των κοριτσιών.

Θέλω την πιθανότητα: $P(X \geq 1, n-X \geq 1)$ (*)

Τώρα $n - X \geq 1 \Rightarrow X \leq n-1$.

Άρα, η (*) γίνεται: $P(X \geq 1, X \leq n-1) = P(1 \leq X \leq n-1)$

Η $X \sim B(n, \frac{1}{2})$. Άρα:

$P(1 \leq X \leq n-1) = 1 - P(X=0) - P(X=n) =$

$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{n!}{0!\,(n-0)!}\,\frac{1}{2^n} - \frac{n!}{n!\,0!}\,\frac{1}{2^n} =$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0,9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1 \geq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 0,1 \geq 2^{1-n} \Rightarrow \ln 0,1 \geq \ln 2^{1-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 0,1 \geq (1-n) \cdot \ln 2 \Rightarrow \frac{\ln 0,1}{\ln 2} \geq 1-n \Rightarrow n \geq 1 - \frac{\ln 0,1}{\ln 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 4,32$$

Άρα, η οικογένεια θα πρέπει να αποκτήσει τουλάχιστον 5 παιδιά. ■.

Κατανομή Poisson

Λέμε ότι η τ.μ. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Πρέπει $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1$.

Είναι: $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \overset{(*)}{=} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$.

(*) Η εκθετική συνάρτηση e^x ορίζεται και ως δυναμοσειρά ως εξής: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Άρα, πράγματι η $f_X(x)$ είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Κατανομή Poisson: Χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σ'ένα χρονικό διάστημα.

π.χ. →
- Ο αριθμός των πελατών σ'ένα κατάστημα στη διάρκεια μιας ώρας
- Ο αριθμός των κρουσμάτων ενός ιού κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.
- Ο αριθμός των σεισμών σε μία πόλη σ'ένα χρόνο.

π.χ. Έστω ότι η τ.μ. $X :=$ # σεισμών στην Ελλάδα ανά εβδομάδα $\sim$ Poisson(3).
Ποιά η πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 2 σεισμούς στην Ελλάδα αυτήν την εβδομάδα;

Λύση:

Ζητώ την $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$$= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} - e^{-3}\frac{3^1}{1!} = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} \simeq 0{,}8.$$

π.χ. Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων ανά μήνα από τον κορωνοϊό στα νοσοκομεία της Ελλάδας ακολουθεί κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος σ' ένα μήνα είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σ' ένα μήνα, να υπολογιστεί η πιθανότητα:

i) να μη συμβεί θάνατος σ' ένα μήνα

ii) να συμβούν το πολύ 2 θάνατοι σ' ένα μήνα.

Λύση:

Έστω $X :=$ αριθμός θανάτων σ' ένα μήνα.

Τότε $X \sim$ Poisson(λ).

Έχω ότι: $P(X \leq 1) = 4 \cdot P(X=2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(X=0) + P(X=1) = 4\,P(X=2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = 4\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

$\Delta = 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 3^2$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$ $\to \lambda_1 = 1$, $\to \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Άρα, $X \sim \text{Poisson}(1)$, δηλ. $f_X(x) = e^{-1}\dfrac{(+1)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Οπότε:

i) $P(X=0) = e^{-1}\dfrac{(+1)^0}{0!} = e^{-1} \simeq 0,37$

ii) $P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-1}\dfrac{1^x}{x!} \simeq 0,92.$ ■.