Πιθανότητες και Στατιστική

Φροντιστήριο #9

Παραδείγματα Συνεχών Τυχαίων Μεταβλητών.

• **Ομοιόμορφη κατανομή**

Η τ.μ. X θα λέγεται ομοιόμορφη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν και μόνο αν η πυκνότητά της δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

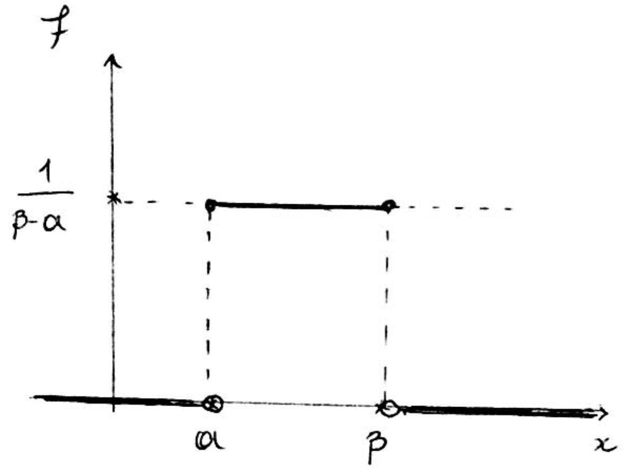
και:

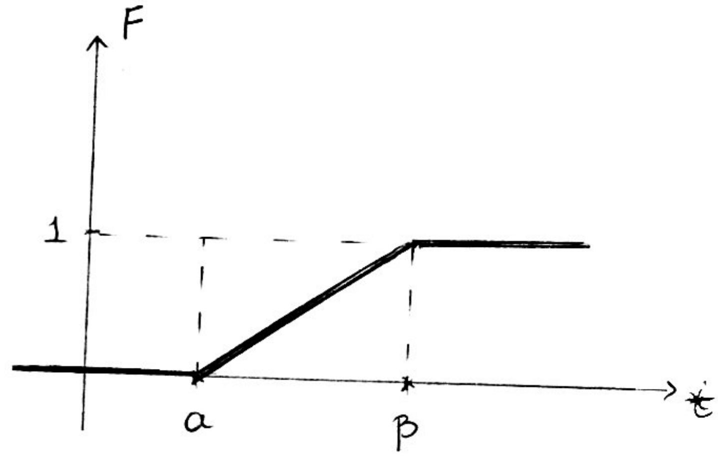
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{\beta}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=0} =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[x\right]_{\alpha}^{\beta} = 1.$$

και:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \alpha \\ \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha \leq t \leq \beta \\ 1 & , \quad t \geq \beta. \end{cases}$$





Συμβολίζουμε: $X \sim U(\alpha, \beta)$

"Η τμ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta-\alpha}\, dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$, οπότε:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta-\alpha}\, dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

Οπότε, $V(X) = \dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

__Άσκηση:__ Μετράμε την αντίσταση R κάθε αντιστάτη σε μία γραμμή παραγωγής και κάνουμε αποδεκτές εκείνες τις μονάδες για τις οποίες η αντίσταση είναι μεταξύ 96 και 104 Ω.

i) Ποιό ποσοστό απο τις παραπάνω μονάδες γίνεται αποδεκτό, όταν η R είναι ομοιόμορφη μεταξύ 95 και 105 Ω ?

ii) Αν ελέγξουμε 100 μονάδες απο την ίδια γραμμή παραγωγής, ποιά η πιθανότητα οι 70 απο αυτές να είναι αποδεκτές;

__Λύση:__

i) Έστω X τ.μ. η οποία μετράει την αντίσταση των λαμπτήρων.

$X \sim U(95, 105)$, δηλ. $f(x) = \dfrac{1}{105-95}$, $x \in (95, 105)$.

Άρα, $P(96 < X < 104) = \displaystyle\int_{96}^{104} \frac{1}{105-95}\,dx = \int_{96}^{104} \frac{1}{10}\,dx =$

$$= \frac{1}{10}\left[x\right]_{96}^{104} = \frac{104-96}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

ii) Έστω Y τ.μ. η οποία μετράει τους αποδεκτούς λαμπτήρες με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0,8$.

Άρα, $Y \sim B(100,\ 0.8)$

$$P(Y = 70) = \binom{100}{70} \cdot (0,8)^{70} (1 - 0,8)^{100-70} = \dots$$ ∎.

• <u>Εκθετική κατανομή</u>

Η τ.μ. X λέγεται Εκθετική, αν και μόνο αν η πυκνότητά της έχει τον παρακάτω τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{όπου } \lambda > 0.$$

Η σταθερά λ λέγεται παράμετρος της εκθετικής τ.μ. X.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

και:

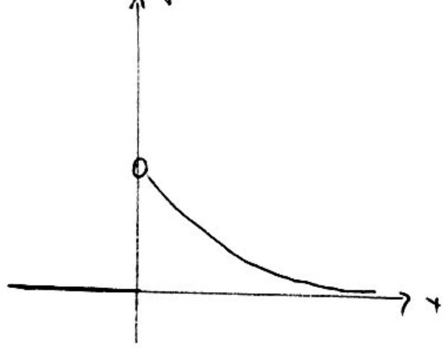
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

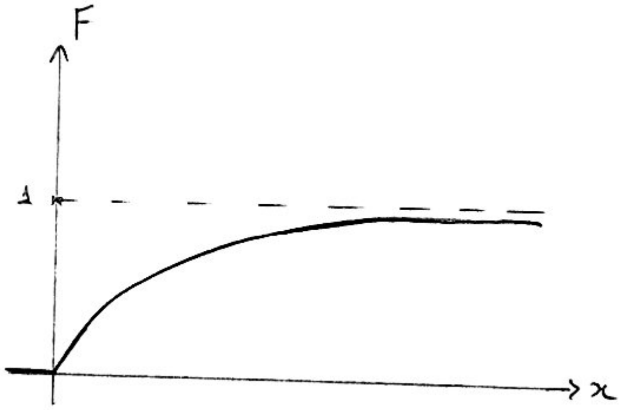
Και:

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Συμβολίζω: $X \sim$ Εκθετική (λ)





Η Εκθετική κατανομή δεν έχει "μνήμη":

$$P(X > r+t \,/\, X > r) = P(X > t) \quad , \; t, r > 0$$

Πράγματι:

$$P(X > r+t \,/\, X > r) = \frac{P(X > r+t \,,\, X > r)}{P(X > r)} =$$

$$= \frac{P(X > r+t)}{P(X > r)} =$$

$$= \frac{1 - F(r+t)}{1 - F(r)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Άσκηση: Ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{75}$. Βρείτε την πιθανότητα να ζήσει αυτός ο άνθρωπος:

i) το πολύ 70 χρόνια

ii) ακριβώς 70 χρόνια

iii) τουλάχιστον 70 χρόνια.

iv) πάνω από 70 χρόνια, αν είναι τώρα 30 χρονών.

Λύση: Έστω X := ο χρόνος ζωής του ανθρώπου.

i) $P(X \leq 70) = F(70) = 1 - e^{-\frac{70}{75}} \simeq 0,61$

ii) $P(X = 70) = 0$

iii) $P(X \geq 70) = 1 - P(X < 70) = 1 - (1 - e^{-\frac{70}{75}}) \simeq 0,39$

iv) $P(X > 70 / X > 30) = P(X > 30+40 / X > 30) =$

$= P(X > 40) = 1 - (1 - e^{-\frac{40}{75}}) = e^{-40/75} \simeq 0,59$ ∎.

Άσκηση: Η διάρκεια ζωής των κατοίκων μιας περιοχής αποτελεί τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{50}$.

i) Να βρεθεί το ποσοστό των κατοίκων που ζει πάνω από 65 χρόνια.

ii) Ποιά η πιθανότητα για ένα άτομο του παραπάνω πληθυσμού να ζήσει τουλαχιστον 70 χρόνια, δοθέντος ότι μόλις γιόρτασε την $40_{η}$ επέτειο γενεθλίων;

iii) Για ποιά τιμή της σταθεράς $c \in \mathbb{R}$ έχουμε $P(X > c) = \frac{1}{2}$;

Λύση:

$X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{50})$. Άρα, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{50} x}$, $x > 0$.

i) $P(X>65) = \int_{65}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{65}^{+\infty} \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{50}x}\,dx =$

$= \frac{1}{50}\int_{65}^{+\infty} e^{-\frac{1}{50}x}\,dx = \frac{1}{50}\left[-50\, e^{-\frac{1}{50}x}\right]_{65}^{+\infty} =$

$= \frac{1}{50}\left(-50 \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{50}x} + 50 \cdot e^{-\frac{65}{50}}\right) = e^{-\frac{65}{50}} = 27{,}25\%$

ii) $P(X>70 \,/\, X>40) = P(X>40+30 \,/\, X>40) =$

$= P(X>30) = \int_{30}^{+\infty} \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{50}x}\,dx =$

$= \frac{1}{50}\left[-50 e^{-\frac{1}{50}x}\right]_{30}^{+\infty} = \frac{1}{50}\left(-50 \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{50}x} + 50 \cdot e^{-\frac{30}{50}}\right) =$

$= e^{-\frac{3}{5}} \simeq 0{,}5488$

iii) $P(X>c) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{c}^{+\infty} \frac{1}{50} e^{-\frac{1}{50}x}\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{50}\left[-50 e^{-\frac{1}{50}x}\right]_{c}^{+\infty} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{50}\left[-50 \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{50}x} + 50 e^{-\frac{c}{50}}\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-\frac{c}{50}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{c}{50}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{c}{50}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{c}{50} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad c = 50 \ln 2.$ ■

Άσκηση: Ένα εργοστάσιο ζάχαρης έχει τρία τμήματα αρχικής επεξεργασίας ζαχαρότευτλων. Η ποσότητα των τεύτλων, μετρούμενη σε τόνους που επεξεργάζεται σε μία μέρα κάθε ένα από τα τρία τμήματα είναι τ.μ. με μέση τιμή 4 τόνους, που μπορεί να θεωρηθεί εκθετική. Αν τα τμήματα λειτουργούν ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα σε μια δοσμένη μέρα δύο ακριβώς από τα τμήματα να επεξεργαστούν περισσότερους από 4 τόνους τεύτλα.

Λύση:

Έστω τ.μ. X := η ποσότητα (σε τόνους) των τεύτλων που επεξεργάζεται κάποιο τμήμα.

Τότε $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ & $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$

$E(X) = 4$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Άρα $\lambda = \frac{1}{4}$.

$$P(X > 4) = \int_4^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = \frac{1}{4} \left[-4 e^{-\frac{x}{4}} \right]_4^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[-4 \lim_{x \to \infty} e^{-\frac{x}{4}} + 4 \cdot e^{-1} \right] = e^{-1} \simeq 0{,}37.$$

Έστω Y τ.μ. := πόσα τμήματα από τα 3 επεξεργάζονται πάνω από 4 τόνους τεύτλα.

Άρα $Y \sim B(3,\ 0.37)$.

Άρα, $P(Y=2) = \binom{3}{2}(0,37)^2\cdot(1-0,37)^{3-2} \simeq 0,26$ ■.

<u>Άσκηση:</u> Έστω ότι σε μία περιοχή της Ελλάδας υπάρχει ένας σεισμικός χώρος που προκαλεί σεισμούς εντάσεως 5 βαθμών Richter και πάνω με ρυθμό 2 σεισμούς ανά έτος. Το πλήθος των εμφανίσεων των σεισμών αυτών είναι τ.μ. που θεωρούμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων σεισμών αυτών είναι τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με $\lambda = 2$.

i) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μεταξύ 2 διαδοχικών σεισμών εντάσεως τουλάχιστον 5 βαθμών,

ii) Ποιά η πιθανότητα ο επόμενος σεισμός έντασης τουλαχίστου 5 βαθμών να συμβεί μετά από ένα χρόνο όχι όμως αργότερα από 3 χρόνια από σήμερα;

<u>Λύση:</u>

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad , \quad F(t) = \begin{cases} 1-e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

i) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ χρόνια.

ii) $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = (1-e^{-6}) - (1-e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6} \simeq$

$\simeq 13\%$ ■.

Άσκηση: Ο χρόνος ζωής (σε έτη) των βρεφων τα οποία γεννιούνται με μια ανίατη ασθένεια A ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα βρέφος που γεννιέται με την ασθένεια A να ζήσει μεταξύ 8 και 10 μηνες.

ii) Ποιά η πιθανότητα απο 10 τέτοια βρέφη, ακριβώς 3 να ζήσουν μεταξύ 8 και 10 μήνες;

Λύση:

Έστω X := ο χρονος ζωής (σε έτη) των βρεφων, τα οποία γεννιούνται με την ασθένεια A.

Τοτε $X \sim \mathcal{E}(1)$, αρα $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

i) $$P\left(\frac{8}{12} \le X \le \frac{10}{12}\right) = \int_{\frac{8}{12}}^{\frac{10}{12}} e^{-x}\, dx =$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{\frac{8}{12}}^{\frac{10}{12}} = e^{-\frac{8}{12}} - e^{-\frac{10}{12}} = 0,0788.$$

ii) Έστω $Y :=$ ο αριθμός των βρεφών που ζουν μεταξύ 8 και 10 μηνών.

$$Y \sim B(10,\ 0.0788)$$

$$P(Y=3) = \binom{10}{3} (0{,}0788)^3 (1-0{,}0788)^{10-3} \simeq 0{,}033$$

• Κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss

Αν X τ.μ., τότε ακολουθεί την κανονική κατανομή, αν

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

όπου μ & σ σταθερές ίσες αντίστοιχα με τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2}\, dv.$$

Έστω Z η τυποποιημένη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην X, δηλ:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

τότε η $E(Z) = 0$ και $\sigma(Z) = 1$.

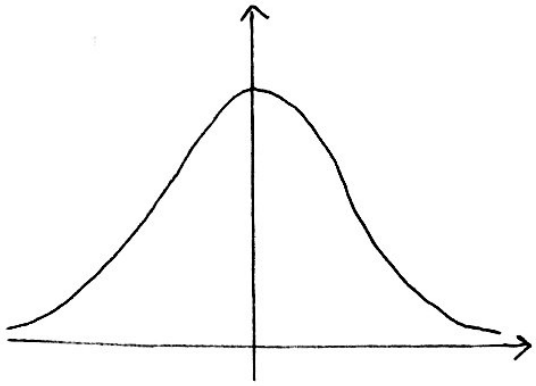
Στην περίπτωση αυτή:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

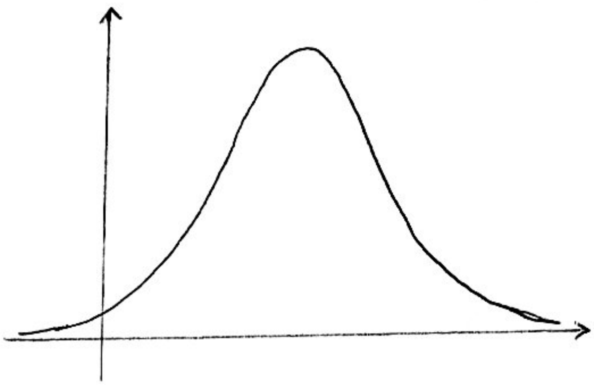
Συμβολίζω:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z \sim N(0,1)$



Η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής

<u>Άσκηση:</u> Οι βαθμοί σε ένα μάθημα υποτίθεται ότι ακολουθούν κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με $\mu = 6{,}5$ & $\sigma = 0{,}5$. (με άριστα το 10). Εάν 3 μαθητές εκλεγούν στην τύχη να βρεθεί η πιθανότητα ακριβώς 2 από τους 3 να έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 7.

<u>Λύση:</u>

Έστω X := βαθμός στο μάθημα.

Τότε $X \sim N(\mu = 6{,}5 \,,\, \sigma^2 = 0{,}5^2)$

Έστω p η πιθανότητα ο μαθητής που εκλέγεται στην τύχη έχει βαθμό >7.

Τότε $p = P(X>7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{7-6{,}5}{0{,}5}\right) = P(Z>1) =$

$$= 1 - \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \simeq 0{,}1587$$

Η πιθανότητα αυτή παραμένει ίδια για κάθε μαθητή.

Με τη διωνυμική κατανομή τώρα, η πιθανότητα ακριβώς 2 από τους 3 να έχουν βαθμό >7 είναι:

$$\binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2} = \binom{3}{2} (0,1587)^2 \cdot (0,8414)^1 = 0,0635$$

■

<u>Άσκηση:</u> Υποθέτουμε ότι ο χρόνος αντίδρασης ενός οδηγού αυτοκινήτου σ' ένα οπτικό ερέθισμα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0,4 sec και τυπική απόκλιση 0,05 sec.

i) Ποιά η πιθανότητα για έναν οδηγό να έχει χρόνο αντίδρασης περισσότερο από 0,5 sec?

ii) Αν εξετάσουμε διαδοχικά 4 οδηγούς, ποιά η πιθανότητα μόνο ο τελευταίος να έχει αντίδραση 0,5 sec?

<u>Λύση:</u>

Έστω τ.μ. $X :=$ χρόνος (σε sec) αντίδρασης ενός οδηγού σε οπτικό ερέθισμα.

Τότε, από υπόθεση, $X \sim N(0,4 \,,\, 0,05^2)$.

i) $P(X > 0,5) = P\left(\frac{X - 0,4}{0,05} > \frac{0,5 - 0,4}{0,05} \right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

ii) Έστω τ.μ. Y := το πλήθος των δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία, (ως επιτυχία ορίζεται η αντίδραση σε χρόνο $\leq 0,5$ sec).

Τότε, $Y \sim G(p)$, όπου $p = P(X \leq 5) \overset{(i)}{=} 1 - 0,0228 =$
$= 0,9772$

Άρα, ζητώ $P(Y=4) = (1-p)^{4-1} \cdot p =$

$= (1-0,9772)^3 \cdot 0,9772$. ∎