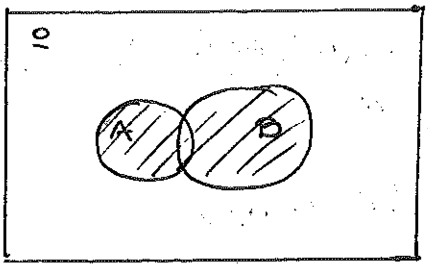
Υπενθύμιση: Συνολοθεωρητικές πράξεις, πιθανοθεωρητική ερμηνεία και υπολογισμός πιθανότητας ενδεχομένων.

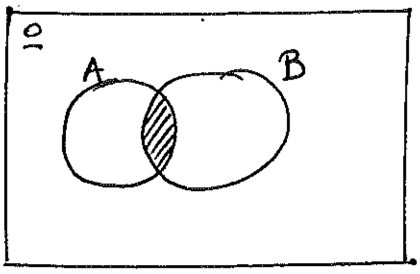


$A \cup B = \{x \in A$ είτε $x \in B\}$

Ένωση Συνόλων

"συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A ή B"

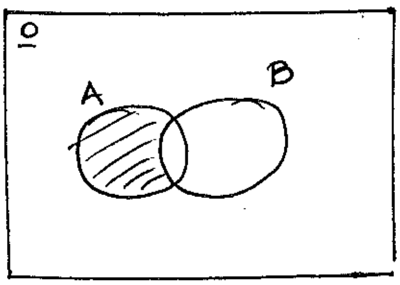
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A \cap B = \{x \in A$ και $x \in B\}$

Τομή Συνόλων

"συμβαίνει και το A και το B"

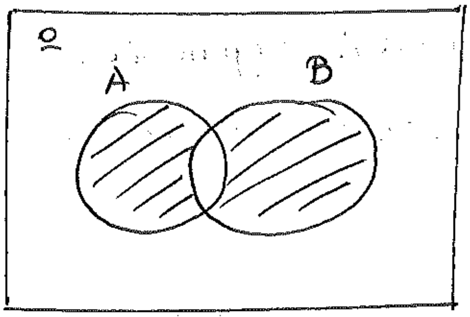


$A - B = \{x \in A$ και $x \notin B\}$

Διαφορά Συνόλων.

"συμβαίνει μόνο το A"

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



$$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$$

ή

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Συμμετρική Διαφορά Συνόλων.

"συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B"

$$P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Απόδειξη:

$$P(A \triangle B) = P\left[(A-B) \cup (B-A)\right] =$$

$$= P(A-B) + P(B-A) - P\left[(A-B) \cap (B-A)\right] =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) - P(\varnothing) =$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Άσκηση: Ένα οπωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του από το Πήλιο και τα υπόλοιπα από την Καστοριά. Τα 4/5 των μήλων που προμηθεύεται από το Πήλιο είναι κόκκινα και τα 3/5 των μήλων που προμηθεύεται απο την Καστοριά είναι επίσης κόκκινα. Επιλέγεται τυχαία ένα μήλο από το σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: « το μήλο είναι κόκκινο ή προέρχεται από την Καστοριά ».

Λύση:

- Στο σύνολο των μήλων του οπωροπωλείου, το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από το Πήλιο είναι:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{25}=0,48 \text{ ή } 48\%$$

- Στο σύνολο των μήλων του οπωροπωλείου, το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από τη Καστοριά είναι:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=0,24 \text{ ή } 24\%$$

- Οπότε:

	Κόκκινα Μήλα	Όχι Κόκκινα Μήλα	Σύνολο
Πήλιο	48%	12%	60%
Καστοριά	24%	16%	40%
Σύνολο	72%	28%	100%

Έστω τα ενδεχόμενα:

K_1: "Το μήλο είναι κόκκινο"

K_2: "Το μήλο προέρχεται από την Καστοριά"

Ζητώ την πιθανότητα:

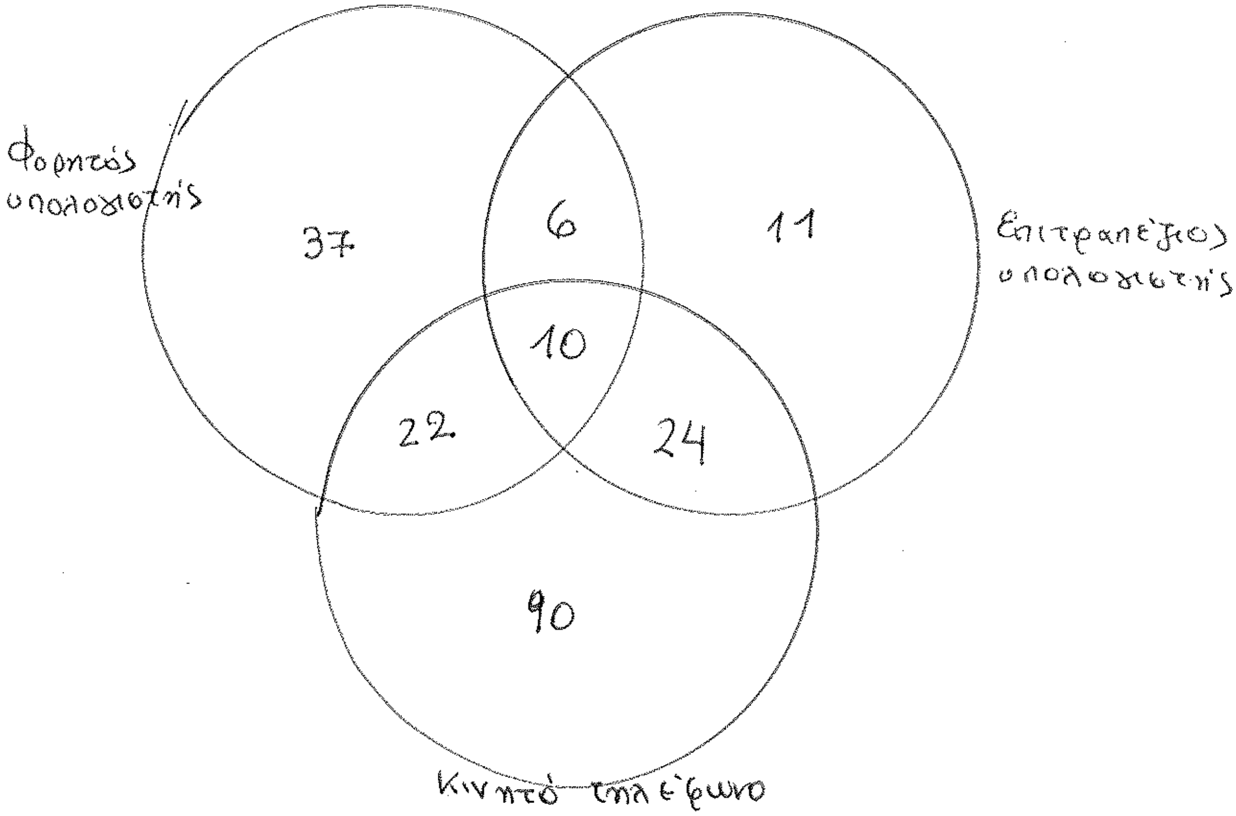
$$P(K_1 \cup K_2) = P(K_1) + P(K_2) - P(K_1 \cap K_2) =$$

$$= \frac{72}{100} + \frac{40}{100} - \frac{24}{100} =$$

$$= \frac{88}{100}$$

■.

<u>Άσκηση:</u> Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο. Ρωτήθηκαν με ποιές συσκευές συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn δείχνει τις απαντήσεις:



Ένα από τα άτομα, που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο.
ii) να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους.
iii) να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους.

<u>Λύση:</u>

i) $P(A) = \frac{90+22+10+24}{200} = \frac{146}{200} = 0,73$

ii) $P(B) = \frac{6+22+24+10}{200} = \frac{62}{200} = 0,31$

iii) $P(\Gamma) = \frac{37+11+90}{200} = \frac{138}{200} = 0,69$ ∎

Άσκηση: Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + 4x + \gamma = 0$, όπου (α, γ) είναι το αποτέλεσμα της ρίψης δυο ζαριών.

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγμ. και άνισες

ii) —"— μία μόνο ~~ακέραια~~ διπλή ρίζα.

Λύση:

i) $\Delta = 4^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = 4(4-\alpha\gamma)$.

Θέλω $\Delta > 0 \Rightarrow 4(4-\alpha\gamma) > 0 \Rightarrow 4-\alpha\gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma < 4$

Δηλαδή το γινόμενο των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών να είναι μικρότερο του 4.

Έστω A αυτό το ενδεχόμενο.

Τότε $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\}$

Οπότε $P(A) = \frac{5}{36}$

ii) $\Delta = 0 \Rightarrow 4 = \alpha\gamma$

Οπότε $B = \{(1,4), (2,2), (4,1)\}$

$P(B) = \frac{3}{36}$.

Άσκηση: Ν.δ.ο. $P(A\cap B) \geq P(A) - P(B^c)$

Λύση:

Έχω ότι: $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) =$

$= P(A) + 1 - P(B^c) - P(A\cup B) =$

$= P(A) - P(B^c) + 1 - P(A\cup B)$. (1)

Όμως: $P(A\cup B) \leq 1 \Rightarrow 1 - P(A\cup B) \geq 0$ (2)

Η (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $P(A\cap B) = P(A) - P(B^c) + 1 - P(A\cup B) \geq P(A) - P(B^c)$ ∎.

Άσκηση: Το ανθρώπινο αίμα μπορεί να περιέχει:

- το αντιγόνο A
- Το αντιγόνο B
- ταυτόχρονα και το A κ' το B
- να μην περιέχει A ή B
- να περιέχει ένα τρίτο αντιγόνο Rh.

Σε μία έρευνα ασθενών νοσοκομείου βρέθηκε ότι:

- 25 ασθενείς είχαν το αντιγόνο A
- 27 —//— B
- 30 —//— Rh
- 16 —//— A κ' Rh
- 17 —//— A κ' B
- 22 —//— B κ' Rh
- 12 δεν είχαν κανένα από τα 3 αντιγόνα.
- 15 είχαν και τα 3 αντιγόνα.

i) Πόσοι ασθενείς πήραν μέρος στην έρευνα;

ii) Επιλέγεται ένας ασθενής τυχαία. Ποιά η πιθανότητα:

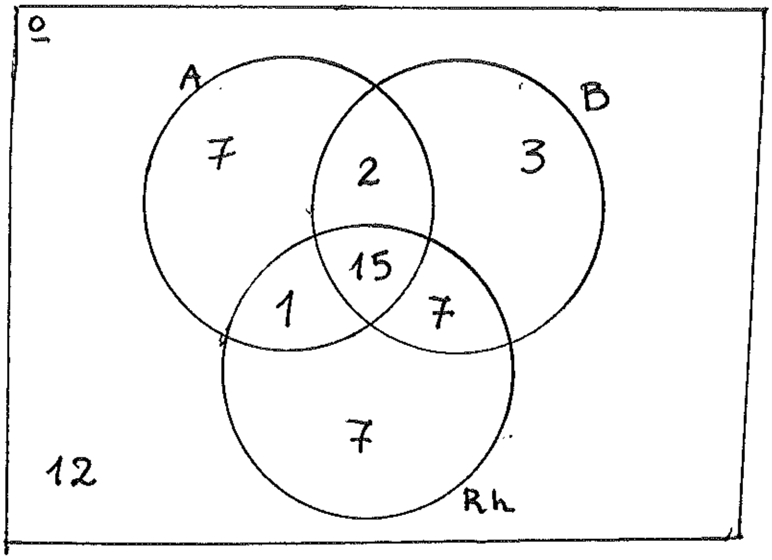
α) να έχει το αντιγόνο A;

β) να έχει ένα τουλάχιστον από τα αντιγόνα A ή B;

γ) να έχει ένα ακριβώς από τα A ή B;

δ) να μην έχει τα A ή B;

Λύση:



Έστω τα ενδεχόμενα:

A = "ο ασθενής έχει το αντιγόνο A"

B = "ο ασθενής έχει το αντιγόνο B"

Rh = "ο ασθενής έχει το αντιγόνο Rh".

Δημιουργώ το διάγραμμα Venn με τα δεδομένα του προβλήματος.

i) Οι ασθενείς που πήραν μέρος στην έρευνα είναι : 54

ii)

α) $P(A) = \frac{25}{54}$, β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= \frac{25}{54} + \frac{27}{54} - \frac{17}{54} = \frac{35}{54}$$

γ) $P(A \triangle B) \overset{(*)}{=} P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{25}{54} + \frac{27}{54} - 2\frac{17}{54} = \frac{18}{54}$

δ) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{35}{54} = \frac{19}{54}$ ∎

(*) Ισχύει ότι: $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.