Ασκήσεις Επανάληψης

Άσκηση 1: Στο τμήμα επισκευών μιας εταιρίας υπάρχουν προς επισκευή 10 τηλεοράσεις και 12 κινητά τηλέφωνα. Το προσωπικό επισκευάζει 6 συσκευές την ημέρα, τις οποίες επιλέγουν τυχαία. Να βρεθεί η πιθανότητα σε μία μέρα να επισκευασθούν:

i) 3 τηλεοράσεις και 3 κινητά τηλέφωνα.
ii) το πολύ 4 τηλεοράσεις.

Λύση:

Έστω Ω ο δ.χ. του πειράματος, δηλ. όλοι οι δυνατοί τρόποι επιλογής 6 συσκευών από τις 22.

Τότε $|\Omega| = \binom{22}{6} = \dfrac{22!}{6!\,16!} = \dfrac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} =$

$= 17\cdot 19\cdot 21\cdot 11.$

i) Έστω A το ενδεχόμενο: "επισκευάζονται 3 τηλεορ. και 3 τηλέφωνα".

Τότε $|A| = \binom{10}{3}\binom{12}{3} = \dfrac{10!}{3!\,7!}\cdot\dfrac{12!}{3!\,9!} = \dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3}\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3} =$

$= 120\cdot 20\cdot 11.$

Άρα $P(A) = \dfrac{120\cdot 20\cdot 11}{17\cdot 19\cdot 21\cdot 11} \simeq 0{,}3538.$

ii) Έστω B_i το ενδεχόμενο: "επισκευάζονται i το πλήθος τηλεοράσεις" (άρα $6-i$ κινητά τηλέφωνα)

Τότε ζητώ την πιθανότητα:

$P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) =$

$$= \frac{\binom{10}{0}\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}}$$

Για το (ii) ερώτημα, αρκεί να υπολογίσω το

$$P(B) = \frac{\binom{10}{5}\binom{12}{1}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{6}}{\binom{22}{6}} \simeq 0{,}0433$$

που είναι η πιθανότητα να επισκευάσω 5 ή 6 τηλεοράσεις και τότε η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(B') = 1 - P(B)$$ ∎

Άσκηση 2: Ζητάμε από έναν φίλο να μας πει τυχαία έναν αριθμό από το σύνολο $\{0, 1, 2, \dots, 999.999\}$. Ποιά η πιθανότητα ο αριθμός να περιέχει τουλάχιστον μία φορά το ψηφίο 5;

Λύση:

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 999.999\}$, άρα $|\Omega| = 1.000.000 = 10^6$ στοιχεία

Έστω A το ενδεχόμενο "ο αριθμός δεν περιέχει κανένα 5".

Τότε, ζητώ την $P(A') = 1 - P(A)$.

Κάθε στοιχείο του A περιέχει 6 ψηφία: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, όπου $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 1, \dots, 6$.

Επομένως $|A| = 9^6$.

Οπότε: $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{9^6}{10^6} = 1 - 0{,}9^6 \simeq 0{,}47$ ∎

Άσκηση 3: Σε μία χώρα η πιθανότητα να ζήσει κανείς τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0,85. Η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0,80. Ποιά η πιθανότητα ένας 70-χρονος άντρας αυτής της χώρας να ζήσει τουλάχιστον άλλα 5 χρόνια;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : "ο άντρας θα ζήσει περισσότερο από 75 χρόνια"
B : " — " — 70 χρόνια"

Τότε $P(A) = 0,80$, $P(B) = 0,85$

Επίσης $A \cap B = A$.

Ζητώ την πιθανότητα $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} =$

$= \frac{0,80}{0,85} \simeq 0,94$. ■.

Άσκηση 4: Στις εξετάσεις ένας φοιτητής απαντά σε ερωτήσεις ενός διαγωνίσματος πολλαπλής επιλογής με 4 απαντήσεις ανά ερώτηση, η μία σωστή. Η πιθανότητα να γνωρίζει την απάντηση είναι 70%. Στις περιπτώσεις που δε γνωρίζει την απάντηση, τότε απαντά τυχαία. Αν ο φοιτητής απαντήσει σωστά σε μία ερώτηση, ποιά η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση;

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : " ο φοιτητής απαντά σωστά"
B : " ο φοιτητής γνωρίζει τη σωστή απάντηση"

Ζητώ την πιθανότητα $P(B/A)$.

Γνωρίζω ότι: $P(B) = 0,7$, $P(B') = 0,3$

$P(A/B) = 1$, $P(A/B') = \frac{1}{4} = 0,25$

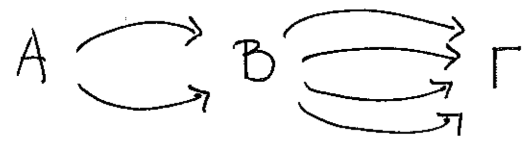
Απο θ. Bayes έχω:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)\cdot P(B)}{P(A/B)\cdot P(B) + P(A/B')\cdot P(B')} = \frac{1\cdot 0{,}7}{1\cdot 0{,}7 + 0{,}25\cdot 0{,}3} =$$

$\cong 0{,}9$. ■

<u>Άσκηση 5:</u> Μία πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β με 2 διαφορετικούς δρόμους, ενώ η Β με την πόλη Γ με 4 διαφορετικούς δρόμους. Αν η επιλογή των δρόμων είναι τυχαία, ποιά η πιθανότητα επιλογής κάποιας συγκεκριμένης επιλογής;

<u>Λύση:</u>



Έχω $2\cdot 4 = 8$ διαφορ. τρόπους να ταξιδέψω απο την $A \to \Gamma$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{8}$ ■.

<u>Άσκηση 6:</u> Οι αριθμοί κυκλοφορίας των αυτοκινήτων αποτελούνται από 3 γράμματα και έναν 4-ψήφιο αριθμό. Χρησιμοποιούνται 14 ελληνικά γράμματα και στη 1η θέση του 4-ψήφιου αριθμού δεν χρησιμοποιείται το 0.
Επιλέγεται τυχαία ένα αυτοκίνητο. Ποιά η πιθανότητα τα 3 γράμματα του αριθμού κυκλοφορίας να είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

<u>Λύση:</u>

Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί γραμμάτων και αριθμών είναι:

$$14\cdot 14\cdot 14\cdot 9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 14^3\cdot 9\cdot 10^3 = |\underline{\Omega}|$$

Οι πινακίδες με διαφορ. τα τρία πρώτα γράμματα είναι:

$$14\cdot 13\cdot 12\cdot 9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 9\cdot 10^3$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 9\cdot 10^3}{14^3\cdot 9\cdot 10^3} = \frac{13\cdot 12}{14^2} \simeq 0,7959$ ∎

<u>Άσκηση 7:</u> Από μία έρευνα διαπιστώθηκε ότι 40% των χρηστών του διαδικτύου χρησιμοποιούν γραμμή ADSL. Επιλέγω τυχαία 10 χρήστες. Ποιά η πιθανότητα:

i) 2 ακριβώς να χρησιμοποιούν την γραμμή ADSL;
ii) τουλάχιστον 4 —//—
iii) το πολύ 5 —//—
iv) τουλάχιστον 4 να χρησιμοποιούν κάποιο άλλο είδος τηλεφωνικής γραμμής;

<u>Λύση:</u>

Έστω $X :=$ αριθμός χρηστών που χρησιμοποιούν ADSL.

Τότε $X \sim B(10,\ 0,4)$

άρα $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x=0,1,2,\dots$

i) $P(X=2) = \binom{10}{2}\cdot 0,4^2\cdot 0,6^8 \simeq 0,12$

ii) $P(X\geq 4) = \sum_{i=4}^{10} P(X=i)$

$$\text{ή} \quad = 1 - P(X<4) = 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X=i)$$

iii) $P(X\leq 5) = \sum_{i=0}^{5} P(X=i) = \sum_{i=0}^{5}\binom{10}{i} 0,4^i\cdot 0,6^{10-i}$

iv) $P\{$τουλ. 4 χρησιμ. κάτι άλλο$\} = P\{$το πολύ 6 χρησ. ADSL$\} =$

$$= P(X\leq 6) = \sum_{i=0}^{6} P(X=i) = \dots$$ ∎

Άσκηση 8: Σήματα (·) και (−) στέλνονται από έναν τηλέγραφο σε ποσοστό 20% κ' 80% αντίστοιχα. Λόγω θορύβου, μια τελεία (·) καταφθάνει σαν παύλα (−) με πιθανότητα 0,25 και αντίστροφα μία παύλα (−) σαν τελεία (·) με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Εάν ένα σήμα καταφθάνει σαν παύλα (−), να βρεθεί η πιθαν. να έχει μεταφερθεί σωστά.

Λύση:

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : " έχει σταλεί (·) " , τότε A' : " έχει σταλεί (−) "

B : " έχει ληφθεί (·) " , τότε B' : " έχει ληφθεί (−) ".

Τότε $P(A) = 0,2$, $P(A') = 0,8$

$$P(B'/A) = 0,25 = \frac{1}{4}$$

$$P(B/A') = \frac{1}{3} \quad \text{άρα} \quad P(B'/A') = \frac{2}{3}$$

Ζητώ $P(A'/B') = \dfrac{P(B'/A')\cdot P(A')}{P(B'/A')\cdot P(A') + P(B'/A)\cdot P(A)} =$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot 0,8}{\frac{2}{3}\cdot 0,8 + \frac{1}{4}\cdot 0,2} \simeq 0,58$$

Άσκηση 9: Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0. \end{cases}$

Υπολογίστε τη μέση τιμή της X.

Λύση:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}\,dx=2\int_0 x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'dx=$$

$$=\int_0^{+\infty} x\cdot\left(-e^{-2x}\right)'dx=\left[-x\cdot e^{-2x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx=$$

$$=\left[-xe^{-2x}\right]_0^{+\infty}+\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-2x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}}{-2}-\frac{1}{-2}=$$

$$=\frac{1}{2}$$ ∎

Άσκηση 10: Για την προηγούμενη τ.μ., υπολογίστε την $\left(P\left(|X-\mu|\geq 1\right)\right)$.

Λύση:

$$P(|X-\mu|<1)=P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|<1\right)=P\left(-1<X-\frac{1}{2}<1\right)=$$

$$=P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{3/2} f(x)\,dx=\int_0^{3/2} 2e^{-2x}\,dx=$$

$$=\left[-e^{-2x}\right]_0^{3/2}=-e^{-3}+1=1-e^{-3}$$

Οπότε: $P\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|\geq 1\right)=1-\left(1-e^{-3}\right)=e^{-3}\simeq 0,04979$ ∎

Άσκηση 11: Σ' έναν λαχνό υπάρχουν:

- 200 βραβεία των 5 €
- 20 βραβεία των 25 €
- 5 βραβεία των 100 €

Εάν πρόκειται να πουληθούν 10.000 λαχνοί, πόσο πρέπει να πληρώσει κανείς για ένα λαχνό;

Λύση:

x (€)	5	25	100	0
$P(X=x)$	0,02	0,002	0,0005	0,9775

Έστω η τ.μ. X να είναι το κέρδος του λαχνού. Ο διπλανός πίνακας δείχνει τις τιμές της X με τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Διότι: $\frac{200}{10.000} = 0,02$ $\qquad \frac{5}{10.000} = 0,0005$

$\frac{20}{10.000} = 0,002$ $\qquad \frac{10.000-(200+20+5)}{10.000} = \frac{9.775}{10.000} =$

$= 0,9775$

Τότε: $E(X) = 5 \cdot 0,02 + 25 \cdot 0,002 + 100 \cdot 0,0005 + 0 \cdot 0,9775 =$

$= 0,2.$

Επομένως, η τιμή του λαχνού πρέπει να είναι 0,2 €.

Ανισότητα Chebyshev

Αν X τ.μ (συνεχής ή διακριτή) με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 πεπερασμένες, τότε $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

π.χ. Έστω τ.μ. X με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Ποιά η πιθανότητα να διαφέρει η X δυο ή περισσότερες φορές από την τυπική της απόκλιση;

Λύση:

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 12: Ο αριθμός των δέντρων X σε μία έκταση είναι τ.μ. X που ακολουθεί την Poisson με παράμετρο λ. Αν $P(X>0)=0,999$, να προσδιοριστεί το λ.

Λύση:

$X \sim P(\lambda)$, τότε $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

$$P(X>0)=0,999 \Rightarrow 1-P(X\leq 0) = 0,999 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=0) = 0,001 \Rightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 0,001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 0,001 \Rightarrow e^{\lambda} = 0,001^{-1} \Rightarrow \lambda = \ln 0,001^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\ln 0,001$$