ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Κεφάλαιο 7 - 8 : Συστήματα – Δειγματοληψία

Κωνσταντίνος Μαλιάτσος

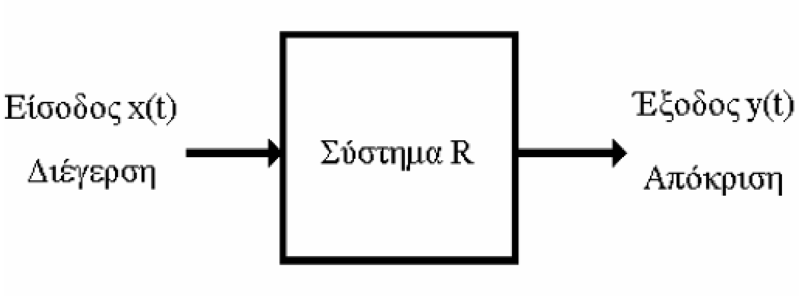
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Περιεχόμενα Ομιλίας

- Κεφάλαιο 7ο
  - Ταξινόμηση Συστημάτων
  - Κρουστική Απόκριση
- Κεφάλαιο 8ο
  - Δειγματοληψία Αναλυτικά
  - Φυσική Δειγματοληψία
  - Δειγματοληψία Σταθερού Πλάτους

Συστήματα

Σύστημα ονομάζουμε μια εξελικτική διαδικασία (process), η οποία δέχεται σαν είσοδο (input) ένα σήμα x(t) και εξάγει ένα σήμα στην έξοδο (output) y(t).



- Ως σύστημα ορίζεται ένας νόμος μέσω του οποίου συνδέεται η έξοδος (απόκριση του συστήματος) y(t) με την είσοδο (διέγερση του συστήματος) x(t) του συστήματος.

Ταξινόμηση συστημάτων

- **Χρονοσυνεχή**(Αναλογικά)
  - Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές
  - Μετασχηματισμοί Laplace και Fourier
- **Χρονοδιακριτά**(Ψηφιακά).
  - Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές
  - Μετασχηματισμός Z
- **Υβριδικά συστήματα**, όπου τα σήματα εισόδου και εξόδου ανήκουν σε διαφορετικά είδη.

Ταξινόμηση συστημάτων

- Συστήματα **SISO, (**Single Input - Single Output) μιας εισόδου-μιας εξόδου
- Συστήματα **MISO** (Multi Input - Single Output) με πολλές εισόδους και μια έξοδο (αθροιστής)
- Συστήματα **MIMO** (Multi Input - Multi Output) με πολλές εισόδους και πολλές εξόδους

Επιμέρους κατηγορίες συστημάτων

Συστήματα με ή χωρίς μνήμη

- **Σύστημα χωρίς μνήμη**: όταν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της εισόδου στην ίδια χρονική στιγμή

$$y(t)=ax^2(t)+\beta x(t)$$

- Ένα σύστημα του οποίου η έξοδος εξαρτάται και από τις προηγούμενες τιμές της εισόδου ονομάζεται **σύστημα με μνήμη ή δυναμικό σύστημα.**

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} a_i x(i)$$

Επιμέρους κατηγορίες συστημάτων

Αιτιοκρατικά συστήματα

Ένα σύστημα ονομάζεται **αιτιοκρατικό** εάν η έξοδος του σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνον από παρούσες ή προηγούμενες τιμές της εισόδου του. $\mathbf{y(t)=ax^2(t)+bx(t-1)}$

Ευσταθή συστήματα

Ένα σύστημα είναι **ευσταθές** όταν για κάθε απολύτως φραγμένη είσοδο του παρουσιάζει επίσης απολύτως φραγμένη έξοδο. Δηλαδή όταν $\left|x(t)\right|<k_x$ **τότε** $\left|y(t)\right|<k_y$

Επιμέρους κατηγορίες συστημάτων

- Ένα σύστημα ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητο** αν για κάθε χρονική στιγμή t, η οποιαδήποτε χρονική ολίσθηση t_o στο σήμα εισόδου προκαλεί την ίδια χρονική ολίσθηση στο σήμα εξόδου.

$$\Gamma\left(x\left(t - t_0\right)\right) = y(t - t_0)$$

- Ένα σύστημα ονομάζεται **γραμμικό** όταν ικανοποιεί τη σχέση

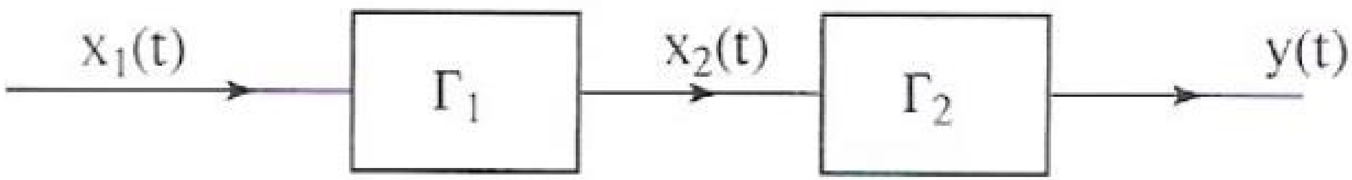
$$\Gamma\left(a_1 x_1\left(t\right) + a_2 x_2\left(t\right)\right) = a_1 y_1\left(t\right) + a_2 y_2\left(t\right)$$

Όπου
$$y_1(t) = \Gamma\left(x_1(t)\right),\ y_2(t) = \Gamma\left(x_2(t)\right)$$

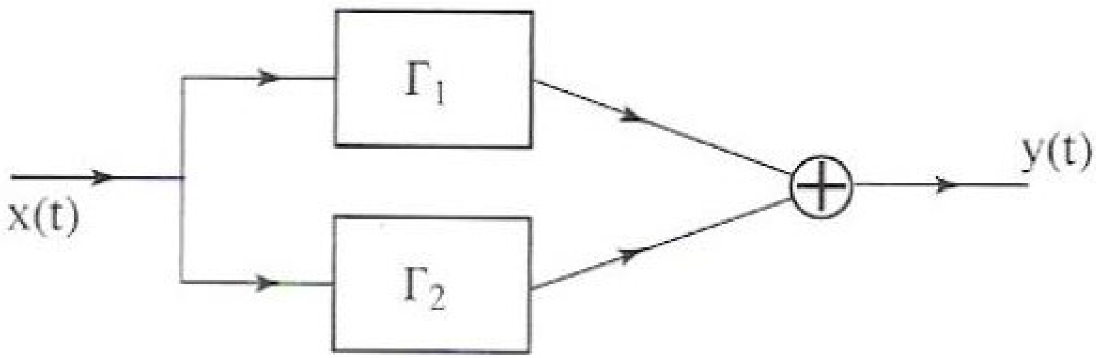
Οι παραπάνω κατηγορίες υπάρχουν τόσο για συστήματα συνεχούς χρόνου όσο και για συστήματα διακριτού χρόνου.

Διασύνδεση συστημάτων

- Σειριακή διασύνδεση



- Παράλληλη διασύνδεση



Γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα (συνεχούς χρόνου)

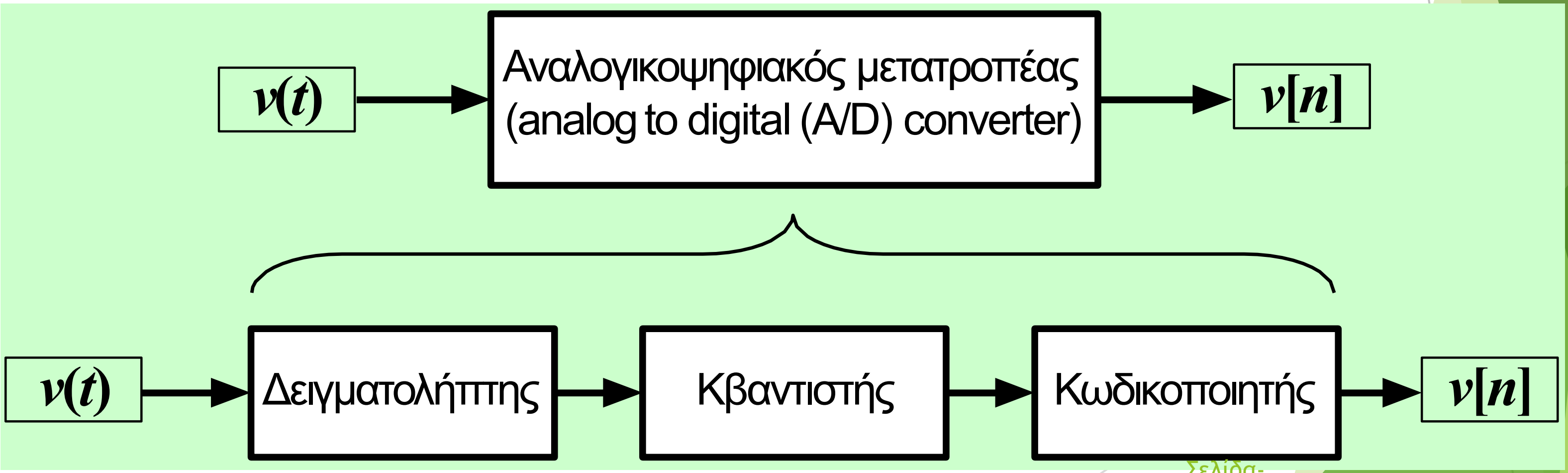
- Κρουστική απόκριση,
- Η απόκριση ενός συστήματος όταν στην είσοδο του εφαρμόζεται η συνάρτηση δ(t), ορίζεται ως η κρουστική απόκριση του συστήματος:
  - h(t)=Γ(δ(t))
- Για τα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα ισχύει:
  - h(t-τ)=Γ(δ(t-τ))
- Το συνελικτικό ολοκλήρωμα-άθροισμα
- Η απόκριση ενός γραμμικού - χρονικά αμετάβλητου συστήματος Γ σε κάθε
- σήμα εισόδου X(t) δίδεται από τη σχέση: $y(t) = \int_{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

ή συμβολικά y(t)=x(t)*h(t)

όπου h(t) η κρουστική απόκριση και (*) συμβολίζει τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων

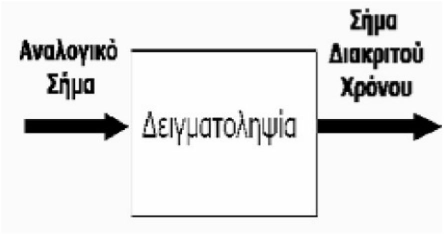
Ψηφιακή επεξεργασία αναλογικού σήματος

- Κατά την ψηφιακή επεξεργασία ενός αναλογικού σήματος διακρίνουμε 3 βασικά στάδια:
  - 1. τη *δειγματοληψία* του σήματος (sampling),
  - 2. την *κβάντιση* του (quantizing) και
  - 3. την *κωδικοποίηση* του (encoding)



Δειγματοληψία

- **Δειγματοληψία:** η επεξεργασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχές στο πεδίο του χρόνου, δειγματοληπτείται μετρώντας το πλάτος του επιλεκτικά σε διακριτές τιμές του χρόνου.
- Δηλαδή, η δειγματοληψία είναι η διαδικασία όπου ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου.



- Όταν αυτές οι χρονικές στιγμές ισαπέχουν μεταξύ τους τότε έχουμε τη λεγόμενη «ομοιόμορφη δειγματοληψία».

Θεώρημα δειγματοληψίας

- Έστω ένα σήμα συνεχούς χρόνου X (t) το οποίο περιέχει συχνότητες όχι υψηλότερες της fmax

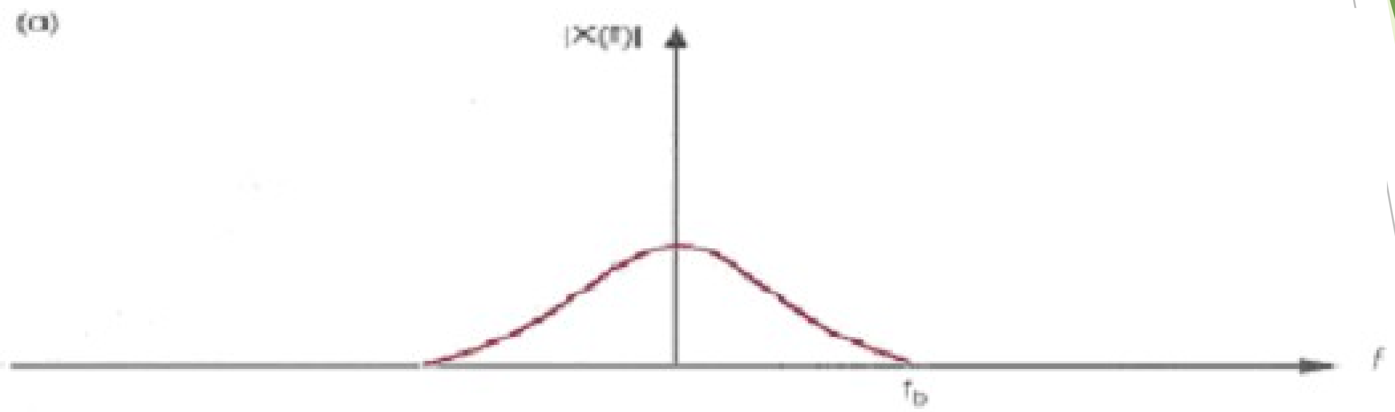
- Το σήμα μπορεί να αναπαραχθεί επακριβώς από τα δείγματα του x[k]=X(kTs),
  - *εάν τα δείγματα λαμβάνονται με συχνότητα η οποία είναι μεγαλύτερη από 2fmax.*

- Η συχνότητα 2fmax ονομάζεται συχνότητα Nyquist.

- Ισοδύναμα: αν $fs=1/Ts$ είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας τότε: $fs \geq 2fmax$

Διαδικασία Δειγματοληψίας

- **Έστω συνεχές σήμα *x(t)*,** με **μέγιστη συχνότητα *fo*,** όπου *X*(*f*) ο μετασχηματισμός Fourier του



Η διαδικασία της δειγματοληψίας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τον πολλαπλασιασμό του σήματος επί την παρακάτω συνάρτηση:

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

- η συνάρτηση Dirac δ(t)

Διαδικασία δειγματοληψίας

- Το διακριτό σήμα προκύπτει στο πεδίο του χρόνου ως εξής:

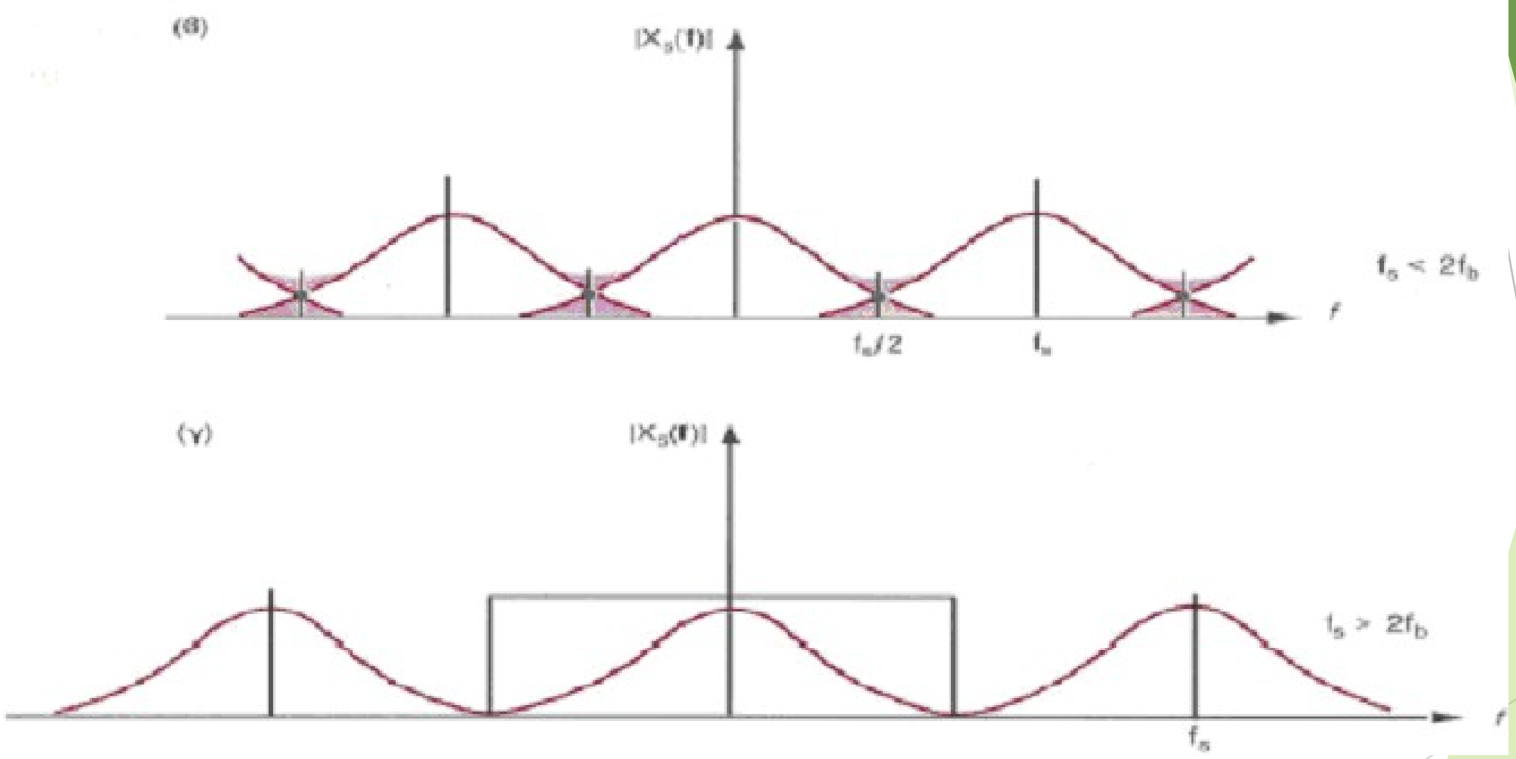
$$x_s(t) = x(t)i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s)$$

- Και στο πεδίο της συχνότητας ως εξής:

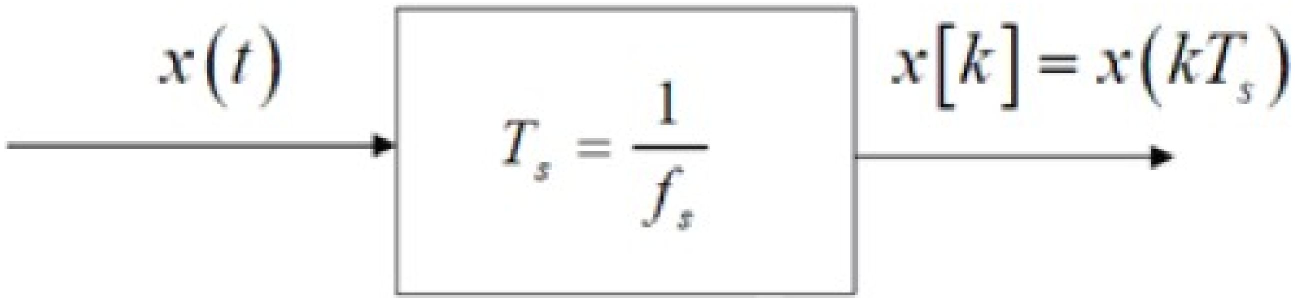
$$X_s(f) = X(f) * I(f) = X(f) * \frac{1}{Ts} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kfs) =$$

$$\frac{1}{Ts} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kfs)$$

Διαδικασία δειγματοληψίας



Παράδειγμα



Εικόνα 48. Σύστημα ιδανικής δειγματοληψίας

Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ή} \quad x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου θα είναι

$$x[k] = x(kT_s) = A\cos(\omega_o k T_s + \varphi)$$

$$x[k] = A\cos(2\pi f_0 k T_s + \varphi) = A\cos\left(2\pi k \frac{f_o}{f_s} + \varphi\right)$$

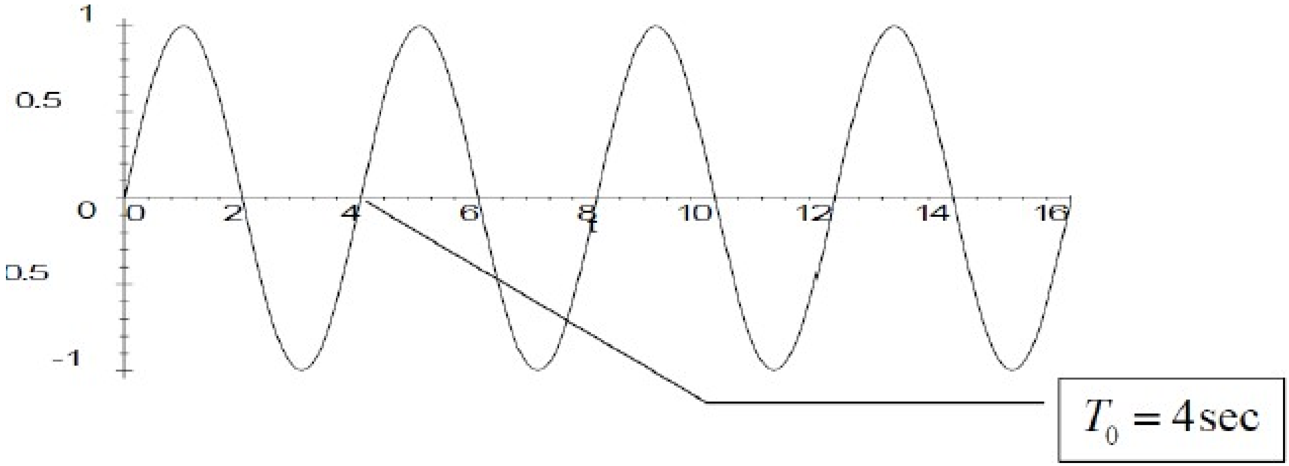
όπου f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

Παράδειγμα

- Από το θεώρημα Shannon ξέρουμε ότι πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα Nyquist
- Τι γίνεται αν αυτό δεν ισχύει;

Παράδειγμα

- Έστω ημιτονικό σήμα $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ με περίοδο $T_0=4$ sec, άρα συχνότητα $f_0=0,25$ Hz

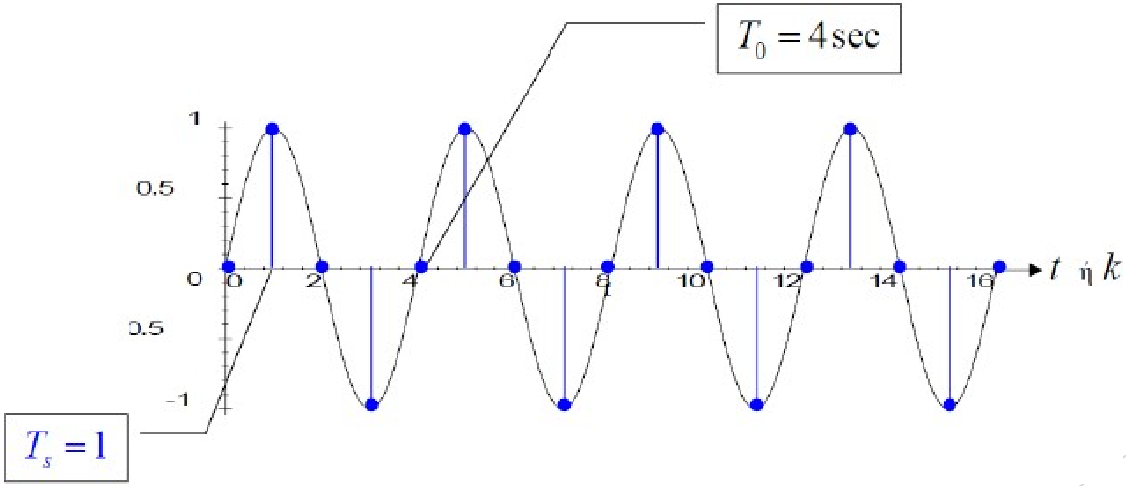


- οπότε $2f_0=0,5$

Παράδειγμα

- Αν επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας F_s=1,0 > 0,5 = $2f_0$ τα δείγματα θα είναι

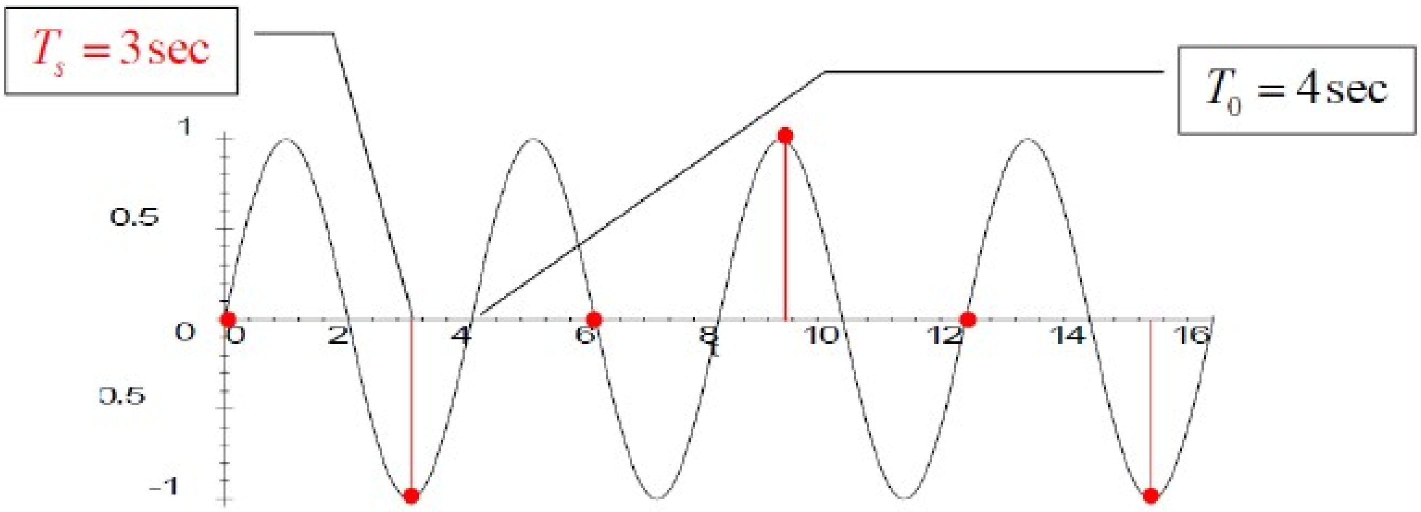
$$x[k] = \sin\left(\frac{\pi}{2}kT_s\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\frac{1}{f_s}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$



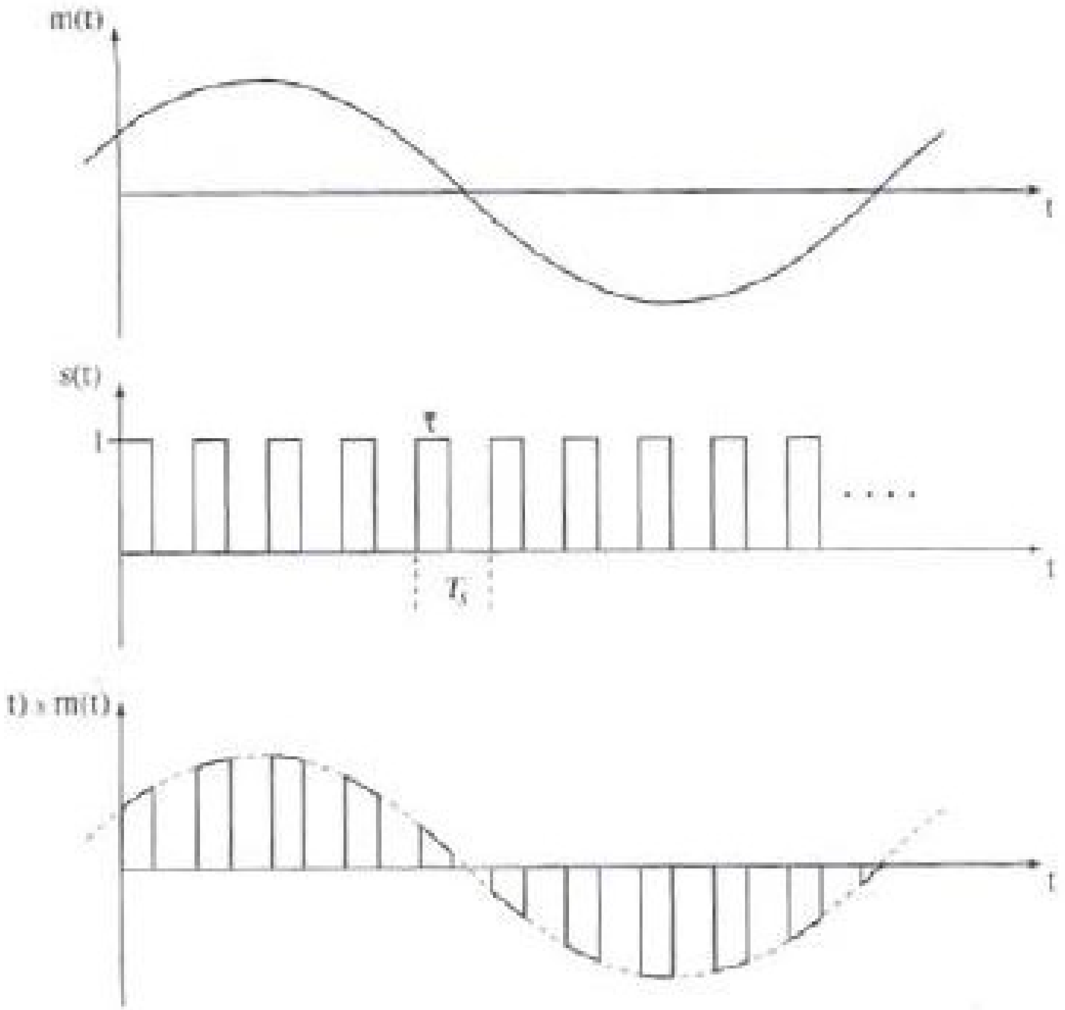
Παράδειγμα

- Αν όμως επιλέξουμε συχνότητα δειγματοληψίας $F_s=1/3 < 0,5 = 2f_0$ τα δείγματα θα είναι

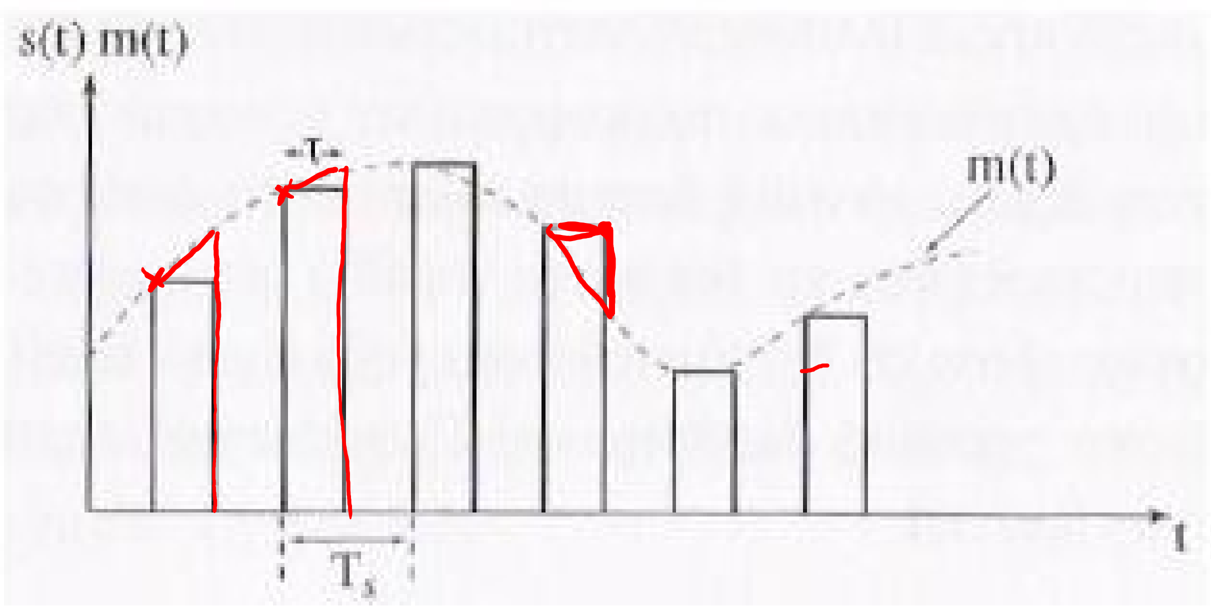
$$x[k] = x(kTs) = \sin(\omega_o kTs) = \sin(2\pi f_0 kTs) = \sin\left(2\pi k \frac{fo}{fs}\right) = \sin\left(2\pi k \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}\right) = \sin\left(\pi k \frac{3}{2}\right)$$



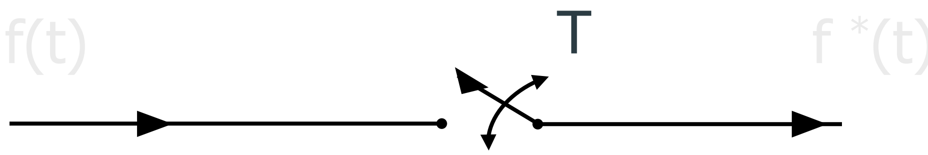
Φυσική δειγματοληψία



Φυσική δειγματοληψία με σήματα σταθερού πλάτους



Φυσική δειγματοληψία



Τελεστής

$$f^{*}(t) = f(t) \cdot P(t)$$

sampling
echantillonage

αν P(t) σειρά ορθογώνιων παλμών

τότε η $f^{*}(t)$ ισοδυναμεί με την κατά πλάτος διαμόρφωση μιας φέρουσας κυματομορφής παλμών P(t) από την f(t).

Φυσική δειγματοληψία

- Η $f^*(t)$ περιέχει άθικτο το φάσμα της $f(t)$?

$$f^*(t) = f(t) \cdot P(t)$$

P(t) : σειρά περιοδικών παλμών

- Ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της P(t)

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sigma\upsilon\nu n\omega t + \beta_n \eta\mu n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\sigma\upsilon\nu n\omega t\, dt, \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$\beta_n = \ldots\ldots \qquad \eta\mu n\omega t$$

ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ $f^*(t)$

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\vdots$$

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \qquad \omega = 2\pi f$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T P(t) e^{-jn\omega t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot f(t) e^{jn\omega t}, \qquad \omega = 2\pi/T$$

Μετασχηματισμός Fourier της f(t):

$$f(t) \Longleftrightarrow F(v)$$

όμοια $f^*(t) \Longleftrightarrow F^*(v)$

$$F^*(v) \equiv \mathcal{F}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left\{c_n \cdot f(t) e^{jn\omega t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \; \mathcal{F}\left\{f(t) e^{jn\omega t}\right\}$$

Μετασχηματισμός Fourier της f(t):

από το "θεώρημα ολίσθησης"

$$\mathcal{F}\{f(t)\cdot e^{j2\pi\nu_0 t}\} = F(\nu-\nu_0)$$

όταν η χρονική συνάρτηση f(t) πολλαπλασιάζεται με $e^{j\omega_0 t}$ ⇨ Το φάσμα "ολισθαίνει" κατά ν_0

$$\boxed{F^*(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n F\left(\nu - \frac{n}{T}\right)} \quad , \quad \frac{n}{T} = nf_s$$

ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΤΗΣ $f^*(t)$

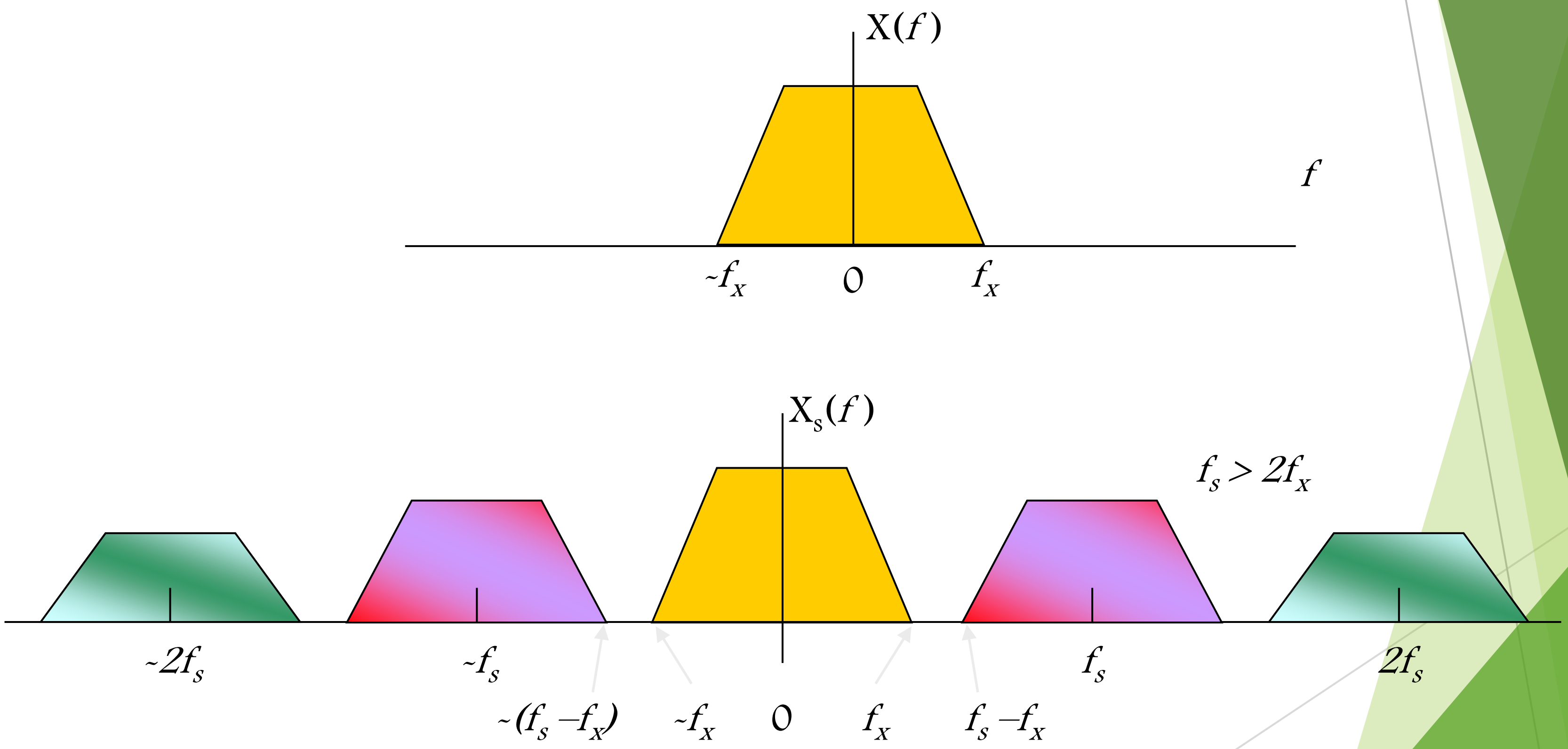
- Συμπεράσματα :
  - Η ακριβής μορφή των παλμών P(t) δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, αρκεί $\tau << T$.
  - Το αρχικό φάσμα περιορισμένο σε μία ζώνη (B, band-limited)
  - Πρέπει $f_s \geq 2B$

- Αν P(t) σειρά Dirac $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \Rightarrow C_n = \frac{1}{T}$

$$\text{και } F^*(v) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(v - nf_s)$$

- Αν το φάσμα του αρχικού σήματος δεν είναι περιορισμένο ⇨ "Αναδίπλωση φάσματος" (Aliased spectrum)

Το φάσμα συχνοτήτων του δειγματοληπτημένου μηνύματος είναι ένα άθροισμα...



5. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

- Αν φάσμα πηγής 0 Hz - B Hz ⟹ $f_{S_{min}} = 2B$

  "Βασική ζώνη"

  αν φάσμα πηγής B σε ψηλότερες συχνότητες ⟹

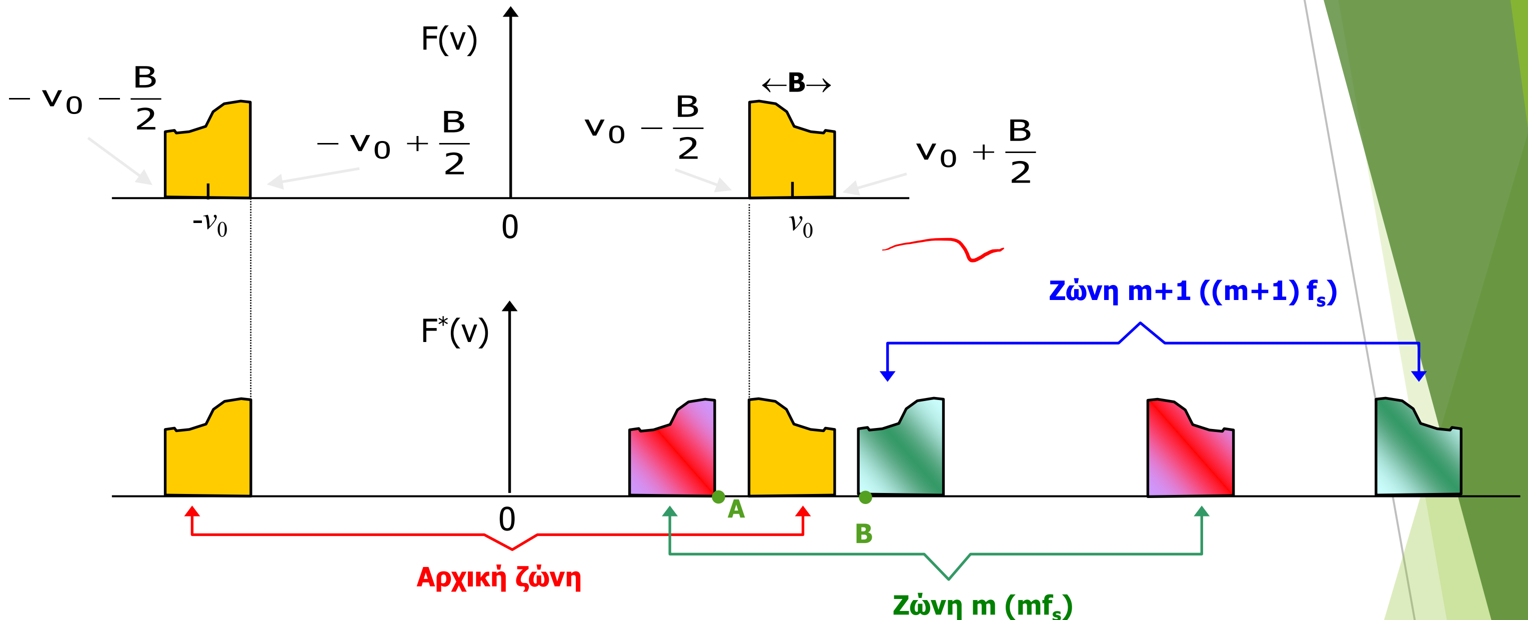
  $f_{S_{min}} = ?$ "Ζώνη διελεύσεως"

- Αν το φάσμα του f(t) περιέχεται

$$v_0 - \frac{B}{2} \leq |v| \leq v_0 + \frac{B}{2} \quad \text{με} \quad v_0 > \frac{B}{2}$$

Ποιες οι συνθήκες ώστε το φάσμα της F*(v) να αποτελείται από ζώνες που δεν επικαλύπτουν τις "αρχικές";

5. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ



$$
\left.
\begin{aligned}
&A: \quad mf_s - v_0 + \frac{B}{2} \leq v_0 - \frac{B}{2} \\
&B: \quad (m+1)f_s - v_0 - \frac{B}{2} \geq v_0 + \frac{B}{2}
\end{aligned}
\right\}
\qquad
\begin{aligned}
&mf_s \leq 2v_0 - B \\
&(m+1)f_s \geq 2v_0 + B
\end{aligned}
$$

$$\frac{2v_0 + B}{m+1} \leq f_s \leq \frac{2v_0 - B}{m}$$

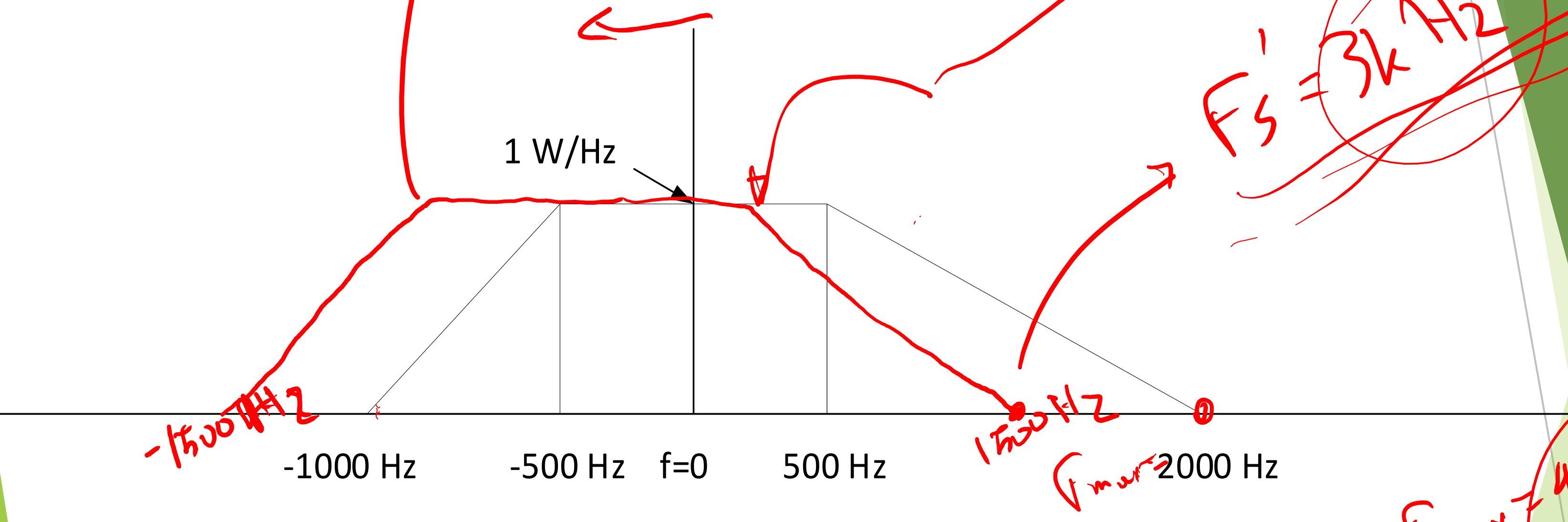
Οι f_s δεν μπορούν να είναι οποιεσδήποτε.

$f'_{min} = -f'_{max}$

$x(t)e^{2\pi j f_c t}$

$x(t)e^{-2\pi j 500 t}$

$F'_s = 3k\,Hz$



$F_s \geq 2 \cdot f_{max} = 4000\,Hz$

500Hz

ΑΣΚΗΣΗ

- Έστω ένα συνεχές σήμα με εύρος ζώνης συχνοτήτων
  μεταξύ 0 και 50 Hz
  - Αρκούν 4 στάθμες για την περιγραφή του (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)
  - $P_1 = P_2 = 3/8 \quad P_3 = P_4 = 1/8$
- Να βρείτε
  - 1. Την άριστη συχνότητα δειγματοληψίας
  - 2. Το H του ασυνεχούς σήματος
  - 3. Τον ρυθμό R της ασυνεχούς πληροφορίας
  - 4. Την χωρητικότητα C του διακριτού καναλιού για PCM κωδικοποίηση
  - Υπάρχει καλύτερη κωδικοποίηση ???